17.10.83

Aufgabenliste I

I.1. Beweise, daß für jede Funktion f der Klasse C^1 und beliebige Koordinatensysteme (x^i), $(x^{i'})$ gilt

$$\partial_{i'} f = A^i_{i'} \partial_i f$$

wobei $A^i_{i'} = \partial_{i'} x^i$.

I.2. Zeige, daß

$$A^{i''}_i = A^{i''}_{i'} \cdot A^{i'}_i$$

für beliebige drei Koordinatensysteme (x^i), $(x^{i'})$, $(x^{i''})$.

I.3. Die Spur

$$\sum_i H_{ii}$$

eines $(0,2)$-Tensors H ist kein Tensor (Skalar), d.h., sie hängt vom Koordinatensystem ab. Das gleiche gilt für die Determinante

$$\det [H_{ij}]$$

des $(0,2)$-Tensors H.

I.4. Sei H ein nichtausgearteter $(0,2)$-Tensor, G ein beliebiger Tensor vom Typ $(0,2)$. Dann ist

$$\frac{\det [G_{ij}]}{\det [H_{ij}]}$$

ein Skalar (d.h. ein Tensor vom Typ $(0,0)$).

I.5. Es sei H ein nichtausgearteter Tensor vom Typ $(0,2)$. Dann definiert die Formel

$$\bar{H}^{ik} H_{kj} = \delta^i_j$$

einen Tensor $\bar{H}$ vom Typ $(2,0)$, und $H_{ik} \bar{H}^{kj} = \delta^j_i$. Als lineare Abbildung $T^*_y M \to T_y M$ ist $\bar{H}$ das Inverse von $H: T_y M \to T^*_y M$. Ist H symmetrisch, d.h. $H_{ij} = H_{ji}$ (bzw. schief-symmetrisch, d.h. $H_{ij} = -H_{ji}$), so muß auch $\bar{H}$ es sein.

I.6. Erfüllt ein $(0,3)$-Tensor H die Gleichung $H_{ijk} = \lambda H_{jik}$ mit einer festen Zahl $\lambda \neq \pm 1$, so ist $H = 0$.

I.7. Genügt ein $(0,3)$-Tensor H den Bedingungen $H_{ijk} = H_{jik}$, $H_{ijk} = -H_{ikj}$, so $H = 0$.

I.8. Zwei Vektoren X, Y (bzw., kovariante Vektoren ξ, η) sind genau dann linear unabhängig, wenn $X \otimes Y - Y \otimes X \neq 0$, d.h. $X^i Y^j \neq Y^i X^j$ (bzw. wenn $\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi \neq 0$, d.h. $\xi_i \eta_j \neq \xi_j \eta_i$).

I.9. Sind X, Y zwei von Null verschiedene Vektoren, so ist auch $X \otimes Y + Y \otimes X \neq 0$.

I.10. Für jeden Tensor H vom Typ (p,q) gilt

$$H = H_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q} \otimes \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_p}.$$

I.11. Sei V ein unendlich dimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, daß die Abbildung $\Phi : V \to V^{**}$, $(\Phi(X))(\xi) = \xi(X)$, injektiv, aber nicht surjektiv ist.

I.12. Es sei g ein $(0,2)$-Tensor im Punkt $y \in M$, der symmetrisch ($g_{ij} = g_{ji}$) und positiv definit ist ($g_{ij} X^i X^j > 0$ für jeden Vektor $X \neq 0$); in anderen Worten, sei g ein Skalarprodukt ("eine Riemannsche Metrik") in $T_y M$. Für eine beliebige Basis $\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X}$ von $T_y M$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X}$ ist eine g-orthonormale Basis von $T_y M$

(ii) Es gilt

$$g = \overset{1}{\xi} \otimes \overset{1}{\xi} + \dots + \overset{n}{\xi} \otimes \overset{n}{\xi},$$

wobei $(\overset{i}{\xi})$ die zu $(\underset{i}{X})$ duale Basis von $T_y^* M$ bilden, d.h.,
$\overset{i}{\xi}(\underset{j}{X}) = \delta_j^i$,

(iii) $$\bar{g} = \underset{1}{X} \otimes \underset{1}{X} + \dots + \underset{n}{X} \otimes \underset{n}{X},$$

wobei $\bar{g}$ der Inverse Tensor von g ist.

I. 13 Ist H ein positiv definiter symmetrischer $(0,2)$-Tensor im Punkt $y \in M$, so muß sein Inverses $\overline{H}$ auch positiv definit und symmetrisch sein.

I. 14. Für einen $(0,2)$-Tensor H im Punkt $y \in M$ definiere man den Rang von H als den Rang der entsprechenden Matrix $[H_{ij}]$ (in einem festen Koordinatensystem).

(i) Zeige, daß der Rang von H vom Koordinatensystem unabhängig ist, d.h. eine echte Invariante $\mathrm{Rang}(H)$ von H bildet.

(ii) Beweise, daß die folgenden Bedingungen paarweise äquivalent sind:

a) $\mathrm{Rang}(H) \leq 1$

b) $H_{ij} = \xi_i \eta_j$ (d.h. $H = \xi \otimes \eta$) für gewisse kovariante Vektoren ξ, η.

c) $H_{ij} H_{k\ell} = H_{kj} H_{i\ell}$.

I. 15. Für einen symmetrischen $(0,2)$-Tensor H ist $\mathrm{Rang}(H) \leq 1$ genau dann, wenn es einen kovarianten Vektor ξ gibt mit $H = \pm \xi \otimes \xi$ (d.h. $H_{ij} = \pm \xi_i \xi_j$).

I. 16. Sei G ein symmetrischer Tensor vom Typ $(0,2)$, H ein symmetrischer Tensor vom Typ $(2,0)$. Sind G und H positiv semidefinit (bzw., positiv definit), so ist $G_{ij} H^{ij} \geq 0$ (bzw., $G_{ij} H^{ij} > 0$) (siehe Hinweis unten).

I. 17. Sei X ein C^∞-Vektorfeld auf M.

(i) $\partial_j X^i$ ist, im allgemeinen, kein Tensorfeld.

(ii) In Punkten $y \in M$ wo $X(y) = 0$ sind $\partial_j X^i(y)$ die Komponenten eines $(1,1)$-Tensors, den man durch $\partial X(y)$ bezeichnen kann.

I.18. Man beweise die auf Seiten 14–17 des Vorlesungstextes ohne Beweis formulierten Behauptungen.

I.19. Sei H ein C^∞-Tensorfeld vom Typ $(0,2)$, das in jedem Punkt symmetrisch und nichtausgeartet ist.

(i) Das Inverse Tensorfeld $\bar{H}$ vom Typ $(2,0)$ ist C^∞-differenzierbar

(ii) Es gilt

$$\bar{H}^{ij} \partial_k H_{ij} = \partial_k \log |H|,$$

wobei $|H| = |\det[H_{ij}]|$.

Warnung: die hier auftretenden Größen sind keine Komponenten von Tensoren. Siehe Hinweis unten.

(iii) Ist hier die Symmetrievoraussetzung über H notwendig?

I.20. Für jede C^2-Funktion f und jedes Koordinatensystem (x^i) gilt

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

I.21. Für beliebige zwei Koordinatensysteme (x^i), $(x^{i'})$ ist

$$\partial_{i'} A^i_{j'} = \partial_{j'} A^i_{i'}.$$

Hinweise.

zu I.16.: Die Behauptung zunächst für positiv definite Tensoren beweisen und dann ein Stetigkeitsargument anwenden

zu I.19.(ii): man benutze die Kettenregel für die Zusammengesetzte Abbildung

$$(x^i) \longrightarrow [H_{ij}(x)] \longrightarrow \log |H(x)|.$$

Aufgabenliste II 20.10.1983

II.1. Sei H ein Tensor vom Typ p,q im Punkt $y \in M$ und seien $\bar p, \bar q$ feste natürliche Zahlen mit $\bar p \leq p$, $\bar q \leq q$. Gilt für jeden Tensor G vom Typ $(\bar q, \bar p)$ in y

$$H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} \, G_{j_1 \dots j_{\bar p}}{}^{i_1 \dots i_{\bar q}} = 0 ,$$

so ist $H = 0$.

II.2. Sei $\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X}$ eine Basis von $T_y M$ und $\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{n}{\xi}$ die dazu duale Basis von $T_y^* M$. Dann gilt

$$\overset{i}{\xi} \otimes \underset{i}{X} = I ,$$

wobei I der Identitätstensor vom Typ $(1,1)$ ist (mit Komponenten $I_i{}^j = \delta_i{}^j$). Insbesondere,

$$I = dx^i \otimes \partial_i$$

für jedes Koordinatensystem (x^i).

II.3. Für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Es existiert auf M ein Zusammenhang ∇ mit der folgenden Eigenschaft: Für jeden Punkt $y \in M$ gibt es ein Koordinatensystem (x^i) um y wo die Komponenten Γ_{ij}^k von ∇ identisch verschwinden.

(ii) Es gibt auf M einen Atlas von Koordinatensystemen, für dessen beliebige zwei Koordinatensysteme (U, x), (U', x') die Übergangsabbildung

$$x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \to x'(U \cap U')$$

lokal affin ist in dem Sinne, daß die Einschränkung von $x' \circ x^{-1}$ auf jede zusammenhängende Komponente von $x(U \cap U')$ mit einer affinen Transformation von $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt (siehe Hinweis unten).

II.4. Sei $\Phi : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen den Mannigfaltigkeiten M, N, ∇ ein Zusammenhang auf N und $\bar{\nabla} = \Phi^* \nabla$ der zurückgeholte Zusammenhang auf M. Ist $(U, x) = (U, (x^i))$ ein Koordinatensystem in N und $(\Phi^{-1}(U), x \circ \Phi) = (\Phi^{-1}(U), x^{\bar{i}})$ das "zurückgeholte" Koordinatensystem in M, so gilt

$$\bar{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k},$$

wobei $\bar{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}}$ die Komponenten von $\bar{\nabla}$ bezüglich $(x^{\bar{i}})$ sind.

II. 5. Es seien jedem Koordinatensystem $(U, (x^i))$ auf der Mannigfaltigkeit M C^∞-Funktionen Γ_{ij}^{k} auf U zugeordnet. Verlangt man, daß für jedes C^∞ Vektorfeld Y die Funktionen

$$\partial_j Y^i + \Gamma_{js}^{i} Y^s$$

beim Koordinatenwechsel der Transformationsregel für (1,1)-Tensorfelder genügen, so muß für die Γ_{ij}^{k} die Transformationsregel für die Komponenten eines Zusammenhanges gelten.

II. 6. Ist ∇ ein Zusammenhang auf M und f eine C^2-Funktion, so stimmt in jedem kritischen Punkt y von f die zweite kovariante Ableitung $\nabla^2 f(y)$ mit der Hesse-Form $\mathrm{Hess}_y f$ überein.

II. 7. Das Identitätstensorfeld I vom Typ (1,1) ist bezüglich jedes Zusammenhangs ∇ auf M parallel, d.h., es gilt $\nabla I = 0$.

II. 8. Sei H ein C^∞-Tensorfeld vom Typ (0,2) auf M, das in jedem Punkt nichtausgeartet ist. Für das Inverse Tensorfeld $\bar{H}$ vom Typ (2,0) und für jeden Zusammenhang ∇ auf M gilt

$$\bar{H}^{ij}{}_{,k} = -\bar{H}^{il}\bar{H}^{sj}H_{ls,k}.$$

II. 9. Für jeden Zusammenhang ∇ und jedes Koordinatensystem (x^i) in M gilt

$$\nabla_{\partial_i} dx^j = - \Gamma^j_{ik} dx^k.$$

II. 10. Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $\Phi: M \to N$ ein Diffeomorphismus, $\overline{\nabla} = \nabla$ ein Zusammenhang auf N, $\overline{\nabla} = \Phi^* \nabla$. Für den Krümmungstensor $\overline{R}$ von $\overline{\nabla}$ gilt dann $\overline{R} = \Phi^* R$, d. h.

$$\overline{R}(X,Y)Z = \Phi_*^{-1}(R(\Phi_* X, \Phi_* Y)\Phi_* Z)$$

für beliebige Vektorfelder X, Y, Z auf M.

II. 11. Sei ∇ ein Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M, $m \geq 1$ eine natürliche Zahl, (x^i) ein festes Koordinatensystem in M. Dann gilt, für jede C^∞-Funktion f auf M,

$$f_{;i_1 \ldots i_m} = \partial_{i_1 \ldots i_m} f + Q_{i_1 \ldots i_m}(f),$$

wobei $Q_{i_1 \ldots i_m}(f)$ eine lineare Kombination der partiellen Ableitungen von Ordnungen 1 bis $m-1$ von f ist, deren Koeffizienten gewisse (von f unabhängige) C^∞-Funktionen ist (diese Koeffizienten hängen aber vom Koordinatensystem und von ∇ ab). Siehe Hinweis unten.

Hinweise:

zu II. 3. Die Übergangsabbildung $x' \circ x^{-1}$ ist lokal affin genau dann, wenn $\partial_j A^{i'}_i = 0$, d. h., wenn die Übergangsmatrix aus lokal konstanten Funktionen besteht.

zu II.11: Induktion bezüglich m (ohne die $Q_{i_1 \dots i_m}(f)$ explizit auszurechnen).

27.10.83

Aufgabenliste III

III.1. Sei $\Phi: M \to N$ ein Diffeomorphismus, ∇ ein Zusammenhang auf N, $\overline{\nabla} = \Phi^*\nabla$. Dann hat $\overline{\nabla}$ den Torsionstensor $\overline{T} = \Phi^* T$, wobei $(\Phi^* T)(X,Y) = \Phi_*^{-1}\big(T(\Phi_* X, \Phi_* Y)\big)$ für beliebige Vektoren X, Y.

III.2. Zwei Tensoren H, G vom gleichen Typ sind genau dann proportional (linear abhängig), wenn $H \otimes G = G \otimes H$.

III.3. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M, $\gamma: [a,b] \to M$ eine C^∞-Kurve, X ein C^∞-Vektorfeld längs γ, $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ eine C^∞-Funktion. Dann ist $\tilde{X} = X \circ \varphi$ ein C^∞-Vektorfeld längs der Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [c,d] \to M$ und

$$\nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}} \tilde{X} = \varphi' \cdot \big((\nabla_{\dot{\gamma}} X) \circ \varphi\big).$$

Deshalb ist (in welchem Sinne?) die Parallelverschiebung von der Parametrisierung der Kurve unabhängig.

III.4. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M, $\gamma_1: [a,b] \to M$, $\gamma_2: [b,c] \to M$ zwei stückweise C^∞-Kurven mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ und $\tilde{\gamma}: [a,c] \to M$ die aus γ_1, γ_2 "zusammengesetzte" Kurve. Dann ist

$$\tau_{\tilde{\gamma}} = \tau_{\gamma_2} \circ \tau_{\gamma_1}.$$

III.5. Sei U ein Ball um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^n$, $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ C^∞-Funktionen mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i}$$

für alle i, j. Dann gibt es eine C^∞-Funktion h auf U mit

$$\frac{\partial h}{\partial x^i} = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

(Siehe Hinweis unten).

III. 6. Ein C^∞-kovariantes Vektorfeld ξ auf M erfüllt die Bedingung $d\xi = 0$ genau dann, wenn jedes $y \in M$ eine Umgebung U besitzt mit einer C^∞-Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ für die

$$\xi = df$$

in U (vgl. Beispiel d), Seite 16, und Aufgabe III. 5).

III. 7. Sind $x^1, \dots, x^n$ C^∞-Funktionen in einer Umgebung des Punktes $y \in M$, deren Differentiale $dx^i(y)$ eine Basis von T_y^*M bilden, so sind $x^1, \dots, x^n$, in einer Umgebung von y, die Komponenten eines Koordinatensystems.

III. 8. Für Tensoren H, G vom Typ (p,q) und Tensoren H', G' vom Typ (p', q') im Punkt y der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gilt

$$g(H \otimes H', G \otimes G') = g(H,G) \cdot g(H', G').$$

III. 9. Für jeden Punkt y der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) kann man lokale Koordinaten (x^i) um y finden, so daß $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$ (d.h. $\partial_1(y), \dots, \partial_n(y)$ sind g-orthonormal).

III. 10. Ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor bleibt nach dem heraufziehen beider Indices symmetrisch.

III. 11. Für jeden Endomorphismus H eines n-dimensionalen reellen Vektorraumes mit einem Skalarprodukt g gilt

$$(\mathrm{Sp}(H))^2 \leq n|H|^2, \quad |H|^2 = g(H,H),$$

mit Gleichung nur wenn H ein Vielfaches der Identität ist.

III. 12. Für jeden Koordinatensystem in der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gilt $g^{ij} = g(dx^i, dx^j)$.

<u>Hinweis</u> zu III. 5: Wenn es so ein h gibt, und z. B. $h(0) = 0$, so, für jedes $y \in U$,

$$h(y) = h(ty)\Big|_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \frac{d}{dt} h(ty)\,dt = y^i \int_0^1 f_i(ty)\,dt.$$

Man definiere h entsprechend.

3.11.1983

Aufgabenliste IV

IV.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

(i) U ist die Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen von U.

(ii) Jede offene Überdeckung von U enthält eine Überdeckung, die aus abzählbar vielen Mengen besteht.

IV.2. Seien M_1, M_2, M_3 Mannigfaltigkeiten, $\Phi: M_1 \to M_2$, $\Psi: M_2 \to M_3$ differenzierbare Abbildungen, g eine Riemannsche Metrik auf M_3. Dann ist

$$(\Psi \circ \Phi)^* g = \Phi^*(\Psi^* g).$$

IV.3. Für jedes C^∞-kovariante Vektorfeld ξ auf der Mannigfaltigkeit M und beliebige C^∞-Vektorfelder X, Y, gilt

$$(d\xi)(X,Y) = X(\xi(Y)) - Y(\xi(X)) - \xi([X,Y]), \text{ wobei } (d\xi)_{ij} = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i.$$

IV.4. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen, $\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X}$ C^∞-Vektorfelder auf U, die in jedem Punkt $y \in U$ eine Basis von T_yM bilden. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $[\underset{i}{X}, \underset{j}{X}] = 0$ für alle i, j.

(ii) $d\overset{i}{\xi} = 0$ für $i = 1, \dots, n$, wobei die $\overset{i}{\xi}$ die zu $\underset{i}{X}$ dualen C^∞-kovarianten Vektorfelder auf U sind $(\overset{i}{\xi}(\underset{j}{X}) = \delta^i_j)$.

(iii) Für jedes $y \in U$ gibt es ein Koordinatensystem (x^i) um y mit $\underset{i}{X} = \partial_i$, $i = 1, \dots, n$.

IV.5. Sei ∇ ein Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M. Eine C^∞-Kurve $\gamma: [a,b] \to M$ heißt eine <u>Geodätische</u> wenn das <u>Tangentialfeld</u> $[a,b] \ni t \mapsto \dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$ längs γ parallel ist: $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$.

(i) In lokalen Koordinaten sind die

Geodätischen γ durch die Gleichungen

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t) + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\,\dot\gamma^i(t)\,\dot\gamma^j(t) = 0$$

gekennzeichnet.

(ii) Für jeden Punkt $y \in M$ und jeden Vektor $X \in T_yM$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und genau eine Geodätische $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ mit $\gamma(0) = y$, $\dot\gamma(0) = X$.

(iii) Sind M, $\overline{M}$ Mannigfaltigkeiten mit Zusammenhängen ∇, bzw. $\overline{\nabla}$ und $\Phi : \overline{M} \to M$ ein Diffeomorphismus mit $\Phi^*\nabla = \overline{\nabla}$, so ist $\Phi^{-1}\circ\gamma$ eine Geodätische in $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ genau dann, wenn γ eine Geodätische in (M, ∇) ist.

(iv) Für jede Geodätische γ und jedes C^∞-Tensorfeld H vom Typ $(0, q)$ gilt

$$\frac{d}{dt}\left[H_{i_1\dots i_q}(\gamma(t))\cdot\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_q}(t)\right] =$$

$$= H_{i_1\dots i_q;i}(\gamma(t))\cdot\dot\gamma^{i_1}(t)\dots\dot\gamma^{i_q}(t)\cdot\dot\gamma^i(t).$$

IV. 6. Für beliebige C^∞-Funktionen f_1, f_2 auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), die kompakte Träger haben, gilt

$$\int_M f_1\,\Delta f_2 = \int_M g(df_1, df_2) = \int_M f_2\,\Delta f_1 .$$

IV. 7. Für jede positive C^∞-Funktion f auf der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) und für jede reelle Zahl a gilt

$$\int_M f^a\,\Delta f = a\int_M f^{a-1}|\nabla f|^2$$

und, falls $a \neq -1$,

$$\int_M f^a\,\Delta f = \frac{4a}{(a+1)^2}\int_M \left|\nabla\left(f^{\frac{a+1}{2}}\right)\right|^2$$

sowie

$$\int_M f^{-1}\,\Delta f = -\int_M |\nabla(\log f)|^2$$

10.11.1983

Aufgabenliste V

V.1. Ein Tensor H vom Typ $(k,0)$ oder $(0,k)$ heißt (total) symmetrisch, wenn seine Komponenten unter beliebigen Permutationen der Indizes invariant sind, d. h. wenn $H(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = H(v_1,\dots,v_k)$ für beliebige kovariante Vektoren (bzw. Vektoren) $v_1,\dots,v_k$ und jede Permutation σ von $\{1,\dots,k\}$. Die Symmetrisierung von H ist, für jeden $(k,0)$-Tensor H, der $(k,0)$-Tensor $\tilde{H}$ mit

$$\tilde{H}(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} H(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}),$$

wobei über alle Permutationen σ von $\{1,\dots,k\}$ summiert wird. Statt $\tilde{H}^{i_1\dots i_k}$ schreiben wir $H^{(i_1\dots i_k)}$. Genauso definieren wir die Symmetrisierung $H_{(i_1\dots i_k)}$ für einen $(0,k)$-Tensor H.

a) Ist H symmetrisch, so $H^{(i_1\dots i_k)} = H^{i_1\dots i_k}$.

b) Ist G ein symmetrischer $(0,k)$-Tensor, so gilt, für jeden $(k,0)$-Tensor H,

$$H^{i_1\dots i_k} G_{i_1\dots i_k} = H^{(i_1\dots i_k)} G_{i_1\dots i_k}.$$

Insbesondere $H^{ij}G_{ij} = 0$ falls $G_{ij} = G_{ji}$ und $H^{ij} = -H^{ji}$.

c) Ein symmetrischer $(k,0)$-Tensor H verschwindet genau dann, wenn

$$H^{i_1\dots i_k} G_{i_1\dots i_k} = 0$$

für jeden symmetrischen $(0,k)$-Tensor G.

V.2. Sei $(M\times N, g\times h)$ das Riemannsche Produkt der Mannigfaltigkeiten (M,g) und (N,h). Für jede meßbare Funktion f auf $M\times N$ mit $f \geq 0$ gilt der Satz von Fubini:

$$\int_{M\times N} f\cdot V_{g\times h} = \int_M F\cdot V_g$$

wobei $F(y) = \int_N f(y,\cdot)\, V_h$.

V.3. Man beweise direkt (ohne das Bündel der Einheitstangentialvektoren zu betrachten) daß, auf jeder kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit, das Minimum der Ricci-Krümmung erreicht wird.

V.4. Sei ∇ ein Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M, $\gamma: [a,b] \to M$ eine C^∞-Kurve.

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \varphi\cdot\dot\gamma$

für eine C^∞-Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(ii) Es existiert ein Diffeomorphismus

$$\psi : [c,d] \to [a,b], \quad c<d,$$

mit der Eigenschaft, daß $\gamma\circ\psi$ eine Geodätische ist.

V. 5. In einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine C^∞-Kurve mit

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \varphi\cdot\dot\gamma, \quad \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$$

(eine "nicht-parametrisierte Geodätische"). γ ist eine Geodätische genau dann, wenn $|\dot\gamma|$ konstant ist.

V. 6. Für den Kreis $S^1(c) \subset \mathbb{R}^2$, vom Radius c, mit der induzierten Metrik, finde man alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von Δ.

V. 7. Man finde die Transformationsregel für die Koeffizienten $\alpha^{ij}, \beta^i, \gamma$ eines Differentialoperators P 2. Ordnung mit der lokalen Koordinatendarstellung

$$Pf = \alpha^{ij}\partial_i\partial_j f + \beta^i f_{,i} + \gamma f.$$

V. 8. Wie sehen die elliptischen Operatoren auf eindimensionalen Mannigfaltigkeiten aus?

V. 9. Sei E ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, S^kE^* der Vektorraum aller k-linearen Abbildungen $H : \underbrace{E\times\dots\times E}_{k\text{-fach}} \to \mathbb{R}$, die total-symmetrisch sind. Eine Funktion $F : E \to \mathbb{R}$ heißt ein homogener Polynom vom Grade k, wenn sie bezüglich eines (globalen) linearen Koordinatensystems auf E wie ein homogener Polynom vom Grade k in n reellen Veränderlichen aussieht; dasselbe gilt dann für jedes lineare Koordinatensystem auf E. Sei $P^k(E)$ der Vektorraum aller homogenen Polynome k-ten Grades auf E. Man beweise, daß die Abbildung $\Phi : S^kE^* \to P^k(E)$ mit

$$(\Phi(H))(X) = H(X,X,\dots,X),$$

ein linearer Isomorphismus ist. Insbesondere ist $H \in S^kE^*$ eindeutig durch die Funktion $X \to H(X,\dots,X)$ bestimmt (siehe Hinweis).

Hinweis zu V. 9: Für $F \in P^k(E)$ gilt, in linearen Koordinaten, $F(X) = \frac{1}{k!}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k}F(0)\,X^{i_1}\dots X^{i_k}$. Man setze $\Phi^{-1}(F) = H$ mit $H_{i_1\dots i_k} = \frac{1}{k!}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k}F(0)$.

17. 11. 1983

Aufgabenliste VI

VI. 1. Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, (x^i) ein Koordinatensystem. Dann ist

$$g^{ij}\partial_k g_{ij} = \partial_k \log \det[g_{sl}].$$

VI. 2. Sei X ein C^∞-Vektorfeld auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), (x^i) ein Koordinatensystem. Dann

$$X^i{}_{;i}\sqrt{\det[g_{kl}]} = \partial_i\left(\sqrt{\det[g_{kl}]}\cdot X^i\right).$$

VI. 3. Man leite von der Aufgabe VI. 2 einen direkten Beweis der Greenschen Formel ab (siehe Hinweis unten).

VI. 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $f: U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit

$$\alpha^{ij}\partial_i\partial_j f + \beta^i\partial_i f + \gamma f = 0,$$

wobei die Funktionen $\alpha^{ij}, \beta^i, \gamma$ stetig sind, $\gamma \leq 0$ und die Matrix $[\alpha^{ij}]$ symmetrisch und positiv definit in jedem Punkt ist. Nimmt $|f|$ ein Maximum in U an, so ist f konstant und entweder $f = 0$ identisch, oder $\gamma = 0$ überall.

VI. 5. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und zusammenhängend, $F: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Nimmt $|F|$ in einem Punkt $y_0 \in U$ ein lokales Maximum an, so ist F konstant (siehe Hinweis unten).

VI. 6. Seien (M,g), (N,h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $\Phi: M \to N$ ein Diffeomorphismus.

(i) Für $y \in M$ definiere man $\det(d\Phi_y)$ als die Determinante der Matrix von

$$d\Phi_y : T_yM \to T_{\Phi(y)}N$$

bezüglich einer g-Orthonormalbasis von T_yM und einer h-Orthonormalbasis von $T_{\Phi(y)}N$. Man beweise, daß diese Determinante von der Auswahl solcher Basen nicht abhängt, bis auf eine Vorzeichenänderung.

(ii) $y \to |\det(d\Phi_y)|$ ist eine überall positive C^∞-Funktion auf M. In beliebigen Koordinaten (x^i) in M gilt

$$|\det(d\Phi)| = \sqrt{\frac{\det[(\Phi^* h)_{ij}]}{\det[g_{ij}]}}\,.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist koordinaten-invariant (vgl. Aufgabe I. 4; das Quadrat dieses Ausdrucks kann auch direkt als die Determinante eines (1,1)-Tensorfeldes aufgefaßt werden).

(iii) Für jede Funktion $f: N \to \mathbb{R}$, die nicht-negativ und meßbar (oder z. B. stetig, mit kompaktem Träger) ist, gilt

$$\int_N f \cdot V_h = \int_M (f \circ \Phi)\, |\det(d\Phi)|\, V_g$$

(vgl. die Transformationsformel für das Lebesguesche Integral). In anderen Worten, $V_{\Phi^* h} = |\det(d\Phi)|\, V_g$ (vgl. (vi), Seite 101).

$\underline{\text{VI}}$. 7. Sei (M,g) das Riemannsche Produkt $(0,c) \times S^{n-1}(1)$, wobei das Intervall $(0,c) \subset \mathbb{R}$ die euklidische Metrik und die Einheitssphäre $S^{n-1}(1) \subset \mathbb{R}^n$ die induzierte Metrik trägt, und sei (N,h) der punktierte Ball $B_0(c) \setminus \{0\}$ im $\mathbb{R}^n$, mit Radius c und Mittelpunkt 0, wobei h die euklidische Metrik ist.

(i) Für $(t,y) \in M$, $T_{(t,y)}M = T_t(0,c) \oplus T_y S^{n-1}(1)$. Sei $\Phi: M \to N$ der Diffeomorphismus mit $\Phi(t,y) = ty$. Die $d\Phi_{(t,y)}$-Bilder der Faktoren von $T_{(t,y)}M$ sind h-orthogonal. Der erste Faktor wird isometrisch abgebildet, im zweiten werden die Längen der Vektoren mit t multipliziert, sowie ihre Skalarprodukte. Also $|\det(d\Phi_{(t,y)})| = t^{n-1}$.

(ii) Für $f \in L^1(N,h)$,

$$\int_{0<|x|<c} f(x)\,dx = \int_0^c \int_{S^{n-1}} f(ty)\, t^{n-1}\, dt\, dy$$

("Integration in sphärischen Koordinaten"), wobei $dx = V_h$ und $dt\,dy = V_g$.

(iii) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\int_{\substack{0<|x|<c \\ x \in \mathbb{R}^n}} |x|^\alpha\, dx < \infty$ genau dann, wenn $\alpha > -n$.

Hinweise. Zu $\underline{\text{VI}}$. 3: Jedes Vektorfeld mit kompakten Träger ist eine endliche Summe von Feldern deren Träger in Koordinatenbereichen liegen. Zu $\underline{\text{VI}}$. 5: Man betrachte die Einschränkungen von F auf komplexe Geraden durch y_0 (Folgerung 4) und verwende die Eindeutigkeit der analyt. Fortsetzung

28. 11. 1983

Aufgabenliste $\underline{VII}$.

$\underline{VII}$. 1. Eine meßbare Funktion auf der Mannigfaltigkeit M heißt <u>einfach</u>, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt. Für jede meßbare Funktion $f \geqslant 0$ auf M gibt es eine Folge von einfachen Funktionen $f_m \geqslant 0$ mit $f_m \leq f_{m+1}$ und $\lim_{m \to \infty} f_m = f$ (punktweise). (Siehe Hinweis unten).

$\underline{VII}$. 2. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen, $B \subset M$ kompakt, $B \subset U$. Dann gibt es $\varphi \in C_0^\infty(M)$ mit $\varphi = 1$ auf B und $\varphi = 0$ außerhalb U. (Siehe Hinweis unten).

$\underline{VII}$. 3. Sei M ein kompakter metrischer Raum mit Abstandsfunktion d, f_m eine Folge von stetigen Funktionen auf M, die den folgenden Bedingungen genügt:

(a) $|f_m| \leq C$ mit einer von m unabhängigen Zahl C

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so daß für alle m und jedes Punktepaar $y, z \in M$ mit $d(y,z) < \delta$,

$$|f_m(y) - f_m(z)| < \varepsilon .$$

Dann

(i) Für jedes natürliche K gibt es eine <u>endliche</u> Menge $A_K \subset M$ mit der Eigenschaft, daß die Bälle mit Radien $\frac{1}{K}$ um die Punkte von A_K ganz M überdecken.

(ii) Eine Teilfolge von f_m (die wir wieder mit f_m bezeichnen) hat die Eigenschaft, daß, für jedes $y \in A = \bigcup_{K \geqslant 1} A_K$, die Folge $f_m(y)$ gegen eine Zahl konvergiert.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Wählt man dann $\delta > 0$ wie in (b) und K mit $\frac{1}{K} < \delta$, sowie m_0 mit $|f_{m_1}(y) - f_{m_2}(y)| < \varepsilon$ für alle $m_1, m_2 \geqslant m_0$ und alle $y \in A_K$, dann ist auch

$$|f_{m_1}(y) - f_{m_2}(y)| < 3\varepsilon$$

für alle $m_1, m_2 \geqslant m_0$ und <u>alle</u> $y \in M$, wobei wir mit f_m stets die in (ii) erwähnte Teilfolge bezeichnen.

(iv) Satz von Arzela: Unter unseren Voraussetzungen, besitzt f_m eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (vgl. Aufgabe VII. 4).

VII. 4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $\|\cdot\|_C$ die "Supremum-Norm" im Raum aller beschränkten Funktionen auf M:

$$\|f\|_C = \sup_M |f|.$$

(i) $f_m \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_C$ (d. h., $\|f_m - f\|_C \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$) genau dann, wenn $f_m \to f$ gleichmäßig.

(ii) Ist f_m eine $\|\cdot\|_C$-Cauchy-Folge von beschränkten Funktionen, so gibt es eine beschränkte Funktion f mit $\|f_m - f\|_C \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

(Bemerkung. Für (i), (ii) kann M eine beliebige Menge sein; die Abstandsfunktion d ist überflüssig)

(iii) Sind f_m stetig, beschränkt und $\|f_m - f\|_C \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ für eine (beschränkte) Funktion f, so ist auch f stetig.

VII. 5. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball, f_m eine Folge von C^1-Funktionen auf einer Umgebung von $\bar{B}$, die auf $\bar{B}$ mit ihren partiellen Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind:

$$|f_m| \leq C, \quad |\partial_i f_m| \leq C \text{ auf } \bar{B},$$

$i = 1, \dots, n$; C von m unabhängig.

Dann besitzt f_m eine Teilfolge, die auf $\bar{B}$ gleichmäßig konvergiert (siehe Hinweis unten).

Hinweise

zu VII. 1.: Sei z. B.

$$f_m(y) = \begin{cases} m, & \text{falls } f(y) \geq m \\ \dfrac{k}{2^m}, & \text{falls } \dfrac{k}{2^m} \leq f(y) < \dfrac{k+1}{2^m}, \\ & 0 \leq k \leq \dfrac{m}{2^m}. \\ & (k \text{ natürlich}) \end{cases}$$

zu VII. 2. Man finde $\psi \in C_0^\infty(M)$ mit $\psi = 0$ auf B, $\psi = 1$ auf $M \setminus \mathcal{U}$, als ein endliches Produkt von Funktionen ψ_α mit $\psi_\alpha = 0$ auf B_α, $\psi_\alpha = 1$ auf $M \setminus B'_\alpha$ (B_α, B'_α sind "kleine konzentrische Bälle")

zu VII. 5: Bedingung VII. 3. (b) ist erfüllt.

8.12.1983

Aufgabenliste VIII

VIII.1. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $P, Q : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ Differentialoperatoren, $a \in \mathbb{R}$.

(i) $(P+Q)^* = P^* + Q^*$, $(aP)^* = aP^*$

(ii) $(Q \circ P)^* = P^* \circ Q^*$, $(P^*)^* = P$

(iii) P ist elliptisch genau dann, wenn P^* es ist.

VIII.2. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $y \in M$. Dann ist δ_y keine lokal integrierbare Funktion, d.h. es gibt kein $f \in L^1_{loc}(M)$ mit $\delta_y = \nu_f$ (siehe Hinweis unten).

VIII.3. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, P ein Differentialoperator auf M. Dann ist

$$\int_M Pf \cdot h = \int_M f \cdot P^* h$$

für alle $f \in C^\infty(M)$, $h \in C_0^\infty(M)$ (siehe Hinweis unten).

VIII.4. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$ und, für $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} f(y/\varepsilon)$. Dann haben wir die schwache Konvergenz von Distributionen:

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \delta_0$$

(Siehe Hinweis unten).

VIII.5. Sei V ein reeller Vektorraum (endlich oder unendlich dimensional), $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform. Ist $f_m \in V$ eine Folge mit

$$B(f_m, f_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

so ist, für jedes $\varphi \in V$,

$$B(f_m, \varphi) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

(siehe Hinweis unten).

VIII.6. Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein Hilbertraum, $y_m \in V$ eine Folge, $y \in V$. Wir sagen daß y_m gegen y schwach in V konvergiert ("$y_m \to y$ schwach in V") wenn

$$\langle y_m, z \rangle \to \langle y, z \rangle \text{ für alle } z \in V.$$

(i) Ist $y_m \to y$ schwach in V und $y_m \to y'$ schwach in V, so $y = y'$

(ii) Konvergiert y_m gegen y bezüglich der Norm von V ("stark"), so ist $y_m \to y$ schwach.

(iii) Seien V_1, V_2 Hilberträume, $F: V_1 \to V_2$ stetig, linear. Ist $y_m \to y$ schwach in V_1, so $Fy_m \to Fy$ schwach in V_2 (siehe Hinweis unten).

(iv) Ist die Folge y_m in V beschränkt, $y \in V$, $V' \subset V$ ein dichter Unterraum und $\langle y_m, z\rangle \to \langle y, z\rangle$ für alle $z \in V'$, so $y_m \to y$ schwach in V.

(v) Jede beschränkte Folge y_m in V enthält eine schwach konvergente Teilfolge (siehe Hinweis unten).

$\underline{\text{VIII}}$. 7. Seien V_1, V_2 Banachräume, $F: V_1 \to V_2$ ein kompakter Operator. Dann ist $F^*: V_2^* \to V_1^*$ auch kompakt. (Hinweis unten).

<u>Hinweise</u>.

zu $\underline{\text{VIII}}$. 2: Wäre $\varphi(y) = \int_M f\varphi$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M)$, und $f \in L^1_{loc}(M)$, so ist $\int_M f\varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M \setminus \{y\})$, woher (Lemma 7) $f = 0$ fast überall in $M \setminus \{y\}$, d.h. in M

zu $\underline{\text{VIII}}$. 3: Man wiederhole den Beweis der Existenz von P^* mit $f \in C^\infty(M)$, $h \in C_0^\infty(M)$.

zu $\underline{\text{VIII}}$. 4. Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(\varepsilon y)\,dy$$

(Transformationsformel). Nun wende man den Satz von der majorisierten Konvergenz an.

zu $\underline{\text{VIII}}$. 5: $0 \leq B(f_m + t\varphi, f_m + t\varphi) = B(f_m, f_m) + {}$
$+ 2t\,B(f_m, \varphi) + t^2 B(\varphi, \varphi)$. Nun ist
$0 \geq \Delta = 4\,(B(f_m, \varphi))^2 - 4\,B(\varphi,\varphi)\,B(f_m, f_m)$.

zu $\underline{\text{VIII}}$. 6. (iii). Man verwende den adjungierten Operator $F^*: V_2 \to V_1$

zu $\underline{\text{VIII}}$. 6. (v): Zu einem vollständigen Orthonormalsystem $\{e_\alpha\}$ in V gibt es nur abzählbar viele α mit $\langle y_m, e_\alpha\rangle \neq 0$ für irgendein m. So finden wir eine Teilfolge mit $\langle y_m, e_\alpha\rangle \to c_\alpha$ für alle α. Der Vektor $y = \sum_\alpha c_\alpha e_\alpha$ existiert, weil $\sum_\alpha c_\alpha^2 \leq C^2$, wobei $\|y_m\| \leq C$.

zu $\underline{\text{VIII}}$. 7: Seien $f_m \in V_2^*$, $\|f_m\| \leq C$. Für die Einheitskugel $B \in V_2^*$ ist $\overline{F(B)}$ kompakt und eine Teilfolge von f_m muß auf $\overline{F(B)}$ gleichmäßig konvergieren (Satz von Arzela); somit konvergieren $F^* f_m = f_m \circ$

19. 12. 1983

Aufgabenliste IX

IX. 1. Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein Hilbert-Raum, $y_m \in V$ eine Folge von paarweise orthogonalen Vektoren. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} y_m$ ist in V summierbar (d. h. $\lim_{N \to \infty} \sum_{m=1}^{N} y_m$ existiert in V).

(ii) $\sum_{m=1}^{\infty} \|y_m\|^2 < \infty$.

(Hinweis unten).

IX. 2. Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein (reeller oder komplexer) Hilbert-Raum, $e_1, \ldots, e_k$ orthonormale Vektoren in V, $y \in V$. Dann ist der Vektor $y - \sum_{j=1}^{k} \langle y, e_j \rangle e_j$ zu $e_1, \ldots, e_k$ orthogonal und $\|y\|^2 \geq \sum_{j=1}^{k} |\langle y, e_j \rangle|^2$, während $\|\sum_{j=1}^{k} \langle y, e_j \rangle e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |\langle y, e_j \rangle|^2$.

IX. 3. Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein Hilbert-Raum, $\{e_t\}_{t \in T}$ ein orthonormales System in V ($e_t \in V$, $\|e_t\| = 1$, $\langle e_t, e_{t'} \rangle = 0$ für $t \neq t'$) mit einer beliebigen (nicht unbedingt abzählbaren) Indexmenge T, $y \in V$. Dann ist

(i) $\|y\|^2 \geq \sum_{t \in T} |\langle y, e_t \rangle|^2$

wobei, für $a_t \geq 0$, $\sum_{t \in T} a_t = \sup \{ \sum_{t \in T_0} a_t : T_0 \subset T, T_0 \text{ endlich} \} \in [0, \infty]$.

(ii) Es gibt höchstens abzählbar viele $t \in T$ mit $\langle y, e_t \rangle \neq 0$.

(iii) Es gibt $z \in V$ mit $z = \sum_{t \in T} \langle y, e_t \rangle e_t$ im folgenden Sinne: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $T_0 \subset T$, T_0 endlich mit

$$\|z - \sum_{z \in T_1} \langle y, e_t \rangle e_t\| < \varepsilon$$

für alle $T_1 \subset T$, T_1 endlich, $T_1 \supset T_0$.

Es gilt $\langle z, e_t \rangle = \langle y, e_t \rangle$ für $t \in T$ und $\|z\|^2 = \sum_{t \in T} |\langle y, e_t \rangle|^2$.

IX. 4. Ein orthonormales System $\{e_t\}_{t \in T}$ im Hilbert-Raum $(V, \langle , \rangle)$ heißt vollständig, wenn es zu keinem größeren Orthonormalsystem erweitert werden kann (man nennt es dann auch eine Hilbert-Basis von V).

Das orthonormale System $\{e_t\}_{t\in T}$ ist vollständig genau dann, wenn alle endlichen Kombinationen der e_t dicht in V liegen.

IX. 5. Für ein orthonormales System $\{e_t\}_{t\in T}$ im Hilbert-Raum $(V, \langle , \rangle)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $\{e_t\}_{t\in T}$ ist vollständig.

b) Ist $y \in V$ und $\langle y, e_t\rangle = 0$ für alle $t \in T$, so $y = 0$.

c) $y = \sum_{t\in T} \langle y, e_t\rangle e_t$ für jedes $y \in V$

d) $\|y\|^2 = \sum_{t\in T} |\langle y, e_t\rangle|^2$ für jedes $y \in V$.

IX. 6. Sei $\{e_t\}_{t\in T}$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbert-Raum $(V, \langle , \rangle)$, $\{a_t\}_{t\in T}$ ein System von komplexen (bzw. reellen) Zahlen. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) Es gibt $y \in V$ mit $\langle y, e_t\rangle = a_t$ für alle $t \in T$.

(ii) $\sum_{t\in T} |a_t|^2 < \infty$.

IX. 7. Jeder Hilbert-Raum besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem (Hinweis: ein mengentheoretisches Argument).

IX. 8. Seien $V, \tilde V$ Hilbert-Räume mit abzählbaren vollständigen Orthonormalsystemen $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ (bzw. $\{\tilde e_m\}_{m=1}^{\infty}$), $\gamma = \{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen (bzw. komplexen) Zahlen, V_0 (bzw. $\tilde V_0$) der dichte Unterraum von allen endlichen Kombinationen der e_m (bzw. der $\tilde e_m$). Sei $F_\gamma : V_0 \to \tilde V_0$ der lineare Operator mit $F_\gamma(e_m) = \gamma_m e_m$.

(i) $\|F_\gamma\|_{Op.} = \sup_m |\gamma_m|$; also F_γ ist stetig (und besitzt eine stetige Fortsetzung $V \to \tilde V$) genau dann, wenn die Folge γ_m beschränkt ist.

(ii) F_γ ist kompakt (im Sinne von Cauchy-Folgen; d. h. F_γ besitzt eine kompakte Fortsetzung $V \to \tilde V$) genau

dann, wenn $\lim_{m \to \infty} \gamma_m = 0$.
(Siehe Hinweis unten).

$\overline{\text{IX}}$. 9. Sei B ein kompakter topologischer (Hausdorff-) Raum, $C(B, \mathbb{R})$ (bzw. $C(B, \mathbb{C})$) die Algebra aller stetigen reell- (bzw. komplexwertigen) Funktionen auf B mit der Norm $\|\cdot\|_C$, wobei $\|f\|_C = \sup_B |f|$. Betrachten wir eine Unteralgebra $\mathcal{A} \subset C(B, \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $1 \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ enthält die Konstanten)

(ii) $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von B (d.h. für $y_1, y_2 \in B$ mit $y_1 \neq y_2$ gibt es $f \in \mathcal{A}$ mit $f(y_1) \neq f(y_2)$).

Dann

(a) Für $y_1, y_2 \in B$, $y_1 \neq y_2$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gibt es $f \in \mathcal{A}$ mit $f(y_1) = a_1$, $f(y_2) = a_2$.

(b) Die Abschließung $\overline{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ bezüglich $\|\cdot\|_C$ ist auch eine Unteralgebra von $C(B, \mathbb{R})$.

(c) Für $\varepsilon, A \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < A$ gibt es Polynome $P_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \varphi$ gleichmäßig auf $[\varepsilon, 2A - \varepsilon]$, wobei $\varphi(t) = \sqrt{t}$ für $t \in [\varepsilon, 2A - \varepsilon]$. (Siehe Hinweis unten).

(d) Für jedes $f \in \overline{\mathcal{A}}$ und $\varepsilon > 0$ haben wir $\sqrt{f^2 + \varepsilon} \in \overline{\mathcal{A}}$ (Hinweis unten).

(e) Für jedes $f \in \overline{\mathcal{A}}$ ist $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$ (Hinweis unten)

(f) Sind $f, h \in \overline{\mathcal{A}}$, so $\max(f, h) \in \overline{\mathcal{A}}$ und $\min(f, h) \in \overline{\mathcal{A}}$ (Hinweis unten).

(g) Sei $f \in C(B, \mathbb{R})$, $y_0 \in B$ fest, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $h = h_{y_0} \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $h_{y_0} < f + \varepsilon$, $h_{y_0}(y_0) = f(y_0)$ (Hinweis unten).

(h) Sei $f \in C(B, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $h \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $f - \varepsilon < h < f + \varepsilon$.

(j) Satz von Stone und Weierstraß: Unter den Voraussetzungen (i), (ii) liegt $\mathcal{A}$ $\|\cdot\|_C$-dicht in $C(B, \mathbb{R})$ (d.h. $\overline{\mathcal{A}} = C(B, \mathbb{R})$).

$\overline{\text{IX}}$. 10. Der "komplexe" Satz von Stone und Weierstraß: Ist B ein kompakter topologischer (Hausdorff-) Raum, $\mathcal{A}$ eine komplexe Unteralgebra von $C(B, \mathbb{C})$ mit $1 \in \mathcal{A}$, die die Punkte von B trennt und mit jeder Funktion f auch die komplex-konjugierte Funktion $\overline{f}$

enthält, so liegt A dicht in $C(B, \mathbb{C})$ (siehe Hinweis unten).

$\underline{\mathrm{IX}}$. 11 (Die "stärkere" Ungleichung von Friedrichs). Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene, relativ kompakte Untermannigfaltigkeit, $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$, P ein elliptischer D.O. der wesentlichen Ordnung $k > 0$ auf M. Dann gibt es $C > 0$ mit

$$\|f\|_{s+k} \leq C\left(\|Pf\|_s + \|f\|_0\right)$$

für alle $f \in C_0^\infty(U)$ (siehe Hinweis unten).

$\underline{\mathrm{IX}}$. 12. Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k > 0$ auf der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Definieren wir den Greenschen Operator ("Parametrix") G_P von P als die Abbildung

$$G_P : L^2(M) \to L^2_k(M)$$

mit $G_P(h) = f$ für $h \in L^2(M)$, wobei f die einzige Funktion in $L^2_k(M)$ ist mit $f \perp_{L^2} \mathrm{Ker}_k P$ und $Pf = \pi(h)$; π ist hier die Orthogonale Projektion $L^2(M) \to P(L^2_k(M))$.

(i) G_P ist stetig

(ii) $P \circ G_P = \pi$, $G_P \circ P = \pi'$ (die Projektion $L^2_k(M) \to V = (\mathrm{Ker}_k P)^\perp$ bezüglich der L^2-Zerlegung $L^2_k(M) = V \oplus \mathrm{Ker}_k P$).

<u>Hinweise</u>. zu $\underline{\mathrm{IX}}$.1: man rechne $\left\|\sum_{m=1}^{N} y_m - \sum_{m=1}^{N'} y_m\right\|^2$ aus (Cauchy-Bedingung für $\sum_{m=1}^{N} y_m$).

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 8.(ii): ist $\lim_m \gamma_m = 0$ und $\tilde{\gamma}^{(m)} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, 0, 0, \dots)$, so $F_{\tilde{\gamma}^{(m)}} \xrightarrow[m\to\infty]{} F_\gamma$ bezüglich der Operator-Norm und die $F_{\tilde{\gamma}^{(m)}}$ haben endlich dimensionale Bilder (sind also kompakt).

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 9.(c): Die Taylor-Reihe der Funktion $s \to \sqrt{A+s}$, $s \in (-A, A)$, konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $(-A, A)$, weil $\sqrt{A+s} = \sqrt{A}\sqrt{1+s/A}$.

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 9.(d): Für A mit $f^2 + \varepsilon \leq 2A - \varepsilon$ und P_m wie in (c) ist $\sqrt{f^2+\varepsilon} = \lim_m P_m \circ (f^2+\varepsilon)$ (gleichmäßig auf B).

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 9.(e): $\sqrt{f^2+\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0(+)]{} |f|$ (gleichmäßig), weil $|f| \leq \sqrt{f^2+\varepsilon} \leq |f| + \sqrt{\varepsilon}$.

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 9.(f): $2\max(f,h) = f + h + |f-h|$, ähnlich für $\min(f,h)$.

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 9.(g): Für $y \neq y_0$ gibt es $h_{y_0,y} \in \bar{A}$ mit $h_{y_0,y}(y_0) = f(y_0)$, $h_{y_0,y}(y) = f(y)$. Endlich viele der Mengen $\{z \in B : h_{y_0,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$ überdecken B; sei h_{y_0} das Maximum der entsprechenden $h_{y_0,y}$.

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 9 (h): Für $y \in B$, sei h_y wie in (g). Endlich viele der Mengen $\{z \in B : h_y(z) > f(z) - \varepsilon\}$ überdecken B. Sei h das Minimum der entsprechenden h_y.

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 10: $\mathrm{Re}\, A = \{\mathrm{Re} f : f \in A\} \subset A$ erfüllt (i), (ii) von $\underline{\mathrm{IX}}$. 9.

zu $\underline{\mathrm{IX}}$. 11: Man kann z. B. die Ungleichung für 3 Sobolev-Normen anwenden (oder die Poincaré-Ungleichung mit $\dim \mathrm{Kern}_{s+k} P < \infty$).

16. 1. 84

Aufgabenliste X

X. 1. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $v \in C_0^\infty(M)^*$ eine Distribution. Wir sagen, daß v kompakten Träger hat, wenn es eine kompakte Menge $A \subset M$ gibt mit

$$v(\varphi) = 0$$

falls $\varphi \in C_0^\infty(M)$, $\text{Träger}(\varphi) \subset M \setminus A$.

Für solche v und A, wählen wir $\psi \in C_0^\infty(M)$ mit $\psi = 1$ auf einer Umgebung von A.

(i) $\psi v = v$ (wobei $v \to \psi v$ als ein Differentialoperator der Ordnung 0 betrachtet wird).

(ii) Es gibt $k \geq 0$ mit der folgenden Eigenschaft: $v : C_0^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der C^k-Norm, unter der Voraussetzung, daß v kompakten Träger hat (Hinweis unten)

(iii) Hat v kompakten Träger, so gibt es $k \geq 0$ mit $v \in L^2_{-k}(M,g)$ (g - eine beliebige Riemannsche Metrik). Ist M kompakt, so liegt jede Distribution in einem der Sobolew-Räume $L^2_s(M)$, $s \in \mathbb{Z}$. (Hinweis unten)

X. 2. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. Ist $f \in C^\infty(M)$ nicht identisch 0 und

$$\Delta^k f = \mu f, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

so gibt es einen Eigenwert λ von Δ mit $\mu = \lambda^k$ und $\Delta f = \lambda f$. (Hinweis unten).

X. 3. Ricci-Identität für beliebige Tensorfelder $H_{i_1 \dots i_k}$ vom Typ $(0,k)$ auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g):

$$H_{i_1 \dots i_k, jl} - H_{i_1 \dots i_k, lj} =$$

$$= R_{lji_1}{}^s H_{s i_2 \dots i_k} + R_{lji_2}{}^s H_{i_1 s i_3 \dots i_k} + \dots$$

$$\dots + R_{lji_{k-1}}{}^s H_{i_1 \dots i_{k-2} s i_k} + R_{lji_k}{}^s H_{i_1 \dots i_{k-1} s}$$

(Hinweis unten).

X. 4. Die Ungleichung von Friedrichs für Δ^k ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$) auf der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g):

Es gibt $C_k > 0$ mit

$$\|f\|_{2k} \leq C_k \left(\|\Delta^k f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \right)$$

(man finde einen direkten Beweis; Hinweis unten).

$\underline{X}$.5. Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) f ist die Summe von endlich vielen Eigenfunktionen von Δ.

(ii) Es gibt $C > 0$ mit

$$\|\Delta^i f\|_{L^2} \leq C^i$$

für alle $i \geq 0$. (Hinweis unten).

Hinweise.

zu $\underline{X}$.1.(ii): Sonst gibt es, für jedes k, eine Folge $f_{k,m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ in $C_0^\infty(M)$ mit $\|f_{k,m}\|_{C^k} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$, $|v(f_{k,m})| \geq \varepsilon > 0$. Also gilt dasselbe, wenn man $f_{k,m}$ durch $\psi f_{k,m}$ ersetzt. Deshalb finden wir, für jedes k, $\varphi_k = \psi f_{k, m_k}$ mit $\|\varphi_k\|_{C^k} < \frac{1}{k}$, $|v(\varphi_k)| \geq \varepsilon > 0$, Träger$(\varphi_k) \subset$ Träger(ψ). Somit $\varphi_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ in C^∞, aber $v(\varphi_k) \not\to 0$.

zu $\underline{X}$.1.(iii): Man wende das Lemma von Sobolew an (für k wie in (ii) gibt es $C > 0$ mit $|v(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{C^k}$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M)$; also $|v(\varphi)| = |v(\psi\varphi)| \leq C \|\psi\varphi\|_{C^k} \leq$ $\leq \tilde{C} \|\psi\varphi\|_{L^2_k} \leq \tilde{\tilde{C}} \|\varphi\|_{L^2_k}$, da Träger$(\psi\varphi) \subset$ $\subset$ Träger(ψ)).

Zu $\underline{X}$.2: Es ist $\mu \geq 0$. Für $\lambda = \mu^{1/k}$, $\Delta^k - \mu = \Delta^k - \lambda^k = (\Delta^{k-1} + \lambda\Delta^{k-2} + \lambda^2\Delta^{k-3} + \ldots$ $\ldots + \lambda^{k-2}\Delta + \lambda^{k-1})(\Delta - \lambda)$ und der erste Faktor auf der rechten Seite ist ein positiver Operator.

Zu $\underline{X}$.3. Dies gibt für $H = f \overset{1}{\omega} \otimes \ldots \otimes \overset{k}{\omega}$ (f eine C^∞-Funktion, $\overset{i}{\omega}$ vom Typ $(0,1)$), wegen der Ricci-Identität für $\overset{i}{\omega}$. Jedes H ist, lokal, eine Summe von solchen Produkten.

Zu $\underline{X}$.4: Induktion bezüglich k. Abschätzung von $\int f_{,i_1 \ldots i_s} f^{,i_1 \ldots i_s}$, $s \leq 2k$, durch mehrfache partielle Integration mit $\underline{X}$.3 (wobei man $\int f_{,i_1}{}^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_2}{}_{\ldots i_s}{}^{i_s} \cdot f$ zu erreichen versucht)

Zu $\underline{X}$.5: $f = \sum_{k \geq 0} f_k$ (C^∞-konvergent, L^2-orthogonal), $\Delta f_k = \lambda_k f_k$.

23.1.84

Aufgabenliste XI.

XI.1. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\Phi : (0,\infty) \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige (nicht mal stetige oder meßbare) Funktion, $(0,\infty) \ni t \to \alpha(t)$ eine Kurve von (2,0) Tensorfeldern auf M, die in jedem Punkt symmetrisch und negativ semidefinit sind, $(0,\infty) \ni t \to \beta(t)$ eine Kurve von Vektorfeldern auf M, $\gamma : (0,\infty) \times M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Felder $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und γ brauchen nicht stetig zu sein, die Abhängigkeit der $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ von t ist auch ganz beliebig. Für $f \in \mathcal{C}_M$ definieren wir $Qf : (0,\infty) \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$Qf = \alpha(t)^{ij} f_{,ij} + \beta(t)^i f_{,i} + \gamma(t) f ,$$

wobei $(\gamma(t)f)(t,y) = \gamma(t,y) f(t,y)$ usw.

<u>Maximumprinzip für den verallgemeinerten Wärmeleitungsoperator</u>: Sei $f \in \mathcal{C}_M$ und

$$(\partial_t f)(t,y) + (Qf)(t,y) \geqslant \Phi(t,y,f(t,y))$$

für alle $(t,y) \in (0,\infty) \times M$.

(i) Ist $f(0,\cdot) > 0$ und $\Phi(t,y,0) > 0$ für alle $(t,y) \in (0,\infty) \times M$, so ist auch $f > 0$ überall in $[0,\infty) \times M$.

(ii) Ist $f(0,\cdot) \geqslant 0$, $\Phi(t,y,0) > 0$ für $(t,y) \in (0,\infty) \times M$ und

$$\inf_{t>0,\, y\in M} \gamma(t,y) > -\infty ,$$

so muß $f \geqslant 0$ überall sein.

(iii) Ist $f(0,\cdot) \geqslant 0$, $\Phi(t,y,0) \geqslant 0$ für $(t,y) \in (0,\infty) \times M$ und

$$t\,\gamma(t,y) > -1$$

für $t > 0$ und $y \in M$, so ist $f \geqslant 0$.

(Siehe Hinweise unten).

XI.2. Sei (M,g) eine kompakte Mannigfaltigkeit, φ_i und μ_i wie auf S. 291. Für $y \in M$ und $X \in T_yM$ betrachten wir die Distributionen δ_y, $X\delta_y \in T_yM$ mit

$$\delta_y(\varphi) = \varphi(y), \quad (X\delta_y)(\varphi) = X\varphi \;\left(= (d\varphi(y))X\right)$$

(also, $X\delta_y = \tilde{X}\delta_y$, wobei $\tilde{X}$ ein beliebiges C^∞-Vektorfeld auf M mit $\tilde{X}(y) = X$ ist und $\tilde{X}$ auf δ_y als Differentialoperator erster Ordnung operiert); $\varphi \in C^\infty(M)$ ist dabei beliebig.

(i) $(\delta_y)^\wedge(i) = \varphi_i(y)$, $(X\delta_y)^\wedge(i) = X\varphi_i$ für $i \geq 0$.

(ii) Sind $y, z \in M$, $y \neq z$, so gibt es $i \geq 0$ mit $\varphi_i(y) \neq \varphi_i(z)$. (Hinweis unten)

(iii) Ist $X \in T_yM$, $X \neq 0$, so gibt es $i \geq 0$ mit $X\varphi_i \neq 0$. (Hinweis unten)

(iv) Es gibt $N \geq 0$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $y \in M$ und $X \in T_yM$ mit $X \neq 0$, $(d\varphi_i(y))X \neq 0$ für ein gewisses $i \leq N$; die Funktionen $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ bilden also eine Immersion

$$(\varphi_0, \dots, \varphi_N) : M \to \mathbb{R}^{N+1}$$

(Hinweis unten)

(v) In der Produktmannigfaltigkeit $M \times M$ gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ der Diagonale

$$\mathcal{D}_M = \{(y,y) \in M \times M : y \in M\}$$

mit der Eigenschaft, daß, für ein gewisses $N \geq 0$ und $\Phi = (\varphi_0, \dots, \varphi_N) : M \to \mathbb{R}^{N+1}$, $\Phi(y) \neq \Phi(z)$ falls $(y,z) \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{D}_M$. (Hinweis unten)

(vi) Für $\mathcal{U}$ und N wie in (v), gibt es $\tilde{N} \geq N$ mit der Eigenschaft, daß

$$\tilde{\Phi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_{\tilde{N}}) : M \to \mathbb{R}^{\tilde{N}+1}$$

injektiv ist. (Hinweis unten)

(vii) Es existiert $N_0 \geq 0$ mit der Eigenschaft, daß

$$\Phi_{N_0} = (\varphi_0, \dots, \varphi_{N_0}) : M \to \mathbb{R}^{N_0+1}$$

eine Einbettung (d.h. injektive Immersion) ist. (Hinweis unten).

XI. 3. Seien (M,g), (M',g') kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $(M \times M', g \times g')$ ihr Riemannsches Produkt.

(i) Ist $\mathcal{K} \in L^2(M \times M')$, $\varphi \in L^2(M')$, so ist die Funktion $\mathcal{K}\varphi$ auf M mit

$$\mathcal{K}\varphi(y) = \int_{M'} \mathcal{K}(y,z)\varphi(z) V_{g'}(z)$$

fast überall definiert, meßbar und

$$\|\mathcal{K}\varphi\|_{L^2(M)} \leq \|\mathcal{K}\|_{L^2(M\times M')} \cdot \|\varphi\|_{L^2(M')},$$

so daß $\mathcal{K}\varphi \in L^2(M)$. (Hinweis unten).

(ii) Sei φ_i, $i = 0, 1, \ldots$ (bzw. φ_i', $i = 0, 1, \ldots$) eine Hilbert-Basis von $L^2(M)$ (bzw. von $L^2(M')$), die aus Eigenfunktionen von Δ (bzw. vom Laplace-Operator Δ' für (M', g')) besteht, $\Delta\varphi_i = \mu_i\varphi_i$ (bzw. $\Delta'\varphi_i' = \mu_i'\varphi_i'$). Für $i, j \geq 0$ sei $\varphi_i \cdot \varphi_j'$ die Funktion auf $M \times M'$ mit $(\varphi_i \cdot \varphi_j')(y, z) = \varphi_i(y) \cdot \varphi_j'(z)$. Ist $\mathcal{K} \in L^2(M \times M')$ eine Funktion mit

$$\langle \mathcal{K}, \varphi_i \cdot \varphi_j' \rangle_{L^2(M\times M')} = 0$$

für alle $i, j \geq 0$, so ist $\mathcal{K} = 0$ fast überall (Hinweis unten)

(iii) Für $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi' \in C^\infty(M')$ gilt

$$\Delta_{g\times g'}(\varphi \cdot \varphi') = \Delta\varphi \cdot \varphi' + \varphi \cdot \Delta'\varphi'$$

wobei $\varphi \cdot \varphi' \in C^\infty(M \times M')$ wie in (ii) definiert ist und $\Delta_{g\times g'}$ den Laplace-Operator von $(M \times M', g \times g')$ bezeichnet. (Hinweis unten)

(iv) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert von $\Delta_{g\times g'}$ genau dann, wenn $\lambda = \mu + \mu'$ mit $\mu \in \operatorname{Spec} \Delta$, $\mu' \in \operatorname{Spec} \Delta'$. Der λ-Eigenraum von $\Delta_{g\times g'}$ besteht aus allen endlichen Summen $\sum_\alpha \psi_\alpha \cdot \psi_\alpha'$ mit $\psi_\alpha \in C^\infty(M)$, $\psi_\alpha' \in C^\infty(M')$, $\Delta\psi_\alpha = \nu_\alpha\psi_\alpha$, $\Delta'\psi_\alpha' = \nu_\alpha'\psi_\alpha$ und $\nu_\alpha + \nu_\alpha' = \lambda$ für alle α. (Hinweis unten).

<u>XI. 4.</u> <u>Sobolew-Räume</u> L^2_s <u>für beliebige</u> $s \in \mathbb{R}$: Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $s \in \mathbb{R}$. Setzen wir

$$L^2_s(M, g) = \{v \in C^\infty(M)^* : \sum_{i\geq 1} \mu_i^s |\hat{v}(i)|^2 < \infty\}$$

wobei μ_i (und φ_i) wie auf S. 291 ausgewählt sind.

In $L^2_s(M,g)$ haben wir das Skalarprodukt $\langle\,,\rangle_s'$ mit $\langle v, w\rangle_s' = \hat{v}(0)\hat{w}(0) + \sum_{i\geq 1} \mu_i^s \hat{v}(i)\hat{w}(i)$ und die entsprechende Norm $\|\cdot\|_s'$.

(i) $L^2_s(M,g)$ mit $\langle\,,\rangle_s'$ ist ein Hilbert-Raum; $L^2_s(M,g) \ni v \mapsto \hat{v}(0)\varphi_0 + \sum_{i\geq 1} \mu_i^{s/2}\hat{v}(i)\varphi_i \in L^2(M)$ definiert eine lineare Isometrie $L^2_s(M,g) \to L^2(M)$ (wobei die Reihe in L^2 konvergiert).

(ii) Für $s \in \mathbb{Z}$ ist $L^2_s(M,g)$ der Sobolew-Raum, die Normen $\|\cdot\|_s'$ und $\|\cdot\|_s$ äquivalent.

(iii) Ist $s, t \in \mathbb{R}$ und $s > t$, so $L^2_s(M,g) \subset L^2_t(M,g)$ und die Inklusionsabbildung ist ein kompakter Operator. (Hinweis unten).

<u>Hinweise</u>. Zu XI.1.(i): vgl. a) im Beweis von Lemma 17.

Zu XI. 1.(ii): Fall (i) mit $f+\varepsilon$ statt f und $\Phi(t,y,\cdot) + \varepsilon\gamma(t,y)$ statt $\Phi(t,y,\cdot)$, $\varepsilon > 0$ klein genug.

Zu XI. 1.(iii): (ii) für $f + t\varepsilon$ statt f und $\Phi(t,y,\cdot) + \varepsilon + \varepsilon\gamma(t,y)$ statt $\Phi(t,y,\cdot)$.

Zu XI. 2.(ii): $\delta_y \neq \delta_z$; so gibt es i mit $(\delta_y)^\wedge(i) \neq (\delta_z)^\wedge(i)$.

Zu XI. 2.(iii): vgl. Hinweis zu 2.(ii).

Zu XI. 2.(iv): Für $y \in M$ enthält die Folge $d\varphi_0(y), d\varphi_1(y), \ldots\ldots$ eine Basis $d\varphi_{i_1}(y), \ldots, d\varphi_{i_n}(y)$ von T_y^*M, $n = \dim M$. Also, in lokalen Koordinaten um y,

$$\det_{1\leq j,k\leq n}\left[\partial_k \varphi_{i_j}\right] \neq 0$$

in y, und deshalb auch in einer Umgebung U_y von y. Endlich viele dieser Umgebungen überdecken M. Die Vereinigung der entsprechenden endlichen Teilmengen von $\{\varphi_i : i \geq 0\}$ besteht aus den Koordinatenfunktionen einer euklidischen Immersion.

Zu XI. 2.(v): Immersionen (vgl. (iv)) sind lokal injektiv und $M\times M$ sowie $\mathcal{D}_M$ sind kompakt.

Zu XI. 2.(vi): Wegen (ii) und der Kompaktheit von $(M\times M)\setminus\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ wie in (v)) gibt es $\tilde{N}$ mit $\tilde{\Phi}(y) \neq \tilde{\Phi}(z)$ falls $y \in (M\times M)\setminus\mathcal{U}$.

Zu XI. 2.(vii): $N_0 = \max(N, \tilde{N})$, $N, \tilde{N}$ wie in (iv), bzw. (vi).

Zu XI. 3.(i): $\int_{M'} |\mathcal{K}(y,z)|^2 V_{g'}(z) < \infty$ für fast alle $y \in M$ (Satz von Fubini mit $\mathcal{K} \in L^2(M\times M')$). Also $\left(\int_{M'} |\mathcal{K}(y,z)\varphi(z)|\, V_{g'}(z)\right)^2 \leq \int_{M'} |\mathcal{K}(y,z)|^2 V_{g'}(z) \cdot \|\varphi\|^2_{L^2}$ und $\|\mathcal{K}\varphi\|^2_{L^2} \leq \|\varphi\|^2_{L^2}\, \|\mathcal{K}\|^2_{L^2}$.

Zu XI. 3.(ii): Es ist $\mathcal{K}\varphi_j' \perp_{L^2} \varphi_i$ für alle i, j, woher $\mathcal{K}\varphi_j' = 0$, d.h. $\mathcal{K}(y,\cdot) \perp_{L^2} \varphi_j'$, $j \geq 0$, $\mathcal{K}(y,\cdot) \in L^2$ für fast alle y (vgl. (i)), woher $\mathcal{K} = 0$ f.ü.

Zu XI. 3.(iii): Man verwende Produktkoordinaten.

Zu XI. 3.(iv): Die endlichen Summen der Produkte $\psi\cdot\psi'$, ψ Eigenfunktion von Δ, ψ' von Δ', liegen dicht in $L^2(M\times M')$; vgl. (ii), (iii).

Zu XI. 4.(iii). Die Folgen $\varphi_0, \mu_1^{-s/2}\varphi_1, \mu_2^{-s/2}\varphi_2, \ldots$ (bzw. $\varphi_0, \mu_1^{-t/2}\varphi_1, \mu_2^{-t/2}\varphi_2, \ldots$) sind Hilbert-Basen von L^2_s, bzw. L^2_t, und, für die Inklusionsabbildung J, $J(\mu_i^{-s/2}\varphi_i) = \mu_i^{(t-s)/2}(\mu_i^{-t/2}\varphi_i)$. Man verwende Aufgabe IX. 8.

14.5.84

Aufgabenliste XII

FUNDAMENTALGRUPPE

XII. 1. Sei M ein topologischer Raum, $y \in M$. Unter einer Schleife von M in y verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma: [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = y$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(M,y)$ die Menge aller solchen Schleifen. Zwei Schleifen $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{L}(M,y)$ heißen homotop (Bezeichnung: $\gamma_0 \sim \gamma_1$) falls es eine Kurve $[0,1] \ni t \mapsto h_t \in \mathcal{L}(M,y)$ von Schleifen gibt mit $h_0 = \gamma_0$, $h_1 = \gamma_1$ die stetig ist in dem Sinne, daß die Formel $h(t,s) = h_t(s)$ eine stetige Abbildung $h: [0,1] \times [0,1] \to M$ definiert. Unter dem Produkt der Schleifen $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{L}(M,y)$ verstehen wir die Schleife $\gamma_0 \cdot \gamma_1 \in \mathcal{L}(M,y)$ mit

$$(\gamma_0 \cdot \gamma_1)(s) = \begin{cases} \gamma_0(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

(i) Die Homotopie-Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{L}(M,y)$.

(ii) Ist $\gamma_0 \sim \gamma_0'$, $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ in $\mathcal{L}(M,y)$, so $\gamma_0 \cdot \gamma_1 \sim \gamma_0' \cdot \gamma_1'$. Deshalb kann man in der Menge der Äquivalenzklassen $\pi_1(M,y) = \mathcal{L}(M,y)/_\sim$ eine Produktoperation definieren, für die $[\gamma_0] \cdot [\gamma_1] = [\gamma_0 \cdot \gamma_1]$, wobei $[\gamma] \in \pi_1(M,y)$ die Äquivalenzklasse von $\gamma \in \mathcal{L}(M,y)$ ist.

(iii) Mit der obengenannten Produktoperation bildet $\pi_1(M,y)$ eine Gruppe, die man die Fundamentalgruppe von M in y nennt. Das neutrale Element von $\pi_1(M,y)$ ist die Äquivalenzklasse $[y]$ der konstanten Schleife y, während das Inverse $[\gamma]^{-1}$ von $[\gamma]$ die Äquivalenzklasse $[\gamma^{-1}]$ ist, wobei $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1-s)$. (Hinweis unten).

(iv) Für $y, z \in M$ und jede feste stetige Kurve $\gamma_0: [0,1] \to M$ mit $\gamma_0(0) = y$, $\gamma_0(1) = z$ ist die Abbildung

$$\Phi: \pi_1(M,z) \to \pi_1(M,y)$$

mit $\Phi([\gamma]) = [(\gamma_0 \cdot \gamma)\gamma_0^{-1}]$ sinnvoll definiert (Multiplikation und Inversion analog wie für

Schleifen). Außerdem ist Φ ein Gruppenisomorphismus. Also, falls M bogenzusammenhängend ist, hängt $\pi_1(M, y)$ bis auf Isomorphismus vom Punkt y nicht ab.
(Hinweis unten)

(v) Für topologische Räume M, N, $y \in M$ und eine stetige Abbildung $F : M \to N$, definiert die Formel $F_\#([\gamma]) = [F \circ \gamma]$ einen Gruppenhomomorphismus $F_\# : \pi_1(M, y) \to \pi_1(N, F(y))$. Es ist $(Id_M)_\# = Id_{\pi_1(M,y)}$ und, für stetige Abbildungen $F : M \to N$, $G : N \to P$, $(G \circ F)_\# = G_\# \circ F_\#$ (bei festem Punkt $y \in M$). Homöomorphe bogenzusammenhängende Räume haben also isomorphe Fundamentalgruppen.

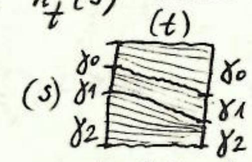
XII. 2. Ein (bogenzusammenhängender) topologischer Raum M heißt <u>einfach zusammenhängend</u> wenn $\pi_1 M = \{1\}$ (unter $\pi_1 M$ versteht man die "bis auf Isomorphismus" definierte Fundamentalgruppe $\pi_1(M, y)$, $y \in M$ beliebig). Jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend.

XII. 3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $y \in M$. Dann ist jede Schleife $\gamma \in \mathcal{L}(M, y)$ mit einer Schleife $\tilde{\gamma} \in \mathcal{L}(M, y)$ homotop, die aus endlich vielen geodätischen Strecken zusammengesetzt ist.
(Hinweis unten).

XII. 4. Die Sphären S^n, $n \geq 2$, sind einfach zusammenhängend (Hinweis unten).

Hinweise.

zu XII. 1. iii. Assoziativität: $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2 \sim \gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ durch die Homotopie $h_t(s)$ nach der Abbildung (eine stückweise lineare Formel)



zu XII. 1. iv: $\Phi^{-1}([\gamma]) = [(\gamma_0^{-1} \cdot \gamma)\gamma_0]$, $\gamma \in \mathcal{L}(M, y)$.

zu XII. 3. Man zerlegt γ in endlich viele Stücke, jedes von welchen in einer offenen Menge liegt, wo man beliebige zwei Punkte mit einer einzigen minimisierenden Geodätischen verbinden kann, die stetig von den Punkten abhängt. Ersetzt man jedes Stück von γ durch die Geodätische mit denselben Endpunkten, so hat man Stück für Stück eine Homotopie zwischen γ und der so entstandenen Kurve $\tilde{\gamma}$ (geodätische Verbindung).

zu XII. 4. Sei $\gamma \in \mathcal{L}(S^n, y)$, dann $\tilde{\gamma}$ wie in XII. 3. Also gibt es $z \in S^n$ mit $\tilde{\gamma}([0,1]) \subset S^n \setminus \{z\}$. Da $S^n \setminus \{z\}$ topologisch $\mathbb{R}^n$ ist, folgt $[\gamma] = [\tilde{\gamma}] = [y]$ aus XII. 2.

14.5.84

Aufgabenliste XIII
ÜBERLAGERUNGEN

XIII. 1. Seien $\tilde{M}, M$ topologische Räume, $\pi: \tilde{M} \to M$ eine stetige Abbildung. π heißt eine <u>Überlagerung</u> wenn es für jedes $y \in M$ eine Umgebung U von y in M und disjunkte offene Mengen $\tilde{U}_t \subset \tilde{M}$ gibt, $t \in T$, mit

(i) $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{t\in T} \tilde{U}_t$

(ii) Für jedes $t \in T$ ist $\pi: \tilde{U}_t \to U$ ein Homöomorphismus.

(a) Für $\pi, \tilde{M}, M$ wie oben und $y \in M$, sei $\mu(y) = \{$die Anzahl der Elemente in $\pi^{-1}(y)\} \in \{1,2,3,\ldots,\infty\}$. Die Funktion μ ist lokal konstant auf M. Also, falls M zusammenhängend ist, muß μ konstant sein; dann nennt man μ die Vielfachheit (Multiplizität) der Überlagerung π.

(b) Definieren wir den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ der Dimension n als Quotientenraum $S^n/_\sim$ mit $x \sim y$ falls $x = \pm y$ ($S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die Einheitssphäre), wobei man $\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie versieht. Dann ist die Quotientenprojektion $\pi: S^n \to \mathbb{R}P^n$ eine Überlagerung der Multiplizität 2.

(c) Die Abbildung $\pi: \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit $\pi(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ist eine Überlagerung der Multiplizität ∞.

XIII. 2. Sei $\pi: \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung, $y \in M$, $z \in \pi^{-1}(y)$ und $\gamma: [a,b] \to M$ eine stetige Kurve mit $\gamma(a) = y$. Dann gibt es genau eine stetige Kurve $L_z\gamma : [a,b] \to \tilde{M}$ mit $(L_z\gamma)(a) = z$ und $\pi \circ L_z\gamma = \gamma$.

(Hinweis unten).

XIII. 3. Sei $\pi: \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung, $y \in M$, $z \in \pi^{-1}(y)$. Sind $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : [0,1] \to \tilde{M}$ zwei stetige Kurven mit $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = z$ und $\pi(\tilde{\gamma}_0(1)) = \pi(\tilde{\gamma}_1(1)) = y'$, und sind die Kurven $\pi \circ \tilde{\gamma}_0$, $\pi \circ \tilde{\gamma}_1$ homotop (d.h. es gibt eine stetige Abbildung $[0,1] \times [0,1] \ni (t,s) \mapsto h_t(s) \in M$ mit $h_0 = \pi \circ \tilde{\gamma}_0$, $h_1 = \pi \circ \tilde{\gamma}_1$, $h_t(0) = y$, $h_t(1) = y'$ für alle t), so ist $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ und die Kurven $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ sind ebenfalls homotop.

(Hinweis unten).

XIII. 4. Sei $\pi: \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung, $y \in M$, $z \in \pi^{-1}(y)$. Dann ist der Gruppenhomomorphismus $\pi_\#: \pi_1(\tilde M, z) \to \pi_1(M,y)$ injektiv. (Hinweis unten)

XIII. 5. Seien $\pi, \tilde M, M, y, z$ wie in XIII. 4, $\tilde M$ bogenzusammenhängend. Dann gibt es eine Bijektion zwischen $\pi^{-1}(y)$ und der Restklassenmenge

$$\pi_1(M,y)/\pi_\#(\pi_1(\tilde M,z)).$$

(Hinweis unten).

XIII. 6. Für $n \geq 2$ hat $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ genau zwei Elemente: $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$. (Hinweis unten)

XIII. 7. Sei $\pi: \mathbb{R} \to S^1$ wie in XIII. 1. (c), so daß $\pi(0) = 1$. Definieren wir $\Psi: \mathcal{L}(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ durch $\Psi(\gamma) = (L_0\gamma)(1)/2\pi$. Dann

(i) $\Psi(\gamma)$ hängt nur von der Homotopieklasse von γ, d.h. es gibt $\Phi: \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ mit $\Phi([\gamma]) = \Psi(\gamma)$.

(ii) $\Phi: \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ ist ein Gruppenisomorphismus. (Hinweis unten)

XIII. 8. Für topologische Räume M, N und $y \in M$, $z \in N$ gibt es einen Isomorphismus $\pi_1(M \times N, (y,z)) \cong \pi_1(M,y) \times \pi_1(N,z)$.

Hinweise.

zu XIII. 2: Man zerlegt γ in endlich viele Stücke, die jeweils in Mengen U wie in XIII. 1 sitzen und konstruiert $L_z\gamma$ Stück für Stück. Eindeutigkeit: für zwei Vertreter $\tilde\gamma, \tilde{\tilde\gamma}$ von $L_z\gamma$, betrachte man $s_0 = \sup\{s \in [a,b] : \tilde\gamma = \tilde{\tilde\gamma}$ auf $[a,s]\}$.

zu XIII. 3: Sei $\tilde h_t = L_z h_t$, $t \in [0,1]$. Die Abbildung $(t,s) \mapsto \tilde h_t(s) \in \tilde M$ ist stetig (man zerlege $[0,1] \times [0,1]$ in kleine Rechtecke). Da $[0,1] \ni t \to \tilde h_t(1) \in \tilde M$ auf die konstante Kurve y projiziert, muß es auch konstant sein (Eindeutigkeit in XIII. 2), woher $\tilde\gamma_0(1) = \tilde h_0(1) = \tilde h_1(1) = \tilde\gamma_1(1)$, und $t \mapsto \tilde h_t$ ist eine Homotopie zwischen $\tilde\gamma_0$ und $\tilde\gamma_1$.

zu XIII. 4: ist $\gamma \in \mathcal{L}(\tilde M, z)$, $[\pi \circ \gamma] = [y]$ in M, so nach XIII. 3 mit $\tilde\gamma_0 = \gamma$, $\tilde\gamma_1 = z$, $[\gamma] = [z]$ in $\tilde M$.

zu XIII. 5: Definiere $F: \pi_1(M,y) \to \pi^{-1}(y)$, $F([\gamma]) = (L_z\gamma)(1)$ (sinnvoll definiert wegen XIII. 3). Nun $F([\gamma]) = z$ genau dann, wenn $[\gamma] \in \pi_\#(\pi_1(\tilde M, z))$ und, allgemeiner, $F([\gamma]) = F([\gamma']) \Leftrightarrow [\gamma] \cdot [\gamma'] \in \pi_\#(\pi_1(\tilde M, z))$. F ist surjektiv weil $\tilde M$ bogenzusammenhängend ist.

zu XIII. 6: Nach XIII. 1. (b), XIII. 5 und XII. 4, hat $\pi_1 \mathbb{R}P^n$ zwei Elemente.

zu XIII. 7: Nach dem Hinweis zu XIII. 5 ist Φ bijektiv. Ist nun $\gamma, \gamma' \in \mathcal{L}(S^1, 1)$, $(L_0\gamma)(1) = 2\pi k$, $(L_0\gamma')(1) = 2\pi l$, so $L_{2\pi k}\gamma' = L_0\gamma' + 2\pi k$ (Eindeutigkeit von L_y), woher

$$(L_0(\gamma \cdot \gamma'))(1) = (L_0\gamma \cdot L_{2\pi k}\gamma')(1) = (L_{2\pi k}\gamma')(1) = 2\pi(k+l),$$

d. h. $k + l = \Psi(\gamma \cdot \gamma') = \Psi(\gamma) + \Psi(\gamma')$.

17.5.84

Aufgabenliste XIV

XIV. 1. Sei M eine Mannigfaltigkeit, E eine Menge, $\pi: E \to M$ eine Abbildung, und sei jede "Faser" $E_y = \pi^{-1}(y)$ $(y \in M)$ mit der Struktur eines reellen (bzw. komplexen) Vektorraum einer festen Dimension m versehen. Nehmen wir an, daß man für jedes $y \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ von y und Abbildungen $\sigma_1, \dots, \sigma_m : U \to E$ finden kann, so daß $\pi \circ \sigma_\alpha = Id_U$, $\alpha = 1, \dots, m$, und, für $z \in U$, $\sigma_1(z), \dots, \sigma_m(z)$ ist eine Basis von E_z. Setzen wir außerdem voraus, daß für zwei Systeme $(U, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $(U', \sigma_{1'}, \dots, \sigma_{m'})$ aus diesem "Atlas",

$$\sigma_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha} \sigma_\alpha$$

wobei $A_{\alpha'}^{\alpha}$ C^∞-Funktionen mit reellen (bzw. komplexen) Werten in $U \cap U'$ sind. Dann gibt es auf E genau eine Mannigfaltigkeitsstruktur, so daß E mit π und den Vektorraumstrukturen der E_y zu einem Vektorbündel wird, für das die obengenannten $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ lokale C^∞-Schnitte sind.

XIV. 2. Das Möbiussche Band ist ein nicht orientierbares reelles Geradenbündel.

(Hinweis unten)

XIV. 3. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $y \in M$, $k \geq 1$, $\xi \in (\Lambda^1 M)_y$, $\omega \in (\Lambda^k M)_y$, $\xi \neq 0$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $\xi \wedge \omega = 0$

(ii) Es gibt $\eta \in (\Lambda^{k-1} M)_y$ mit

$$\omega = \xi \wedge \eta .$$

(Hinweis unten)

XIV. 4. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, $y \in M$, $F: M \setminus \{y\} \longrightarrow M$ die Inklusionsabbildung.

(i) Für $k \neq n-1$ ist die Abbildung $F^*: H^k M \to H^k(M \setminus \{y\})$ surjektiv.

(Hinweis unten)

(ii) Für $k \neq n$ ist die Abbildung $F^*: H^k M \to H^k(M \setminus \{y\})$ injektiv.

(Hinweis unten)

Somit ist die Abbildung $F^*: H^k M \to H^k(M \setminus \{y\})$

(a) Ein Isomorphismus, falls $k \neq n$, $k \neq n-1$

(b) Surjektiv für $k = n$, aber nicht immer bijektiv (Beispiel!)

(c) Injektiv für $k = n-1$, aber nicht immer bijektiv (Beispiel!) (Hinweise unten)

XIV. 5. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U, V \subset M$ offene (zusammenhängende) Untermannigfaltigkeiten mit $H^1 U \approx H^1 V = \{0\}$. Ist $U \cap V$ zusammenhängend, so $H^1 M = \{0\}$.

XIV. 6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung, $A \subset U$ ein (kompakter) Würfel. Für $x \in U$ betrachten wir das Differential dF_x als lineare Abbildung $dF_x: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $dF_x(X) = X^i \partial_i F(x)$ (kartesische Koordinaten in $\mathbb{R}^n$, wobei $\partial_i F$ die partielle Ableitung der $\mathbb{R}^m$-wertigen Funktion F ist). Unter $\|dF_x\|$ verstehen wir die Operator-Norm von dF_x (das ist sowieso unwesentlich, weil in endlich-dimensionalen Räumen alle Normen äquivalent sind).

(i) Für $x, y \in A$ ist $F(y) - F(x) =$

$$= \left(\int_0^1 dF_{x+t(y-x)}\, dt \right) \cdot (y-x)$$

(das Integral liegt im Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$).

(ii) Sei $c_0 = \sup_{x \in A} \|dF_x\|$. Dann $c_0 < \infty$ und

$$|F(y) - F(x)| \leq c_0 |y-x| \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

(iii) Es gibt eine stetige Funktion

$$\Psi: A \times A \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

($\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist der Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) mit

$$F(y) - F(x) - dF_x(y-x) = \Psi(x,y) \cdot (y-x)$$

für alle $x, y \in A$ und $\Psi(x,x) = 0$, $x \in A$.

Sei c die <u>Länge der Kante</u> von A. Für $s \in [0, c\sqrt{n}]$ setzen wir $\varphi(s) = \sup\{ \|\Psi(x,y)\| : x, y \in A, \|x-y\| = s\}$. Dann ist

$$\lim_{s \to 0} \varphi(s) = 0$$

und

$$\|\Psi(x,y)\| \leq \varphi(\|x-y\|)$$

für $x, y \in A$.

(iv) Zerlegen wir A in k^n fast disjunkte kongruente Würfel $A_1, \dots, A_{k^n}$ mit Kantenlänge $\frac{c}{k}$. Enthält einer dieser Würfel (z.B. A_α) einen kritischen Punkt x von F, so

(a) $F(A_\alpha)$ liegt im Ball vom Radius $\frac{c_0 c\sqrt{n}}{k}$ und Mittelpunkt $F(x)$ in $\mathbb{R}^m$,

(b) Das Bild der affinen Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto F(x) + dF_x(y-x) \in \mathbb{R}^m$$

liegt in einem $(m-1)$-dimensionalen affinen Unterraum H von $\mathbb{R}^m$. Jeder Punkt von $F(A_\alpha)$ ist von H um nicht mehr als $\varphi\left(\frac{c\sqrt{n}}{k}\right) \cdot \frac{c\sqrt{n}}{k}$ entfernt,

(c) Der Inhalt von $F(A_\alpha)$ in $\mathbb{R}^m$ ist nicht größer als $2V_{m-1}\, c_0^{\,m-1} (c\sqrt{n})^m \varphi\left(\frac{c\sqrt{n}}{k}\right) \cdot k^{-m}$, wobei V_{m-1} der $((m-1)$-dimensionale$)$ Inhalt des Einheitsballes in $\mathbb{R}^{m-1}$ ist.

(Hinweis unten)

(v) Sei $\mathrm{Krit}(F) \subset U$ die Menge der kritischen Punkte von F. Dann ist, für jedes k, der Inhalt von $F(A \cap \mathrm{Krit}(F))$ in $\mathbb{R}^m$ nicht größer als

$$2V_{m-1}\, c_0^{\,m-1} (c\sqrt{n})^m \varphi\left(\frac{c\sqrt{n}}{k}\right) k^{n-m}.$$

(vi) Ist $n \leq m$, so ist $F(A \cap \mathrm{Krit}(F))$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.

XIV. 7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung, $n \leq m$. Dann ist $F(\mathrm{Krit}(F))$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.
(Hinweis unten)

XIV. 8 (Satz von Sard für $n \leq m$). Seien M_1, M_2 Mannigfaltigkeiten mit abzählbaren Atlassen, $\dim M_1 \leq \dim M_2$, $F: M_1 \to M_2$ eine C^1-Abbildung. Dann ist $F(\mathrm{Krit}(F))$ eine Nullmenge in M_2.

XIV. 9. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $f: M \to \mathbb{R}^m$ eine Immersion.

(i) Das Differential von M kann als eine

C^∞-Abbildung $df: TM \to \mathbb{R}^m$ aufgefaßt werden.

(ii) Für einen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \neq 0$, sei $\pi_\xi : \mathbb{R}^m \to \xi^\perp$ die Orthogonalprojektion auf die zu ξ orthogonale Hyperebene $\xi^\perp \subset \mathbb{R}^m$. Dann ist $\pi_\xi \circ f$ eine Immersion genau dann, wenn ξ außerhalb des Bildes $df(TM)$ liegt.

(iii) Ist $m > 2n$, so läßt M auch eine Immersion $\tilde{f}: M \to \mathbb{R}^{m-1}$ zu.
(Hinweis unten).

XIV. 10. Für jede kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit M gibt es eine Immersion $f: M \to \mathbb{R}^{2n}$.

XIV. 11. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $f: M \to \mathbb{R}^m$ eine Einbettung.

(i) Sei $(M \times M) \setminus \mathrm{Diag}_M = \{(y,z) \in M \times M : x \neq y\}$. Die Abbildung $h: ((M\times M)\setminus \mathrm{Diag}_M) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $h(x,y,t) = t \cdot (f(x) - f(y))$ ist C^∞-differenzierbar. Für $\xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ist $\pi_\xi \circ f$ eine Einbettung genau dann, wenn ξ außerhalb $df(TM) \cup \mathrm{Bild}(h)$ liegt (π_ξ wie in XIV. 9. ii).

(ii) Ist $m > 2n+1$, so gestattet M auch eine Einbettung $\tilde{f}: M \to \mathbb{R}^{m-1}$. (Hinweis unten)

XIV. 12 (Schwache Form des Einbettungssatzes von Whitney). Jede kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit M besitzt eine Einbettung $f: M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

Hinweise.

zu XIV. 2: Orientierbare reelle Geradenbündel über kompakten Mannigfaltigkeiten sind trivial (man konstruiere einen Schnitt ohne Nullstellen).

zu XIV. 3. Man nehme eine Basis $\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{n}{\xi}$ von $(\Lambda^1 M)_y$ mit $\overset{1}{\xi} = \xi$ und drücke ω durch die $\overset{i_1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{i_k}{\xi}$ aus.

zu XIV. 4. i: Seien* $B' \subset \overline{B}' \subset B$ "konzentrische Bälle" um y, $\varphi \in C_0^\infty(M)$ mit $\varphi = 1$ nahe y, $\varphi = 0$ auf $M \setminus B'$. In $B \setminus \{y\}$ gibt es η mit $\omega = d\eta$ (da $H^k(B\setminus\{y\}) = H^k S^{n-1} = 0$ für $k \neq n-1$). Die Form $\varphi\eta$ verschwindet nahe y, ist C^∞ in $M \setminus \{y\}$ und $\tilde{\omega} = \omega - d(\varphi\eta)$, so daß $\tilde{\omega} \in Z^k M$, $F^*[\tilde{\omega}] = [\omega]$.

zu XIV. 4. ii: Sei $\omega \in Z^k M$, $\omega = d\eta$ in $M \setminus \{y\}$, B ein "Ball" um y, also $\omega = d\theta$ in B (man nehme $k \geq 1$). Also $d(\eta - \theta) = 0$ in $B \setminus \{y\}$, d. h. $\eta = \theta + d\zeta$ in $B \setminus \{y\}$ ($H^{k-1}(B\setminus\{y\}) = 0$). Wie auf S. 434 gibt es $\zeta_1 \in \Omega^{k-1}(M\setminus\{y\})$, $\zeta_2 \in \Omega^{k-1}B$ mit $\zeta = \zeta_2 - \zeta_1$ in $B\setminus\{y\}$. Also ist $\tilde{\eta} = \eta + d\zeta_1$ in $M \setminus\{y\}$, $\tilde{\eta} = \theta + d\zeta_2$ in B, global auf M definiert und $\omega = d\tilde{\eta}$.

zu XIV. 4 b, c. Beispiele: S^n, $\mathbb{R}^n$

zu XIV. 6. iv. c: Nach a), b) liegt $F(A_\alpha)$ im "Produkt" eines $(m-1)$-dimensionalen Balles mit Radius $c_0 c\sqrt{n}/k$ mit einem Intervall der Länge $2\varphi(\frac{c\sqrt{n}}{k}) \cdot \frac{c\sqrt{n}}{k}$.

zu XIV. 7. U ist eine Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Würfeln.

zu XIV. 9. iii: Da $\dim TM = 2n$, gibt es $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus df(TM)$; man nehme $\tilde{f} = \pi_\xi \circ f$.

zu XIV. 11. ii: $df(TM) \cup \mathrm{Bild}(h)$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$. Vgl. den Hinweis zu XIV. 9. iii.

---

* und sei $\omega \in Z^k(M \setminus \{y\})$