15. 11. 83

$\pi: P \to X$ ein $G$-Prinzipalbündel über $X$

$\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung von $G$ im Vektorraum $V$

$\underline{V} = P \times_\rho V$ das assoziierte Vektorraumbündel

Elemente von $\underline{V}$ sind Äquivalenzklassen von Paaren $p \times v \in P \times V$ bezüglich der Identifizierung $p \cdot g \times v = p \times gv$. Setzen wir nun voraus, daß $V$ ein $G$-invariantes (symmetrisches oder Hermitesches) Skalarprodukt $\langle , \rangle$ zuläßt (so ein $\langle , \rangle$ gibt es immer, wenn $G$ kompakt ist). Dann kann man in jeder Faser von $\underline{V}$ ein Skalarprodukt $\langle , \rangle$ durch $\langle p \times v, p \times w \rangle = \langle v, w \rangle$ definieren. Für $f, h \in \Gamma(\underline{V})$ ist $\langle f, h \rangle$ eine $C^\infty$-Funktion auf $X$. Sei außerdem $A$ ein $G$-Zusammenhang in $\underline{V}$: jedem Schnitt $f \in \Gamma(\underline{V}) = \Omega^0(X, \underline{V})$ wird $d_A f \in \Omega^1(X, \underline{V}) = \Gamma(T^*X \otimes \underline{V})$ zugeordnet mit der lokalen Darstellung (bezüglich Karte und Eichung) über $U \subset M$

$$p \times \sum_i \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i + A_i v \cdot dx_i \right)$$

wobei $p \times v = p(x) \times v(x)$ die lokale Darstellung von $f$ ist und $A_i : U \to \mathfrak{g} \xrightarrow[\rho]{} \mathrm{End}(V)$.

Für jeden Tangentialvektor $\xi \in T_x X$ kann man nun die <u>kovariante</u> <u>Ableitung</u>



$$\nabla^A_\xi f \in (\underline{V})_x$$

durch $\nabla^A_\xi f = d_A f(\xi, \cdot)$ definieren (d. h. bei lokaler Darstellung $f = p \times v$, $\nabla^A_\xi f = p(x) \times \sum_i \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} + A_i v \right) dx_i(\xi)$). Ist $\xi$ ein $C^\infty$-Vektor<u>feld</u> auf $X$ und $f \in \Gamma(\underline{V})$, so entsteht in dieser Weise

$$\nabla^A_\xi f \in \Gamma(\underline{V}).$$

Die Zuordnung $(\xi, f) \mapsto \nabla^A_\xi f$ ist bilinear und, für jede $C^\infty$-Funktion $\varphi$ auf $X$,

(*) $\qquad \nabla^A_{\varphi\xi} f = \varphi \nabla^A_\xi f, \quad \nabla^A_\xi (\varphi f) = \varphi \nabla^A_\xi f + d\varphi(\xi) \cdot f.$

Falls wir ein $G$-invariantes Skalarprodukt $\langle , \rangle$ in $V$ haben, sind die "Zusammenhangsformen" $A_i$ schief-symmetrisch (bzw. schief-Hermitesch). Daher folgt die "Leibniz-Regel"

(**) $\qquad (d\langle f, h \rangle)(\xi) = \langle \nabla^A_\xi f, h \rangle + \langle f, \nabla^A_\xi h \rangle$

für Vektorfelder $\xi$ auf $X$ und Schnitte $f, h$ von $\underline{V}$.

Ist $G = O(n)$ (bzw. $U(n)$), $V = \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$), $\rho$ die Standarddarstellung und $\langle , \rangle$ das kanonische Skalarprodukt in $V$, so befinden sich $G$-Zusammenhänge $A$ in $\underline{V}$ in eineindeutiger Korrespondenz mit bilinearen Operationen $(\xi, f) \to \nabla_\xi f$, die (*) und (**) erfüllen. Ist nämlich $f = p \times v$ (bezüglich Karte und Eichung), so ist die Zuordnung

$$(\xi, f) \to \nabla_\xi f - p \times \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i(\xi)$$

ein lokalen Schnitt von $T^*\mathcal{U} \otimes V^* \otimes V$ (weil sie bilinear ist bezüglich der Multiplikation mit $C^\infty$-Funktionen), woher sie die folgende Form hat:

$$(\xi, f) \to p \times \sum_i A_i v \cdot dx_i(\xi)$$

und die $A_i$ sind schief-symmetrisch wegen (**).

<u>Riemannsche</u> <u>Mannigfaltigkeiten</u>

Sei $X$ eine Mannigfaltigkeit, $m$ eine <u>Riemannsche</u> <u>Metrik</u> auf $X$: $m$ ordnet jedem Punkt $x \in X$ ein Skalarprodukt $m(x)$ in $T_x X$, das $C^\infty$-differenzierbar von $x$ abhängt (für beliebige $C^\infty$-Vektorfelder $\xi, \eta$ ist $\langle \xi, \eta \rangle = m(\xi, \eta)$ eine $C^\infty$-Funktion)

<u>Beispiele</u>. $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen translationsinvarianten Riemannschen Metrik; Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ mit den induzierten Metriken.

Sei nun $X$ eine <u>Riemannsche</u> <u>Mannigfaltigkeit</u> (eine Mannigfaltigkeit mit einer festen



Riemannschen Metrik $m$). Sei $\mathcal{U} \subset X$ eine Karte mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ die entsprechenden "Basisvektorfelder" auf $\mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ eine (z. B. stetige) Funktion mit kompaktem Träger, $m_{ij} = m(\partial_i, \partial_j)$. Dann ist

$$\int f \, d\mu = \int f \sqrt{\det[m_{ij}]} \, dx_1 \dots dx_n$$

von dem Koordinatensystem $x_1, \dots, x_n$ unabhängig (die Transformationsformel für das Lebesgue-Integral!). Stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ mit (beliebig großen) kompakten Trägern kann man als <u>endliche</u> Summen $f = \sum_\alpha f_\alpha$ darstellen, wobei die $f_\alpha$ stetig sind und Träger in Karten haben (man verwende eine endliche Zerlegung der Eins). Nun setzen wir $\int f \, d\mu = \sum_\alpha \int f_\alpha \, d\mu$ (Übung: dieser Wert ist von der verwendeten Zerlegung der 1 unabhängig). Ähnlich definiert man $\int f \, d\mu \in [0, \infty]$ für beliebige nicht-negative meßbare Funktionen $f$ auf $X$ (meßbar heißt Lebesgue-meßbar bezüglich beliebiger Koordinaten), somit das Maß $\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu$ jeder meßbaren Menge $A \subset X$ ($\chi_A$ ist ihre charakteristische Funktion); ferner, die Klasse $L^1(X, m)$ der integrierbaren

Funktionen $f: X \to \mathbb{C}$, das Integral $\int f d\mu \in \mathbb{C}$ für $f \in L^1(X, m)$, sowie die Räume $L^q(X, m)$, $q \geq 1$. $\mu$ nennt man das <u>Riemannsche</u> <u>Maß</u> von $X$ (genauer, von $(X, m)$).

Sei $P(X)$ die Menge aller Orthonormalbasen $e_1, \dots, e_n$ der Tangentialräume in allen Punkten der Riemannschen Mannigfaltigkeit $X$. Auf $P(X)$ operiert $O(n)$ von rechts:

$$(e_1, \dots, e_n) \cdot g = [e_1, \dots, e_n] \cdot g \text{ (Matrixmultiplikation)}$$

und man sieht leicht, daß

$$P(X) \to X \quad \text{(mit der natürlichen Projektion)}$$

ein $O(n)$-Prinzipalbündel ist (wodurch auch die Mannigfaltigkeitsstruktur auf $P(X)$ eindeutig bestimmt ist). Für $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(e_1, \dots, e_n) \in P(X)$ ist das Matrixprodukt

$$(e_1, \dots, e_n) \cdot v = [e_1, \dots, e_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

ein Tangentialvektor in $TX$, woher leicht folgt, daß $TX$ das assoziierte Vektorraumbündel $P(X) \times_\rho \mathbb{R}^n$ ist, wobei $n = \dim X$ und $\rho$ die kanonische Darstellung von $O(n)$ ist.

Sei $A$ ein beliebiger $O(n)$-Zusammenhang in $TX$. Man sieht leicht, daß die Formel

$$T^A(\xi, \eta) = \nabla^A_\xi \eta - \nabla^A_\eta \xi - [\xi, \eta]$$

($\xi, \eta$ Vektorfelder auf $X$) eine 2-Form



$T^A \in \Omega^2(X, TX)$ definiert, die man die <u>Torsionsform</u> von $A$ nennt.

<u>Satz</u>. Für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit $X$ gibt es genau einen $O(n)$-Zusammenhang $A$ in $TX$, der <u>torsionsfrei</u> ist ($T^A = 0$). Man nennt ihn den <u>Riemannschen</u> <u>Zusammenhang</u> von $X$ (genauer, von $(X, m)$).

<u>Beweis</u>. Es genügt, die Operation $(\xi, \eta) \to \nabla^A_\xi \eta$ zu finden, die bilinear ist und (*), (**), sowie $T^A = 0$ erfüllt. In einer Karte $U \subset X$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$, sei $\Gamma_{ijk} = \langle \nabla^A_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle$, wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Wegen (*) wird $\nabla^A$ über $U$ durch die Funktionen $\Gamma_{ijk}$ eindeutig bestimmt. (**) und $T^A = 0$ bedeuten, daß

$$\partial_k m_{ij} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji},$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$$

(mit $m_{ij} = m(\partial_i, \partial_j)$), was mit

$$\Gamma_{ijk} = \tfrac{1}{2}(\partial_i m_{jk} + \partial_j m_{ik} - \partial_k m_{ij})$$

gleichbedeutend ist. Unser Zusammenhang $A$ existiert also über $U$ und ist dort eindeutig bestimmt. Wegen der Eindeutigkeit, müssen die entsprechenden Zusammenhänge über verschiedenen Karten zusammenpassen, woher die globale Existenz.

Bemerkung. In den obigen Bezeichnungen, gilt

$$\sum_{s,k} m_{sk}^{-1} \partial_i m_{ks} = \partial_i \log \det [m_{ks}]$$

(Übung; man differenziere die Komposition

$(x_1, \dots, x_n) \to (m_{11}(x), m_{12}(x), \dots, m_{nn}(x)) \to$

$\to \det [m_{ks}(x)]$ nach der Kettenregel).

Deshalb

$$(***) \quad \sum_{s,k} m_{sk}^{-1} \Gamma_{kis} = \frac{\partial_i \sqrt{\det [m_{ks}]}}{\sqrt{\det [m_{ks}]}}.$$

Sei $\xi$ ein Vektorfeld. In $U$, $\xi = \sum_i \xi_i \partial_i$ mit $C^\infty$-Funktionen $\xi_i$. Also, $\nabla^A_{\partial_j} \xi = \sum_i (\xi_i \nabla_{\partial_j} \partial_i + \partial_j \xi_i \cdot \partial_i)$. Da $\nabla^A_{\partial_j} \partial_i = \sum_{s,k} \Gamma_{jis} m_{sk}^{-1} \partial_k$ (man nehme das Skalarprodukt von beiden Seiten mit $\partial_l$), gilt

$$\nabla^A_{\partial_j} \xi = \sum_k \Big( \sum_{i,s} \xi_i \Gamma_{jis} m_{sk}^{-1} + \partial_j \xi_k \Big) \partial_k .$$

Für jedes Vektorfeld $\xi$ ist $d_A \xi \in \Gamma(T^*X \otimes TX)$, also ein "Feld von Endomorphismen" von $TX$, so daß man die Spur, $Tr(d_A \xi)$ betrachten kann, die eine $C^\infty$-Funktion ist.



Man definiere die Divergenz $d_A^* \xi$ von $\xi$:

$$d_A^* \xi = - Tr(d_A \xi).$$

Also, in lokalen Koordinaten

$$d_A^* \xi = - \sum_{k,i,s} \xi_i \Gamma_{kis} m_{sk}^{-1} - \sum_k \partial_k \xi_k$$

und, wegen (***), für den Riemannschen Zusammenhang $A$,

$$(d_A^* \xi) \sqrt{\det [m_{ij}]} = - \sum_k \partial_k \big( \xi_k \sqrt{\det [m_{ij}]} \big).$$

Die Greensche Formel. Sei $\xi$ ein $C^\infty$-Vektorfeld mit kompaktem Träger auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit $X$. Dann ist

$$\int d_A^* \xi \cdot d\mu = 0$$

wobei $A$ der Riemannsche Zusammenhang ist.

Beweis. Sitzt der Träger von $\xi$ in einer Karte $U$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$, so

$$\int d_A^* \xi \cdot d\mu = \int d_A^* \xi \sqrt{\det [m_{ij}]}\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= - \sum_k \int \partial_k \big( \xi_k \sqrt{\det [m_{ij}]} \big)\, dx_1 \dots dx_n$$

wegen der obigen Formel, und somit

$\int d_A^* \xi \cdot d\mu = 0$, da die $\xi_k \sqrt{\det[m_{ij}]}$ kompakte Träger haben. Jedes $\xi$ mit kompaktem Träger ist eine Summe $\sum_\alpha \xi_\alpha$ von endlich vielen $C^\infty$-Feldern $\xi_\alpha$, deren Träger in Karten liegen, woher unsere Behauptung folgt.

Sei nun $E$ ein reelles (oder komplexes) Vektorbündel über einer <u>Riemannschen</u> Mannigfaltigkeit $X$ (mit der Metrik $m$). Jedem Punkt $x \in X$ sei ein Skalarprodukt $\langle , \rangle = \langle , \rangle_x$ (symmetrisch oder Hermitesch) in der Faser $E_x$ zugeordnet, das $C^\infty$-differenzierbar von $x$ abhängt, d. h. $\langle f, h\rangle \in C^\infty(X)$ (der Raum der $C^\infty$-Funktionen auf $X$) für alle $f, h \in \Gamma(E)$. Außerdem sei $\nabla^A$ eine <u>kovariante</u> <u>Ableitung</u> in $E$, d. h. eine bilineare Operation $\Gamma(TX) \times \Gamma(E) \ni (\xi, f) \to \nabla^A_\xi f \in \Gamma(E)$, die den Bedingungen $(*)$ sowie $(**)$ (bezüglich unseres Skalarproduktes $\langle , \rangle$) genügt. Alle diese Voraussetzungen sind z. B. erfüllt, wenn $E = \underline{V}$ das assoziierte Vektorraumbündel eines $G$-Prinzipalbündels $P \to X$ ist bezüglich einer Darstellung von $G$ im Vektorraum $V$, der ein $G$-invariantes Skalarprodukt zuläßt, und $\nabla^A$ die durch einen $G$-Zusammenhang $A$ in $\underline{V}$ bestimmte kovariante Ableitung ist. Betrachten wir, für $k = 0, 1, 2, \dots$, das Vektorraumbündel

$$E_k = \otimes^k T^*X \otimes E = \underbrace{T^*X \otimes \dots \otimes T^*X}_{k\text{-fach}} \otimes E$$



über $X$, wobei $E_0 = E$. In jedem Punkt $x \in X$ besteht die Faser $(E_k)_x$ aus allen $k$-linearen Abbildungen $T_xX \times \dots \times T_xX \to E_x$. Die $C^\infty$-Schnitte von $E_k$ sind also nichts anderes als Abbildungen $\Gamma(TX) \times \dots \times \Gamma(TX) \to \Gamma(E)$, die $k$-linear bezüglich der Multiplikation mit Funktionen in $C^\infty(X)$ sind.

In jeder Faser $(E_k)_x$ gibt es ein einziges (symmetrisches, bzw. Hermitesches) Skalarprodukt $\langle , \rangle$ mit

$$\langle \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_k \otimes f, \zeta_1 \otimes \dots \otimes \zeta_k \otimes h\rangle = \\ = m(\omega_1, \zeta_1) \cdot \ldots \cdot m(\omega_k, \zeta_k) \cdot \langle f, h\rangle$$

für beliebige $\omega_i, \zeta_i \in T_x^*X$, $f, h \in E_x$. Man bemerke, daß die Riemannsche Metrik einen Vektorbündelisomorphismus $TX \approx T^*X$ definiert, so daß wir in $T^*X$ das Skalarprodukt $m$ sowie die Riemannsche kovariante Ableitung $\overset{m}{\nabla}$ haben, die mit $\langle , \rangle = m$ die Leibniz-Regel $(**)$ erfüllt. Die Existenz und Eindeutigkeit von $\langle , \rangle$ in $(E_k)_x$ folgt daraus, das für beliebige Basen $\omega_1, \dots, \omega_n$ von $T_xX$ und $f_1, \dots, f_q$ von $E_x$, die Tensorprodukte $\omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_k} \otimes f_\alpha$ eine Basis von $(E_k)_x$ bilden; zerlegt man zwei Elemente von $(E_k)_x$ bezüglich dieser Basis, so erhält man eine explizite Formel für ihr Skalarprodukt. Erweitert man die $\omega_i$ und $f_\alpha$ zu lokalen Schnitten von $T^*X$ bzw. $E$, so sieht man, daß unser Skalarprodukt in $(E_k)_x$ $C^\infty$-differenzierbar von $x$

abhängt.

Nun können wir eine kovariante Ableitung $\nabla$ in $E_k$ definieren. Sei $\xi \in \Gamma(TX)$, $s \in \Gamma(E_k)$; d. h. $s$ ist eine $C^\infty(X)$-$k$-lineare Abbildung $\Gamma(TX)\times\dots\times\Gamma(TX) \to \Gamma(E)$. Dann ist $\nabla_\xi s \in \Gamma(E_k)$ durch die folgende Formel gegeben:

$$(\nabla_\xi s)(\xi_1,\dots,\xi_k) = \nabla^A_\xi (s(\xi_1,\dots,\xi_k)) - s(\overset{m}{\nabla}_\xi \xi_1, \xi_2,\dots,\xi_k) - s(\xi_1, \overset{m}{\nabla}_\xi \xi_2, \xi_3,\dots,\xi_k) - s(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}, \overset{m}{\nabla}_\xi \xi_k).$$

Man sieht leicht, das $\nabla$ tatsächlich eine kovariante Ableitung ist. Sie erfüllt die Leibniz-Regel für Tensorprodukte: $\nabla_\xi(\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_k\otimes f) = \overset{m}{\nabla}_\xi\omega_1\otimes\omega_2\otimes\dots\otimes\omega_k\otimes f + \dots + \omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\overset{m}{\nabla}_\xi\omega_k\otimes f + \omega_1\otimes\dots\otimes\omega_k\otimes\nabla^A_\xi f$ (wobei man bemerken muß, daß $d(\omega(\eta))(\xi) = (\overset{m}{\nabla}_\xi\omega)(\eta) + \omega(\overset{m}{\nabla}_\xi\eta)$ für $\omega\in\Gamma(T^*X)$ und $\xi,\eta\in\Gamma(TX)$, wegen der Leibniz-Regel (**) für $\overset{m}{\nabla}$ und unserer Identifizierung $TX \approx T^*X$). Ähnlich gilt $\nabla_\xi(\omega\otimes s) = \overset{m}{\nabla}_\xi\omega\otimes s + \omega\otimes\nabla_\xi s$ für $\omega\in\Gamma(T^*X)$, $s\in\Gamma(E_{k-1})$. Außerdem genügt $\nabla$ mit unseren Skalarprodukt $\langle,\rangle$ in $E_k$ der Leibniz-Regel (**): dies gilt sofort für Schnitte der Form $\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_k\otimes f$; sind $s_i$, $i=1,2,\dots,\dim(E_k)_x$ Schnitte mit der Eigenschaft, daß (**) für



jedes Paar $s_i, s_j$ erfüllt ist, so gilt es für $\sum_i \varphi_i s_i$, $\sum_j \psi_j s_j$ mit beliebigen $C^\infty$-Funktionen $\varphi_i,\psi_j$; daher folgt unsere Behauptung.

Jedem $s\in\Gamma(E_k)$ kann man also $\nabla s\in\Gamma(E_{k+1})$ zuordnen, wobei $(\nabla s)(\xi,\xi_1,\dots,\xi_k) = (\nabla_\xi s)(\xi_1,\dots,\xi_k)$ für $\xi,\xi_1,\dots,\xi_k\in\Gamma(TX)$. Ist also $f\in\Gamma(E)=\Gamma(E_0)$, so $\nabla f\in\Gamma(E_1)$, $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f)\in\Gamma(E_2),\dots,\nabla^k f = \nabla(\nabla^{k-1}f)\in\Gamma(E_k)$. Insbesondere hat man die nicht-negativen Funktionen $|\nabla^k f|^2 = \langle\nabla^k f,\nabla^k f\rangle$ auf $X$.

<u>Beispiel</u>. Sei $X = \mathcal{U}$ eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $E = \mathcal{U}\times V$ das triviale Bündel, wobei $V$ ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle,\rangle$ ist. Die Schnitte von $E$ sind also $C^\infty$-Abbildungen $\mathcal{U}\to V$. Sei außerdem $E$ mit der trivialen ("flachen") Kovarianten Ableitung $\nabla^A$ versehen: $\nabla^A_\xi f = 0$ für alle $\xi$ und alle konstanten Funktionen $f: \mathcal{U}\to V$. In $E$ betrachten wir das durch $\langle,\rangle$ definierte "konstante" Skalarprodukt, und in $\mathcal{U}$ die euklidische Metrik $m$. In den kartesischen Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ auf $\mathcal{U}$ ist $\Gamma_{ijk}=0$ (weil $\partial_i m_{jk} = \partial_i\delta_{jk}=0$), woher $\overset{m}{\nabla}_\xi\partial_i = 0$ für alle $\xi\in\Gamma(T\mathcal{U})$, sowie

$\overset{m}{\nabla}_\xi (dx_i) = 0$ (weil, unter dem $m$-Isomorphismus $TU \approx T^*U$, die 1-Form $dx_i$ dem Vektorfeld $\partial_i$ entspricht). Für $f \in \Gamma(E)$ und $\xi \in \Gamma(TU)$ ist $\nabla_\xi f = \sum_i \partial_i f \cdot dx_i(\xi)$ (die rechte Seite definiert nämlich auch eine kovariante Ableitung, die für die konstanten Basisschnitte den gleichen Wert 0 ergibt, wie $\nabla$), woher $\nabla f = \sum_i dx_i \otimes \partial_i f$; $\partial_i f : U \to V$ ist hier die partielle Ableitung der Funktion $f: U \to V$. Es folgt nun, durch Induktion, daß

$$\nabla^k f = \sum_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k} \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f .$$

Da die $dx_i$ $m$-orthonormal sind, haben wir auch

$$|\nabla^k f|^2 = \sum_{i_1, \dots, i_k} |\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f|^2 ,$$

wobei $|\cdot|$ die Norm des Vektorraumes $V$ ist.

Für $E, \nabla^A, \langle , \rangle, X, m$ wie zuvor, sei $k \geq 1$ und $s \in \Gamma(E_k)$, $s' \in \Gamma(E_{k-1})$. Wir definieren $\omega = s \cdot s' \in \Gamma(T^*X)$, indem wir jedem $\xi \in \Gamma(TX)$ $C^\infty(X)$-linear eine Funktion $\omega(\xi) \in C^\infty(X)$ zuordnen (hier sei $E$ ein reelles Bündel; die komplexe



Struktur, falls vorhanden, sollen wir vergessen). Wir setzen

$$\omega(\xi) = \langle \xi \otimes s', s \rangle .$$

Für $s \in \Gamma(E_k)$, $k \geq 1$, werden wir nun die Divergenz $d^*_\nabla s \in \Gamma(E_{k-1})$ definieren; dazu genügt es, für alle $s' \in \Gamma(E_{k-1})$ das Skalarprodukt $\langle d^*_\nabla s, s' \rangle$ $C^\infty(X)$-linear in $s'$ zu definieren. Sei

$$\langle d^*_\nabla s, s' \rangle = \langle s, \nabla s' \rangle + d^*_m (s \cdot s'),$$

wobei $s \cdot s' \in \Gamma(T^*X)$ als ein Vektorfeld betrachtet wird und $d^*_m$ die Divergenz in $(X, m)$ ist. Da $s \cdot \varphi s' = \varphi(s \cdot s')$ und $d^*_m(\varphi \xi) = \varphi\, d^*_m \xi - d\varphi(\xi)$ für $\xi \in \Gamma(TX)$, $\varphi \in C^\infty(X)$ (weil $\overset{m}{\nabla}(\varphi \xi) = \varphi \overset{m}{\nabla} \xi + d\varphi \otimes \xi$), sowie $\nabla(\varphi s') = \varphi \nabla s' + d\varphi \otimes s'$, folgt sofort die gewünschte $C^\infty(X)$-Linearität bezüglich $s'$. Somit ist $d^*_\nabla s \in \Gamma(E_{k-1})$ richtig definiert. Hat $s$ oder $s'$ kompakten Träger, so erhalten wir aus der Greenschen Formel

$$\int \langle s, \nabla s' \rangle \, d\mu = \int \langle d^*_\nabla s, s' \rangle \, d\mu .$$

Man kann also $d_\nabla^*$ den <u>formal adjungierten Operator</u> von $\nabla$ nennen.

Die Operatoren $\nabla: \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_{k+1})$ sowie die Skalarprodukte $\langle , \rangle$ in den $E_k$ hängen natürlich von $\nabla^A$, vom Skalarprodukt in $E$, sowie von der Riemannschen Metrik $m$ ab. Ersetzt man die letzteren durch andere Objekte der gleichen Art, so entstehen neue Operatoren $\nabla'$ sowie neue Skalarprodukte $\langle , \rangle'$. Ist $\mathcal{U} \subset M$ eine Trivialisierungsumgebung für $E$ und gleichzeitig ein Koordinatenbereich für $X$ (wo auch $T^*X$ trivialisiert werden muß), so gilt, für alle $k$ und alle $s \in \Gamma(E_k)$, in allen Punkten von $\mathcal{U}$,

$$\nabla' s = \nabla s + \sum_\alpha \langle s, Q_{\alpha k} \rangle h_{\alpha k}$$

wobei $Q_{\alpha k} \in \Gamma(E_k|_\mathcal{U})$, $h_{\alpha k} \in \Gamma(E_{k+1}|_\mathcal{U})$ von $s$ nicht abhängen. Die Abbildung

$$\Gamma(E_k) \ni s \to \nabla' s - \nabla s \in \Gamma(E_{k+1})$$

ist nämlich $C^\infty(X)$-linear. Sind die $h_{\alpha k}$ so gewählt, daß sie in jedem Punkt $x \in \mathcal{U}$ eine Basis von $(E_{k+1})_x$ bilden, so folgt unsere Formel aus der erwähnten **Linearität**. Deshalb gilt,



auf $\mathcal{U}$, für $f \in \Gamma(E)$ und alle $k \geq 1$,

$$(****) \qquad (\nabla')^k f = \nabla^k f + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_\alpha \langle \nabla^i f, Q_{k\alpha i} \rangle h_{k\alpha i}$$

mit $Q_{k\alpha i} \in \Gamma(E_i)$, $h_{k\alpha i} \in \Gamma(E_k)$ (Beweis: Induktion bezüglich $k$ mit Anwendung der Koordinatenformel $d\langle s, s' \rangle = \sum_j (\langle \nabla s, \partial_j \otimes s' \rangle + \langle s, \nabla_{\partial_j} s' \rangle) dx_j$, vgl. (**), für $s, s' \in \Gamma(E_i)$).

<u>Definition</u>. $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie oben. Sei $\Gamma_0(E)$ der Vektorraum aller $C^\infty$-Schnitte von $E$ mit kompakten Trägern. Für $f, h \in \Gamma_0(E)$ definieren wir das <u>Sobolewsche Skalarprodukt</u> der Ordnung $k \geq 0$:

$$\langle f, h \rangle_{L^2_k} = \sum_{r=0}^k \int \langle \nabla^r f, \nabla^r h \rangle d\mu \in \mathbb{C}.$$

$\langle , \rangle_{L^2_k}$ ist ein symmetrisches (bzw. Hermitesches) Skalarprodukt in $\Gamma_0(E)$. Es bestimmt die <u>Sobolew-Norm</u> $\|\cdot\|_{L^2_k}$ mit

$$\|f\|^2_{L^2_k} = \sum_{r=0}^k \int |\nabla^r f|^2 d\mu \in [0, \infty)$$

wobei $|s|^2 = \langle s, s \rangle$ für $s \in \Gamma_0(E_r)$ und $\nabla^0 f = f$.

Insbesondere ist $\|f\|_{L^2_0} = \|f\|_{L^2} = \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$. Außerdem definieren wir die $C^k$-<u>Norm</u> in $\Gamma_0(E)$, $k \geq 0$:

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{r=0}^{k} \sup_X |\nabla^r f|.$$

Insbesondere haben wir $\|f\|_{C^0} = \sup_X |f|$. Die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_{L^2_k}$ (bzw. bezüglich $\|\cdot\|_{C^k}$) ist also nichts anderes als die $L^2$-Konvergenz (bzw. gleichmäßige Konvergenz) der Schnitte in $\Gamma_0(E)$ mit Kovarianten Ableitungen bis zur Ordnung $k$. Für $f \in \Gamma_0(E)$ gilt offenbar $\|f\|_{L^2_k} \leq \|f\|_{L^2_l}$ falls $k \leq l$ und $\|f\|_{L^2_k} \leq (\mu(\operatorname{supp} f))^{1/2} \|f\|_{C^k}$.

<u>Beispiele</u>

1) Seien $X$, $m$ beliebig, $E = X \times \mathbb{R}$ (oder $X \times \mathbb{C}$) das triviale Geradenbündel über $X$ mit der "flachen" kovarianten Ableitung und dem konstanten Skalarprodukt $\langle\,,\,\rangle$; $f, h \in \Gamma_0(E)$ sind also Funktionen auf $X$ und $\langle f, h\rangle = f\bar{h}$.



In diesem Fall haben wir also die Sobolew- und $C^k$-Normen für Funktionen mit kompakten Trägern, d.h. für Elemente von $C_0^\infty(X)$. Insbesondere ist $\nabla^k f \in \Gamma_0(E_k) = \Gamma_0(T^*X \otimes \ldots \otimes T^*X)$.

2) Sei $X = U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $E = U \times V$ das triviale Bündel mit der flachen Kovarianten Ableitung und dem konstanten Skalarprodukt, $m$ die euklidische Metrik.
Dann ist, für $f \in \Gamma_0(E)$

$$\|f\|^2_{L^2_k} = \sum_{r=0}^{k} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n} \int \left| \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}} \right|^2 d\mu,$$

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{r=0}^{k} \sup_U \left( \sum_{i_1, \ldots, i_r} \left| \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}} \right|^2 \right)^{1/2},$$

wobei $\mu$ das Lebesguesche Maß ist.

LEMMA. Seien $E, X, \nabla^A, \langle\,,\,\rangle, m$ wie vorhin, $\varphi \in C_0^\infty(X)$ eine feste Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist der Operator

$$\Gamma_0(E) \ni f \to \varphi f \in \Gamma_0(E)$$

stetig bezüglich jeder Sobolew-Norm $\|\cdot\|_{L^2_k}$ sowie bezüglich jeder $C^k$-Norm in $\Gamma_0(E)$.

Beweis. Für $s \in \Gamma(E_k)$ und eine Permutation $\tau$ von $\{1,\dots,k\}$ sei $\tau(s) \in \Gamma(E_k)$ der Schnitt, der aus $s: \Gamma(TX)\times\dots\times\Gamma(TX) \to \Gamma(E)$ entsteht, indem man seine vektoriellen Argumente gemäß $\tau$ vertauscht. Dann ist $|\tau(s)| = |s|$ (weil $\langle\tau(s),\tau(s')\rangle = \langle s,s'\rangle$, was selbstverständlich ist für $s, s'$ der Form $\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_k\otimes f$), sowie $\nabla_\xi(\tau(s)) = \tau(\nabla_\xi s)$, $\xi \in \Gamma(TX)$, woher $\nabla(\tau(s)) = \tilde\tau(\nabla s)$ für eine Permutation $\tilde\tau$ von $\{1,\dots\dots,k+1\}$. Sei nun $\sigma \in \Gamma(\otimes^i T^*X)$, $s\in\Gamma(E_j)$.

Dann ist $\sigma\otimes s \in \Gamma(E_{i+j})$ und $|\sigma\otimes s| = |\sigma|\,|s|$ (Beweis wie für $|\tau(s)|=|s|$), sowie $\nabla_\xi(\sigma\otimes s) = \nabla_\xi\sigma\otimes s + \sigma\otimes\nabla_\xi s$ ($\nabla_\xi\sigma$ definiert wie in Beispiel 1, S. 17–18), d.h. $\nabla(\sigma\otimes s) = \tau\,\nabla\sigma\otimes s + \tau(\sigma\otimes\nabla s)$ mit einer Permutation $\tau$. Für $\varphi \in C_0^\infty(X)$ ist $\nabla(\varphi f) = \varphi\nabla f + d\varphi\otimes f = \varphi\nabla f + \nabla\varphi\otimes f$, $f\in\Gamma(E)$, woher, durch Induktion

$$\nabla^k(\varphi f) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{\alpha_i}\tau_{\alpha_i}(\nabla^{k-i}\varphi\otimes\nabla^i f)$$

für alle $k$ und gewisse (nur von $k, i$ abhängige) Permutationen $\tau_{\alpha_i}$. Deshalb



$$|\nabla^k(\varphi f)| \le C_k\Big(\sum_{i=0}^{k}|\nabla^i\varphi|\Big)\cdot\Big(\sum_{j=0}^{k}|\nabla^j f|\Big)$$

wobei $C_k \in \mathbb{R}$ nur von $k$ abhängt. Also

$$\|\varphi f\|_{L^2_k} \le \tilde C_k\,\|\varphi\|_{C^k}\,\|f\|_{L^2_k} \quad \text{und}$$

$$\|\varphi f\|_{C^k} \le \tilde{\tilde C}_k\,\|\varphi\|_{C^k}\,\|f\|_{C^k} \quad (C_k\in\mathbb{R} \text{ nur}$$

von $k$ abhängig), woraus unsere Behauptung folgt.

Die Sobolew- und $C^k$-Normen in $\Gamma_0(E)$ hängen von $\nabla^A$, $\langle,\rangle$ und $m$ ab. Seien $\nabla^{A'}$, $\langle,\rangle'$ und $m'$ andere Objekte der gleichen Art, die zum Skalarprodukt $\langle,\rangle'$ in $E_k$, sowie zu den entsprechenden Objekten $\nabla'$, $\mu'$, $\|\cdot\|'_{L^2_k}$ und $\|\cdot\|'_{C^k}$ führen. Nennen wir $U\subset X$ klein, wenn $U$ offen, $\overline{U}$ kompakt ist und es eine Karte $\tilde U \subset X$ gibt mit $\tilde U \supset \overline U$, auf welcher $E$ eine Trivialisierung (Eichung) zuläßt. Von nun an werden wir mit $C$ verschiedene positive Konstanten bezeichnet, die von dem auftretenden Schnitt $f$ unabhängig sind, dürfen aber von $X$, $m$, $U$, $E$, $\nabla^A$ etc. abhängen. Ist $\varphi\in C^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp}\varphi\subset U$, $U$ klein, so ist $\int|\varphi|\,d\mu' \le C\int|\varphi|\,d\mu$

(wie erwähnt, hängt $C$ von $X$, $\mathcal{U}$, $m$, $m'$ ab, jedoch nicht von $f$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$). Ebenso gilt, für $s \in \Gamma_0(E_K)$ mit $\operatorname{supp} s \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ klein, $|s|' \leq C|s|$ ($C$ darf von $\mathcal{U}$, $k$ usw., aber nicht von $s$ abhängen). Dies folgt daraus, daß $\{s \in E_k \text{ (Totalraum)} \mid \text{Projektion}(s) \in \overline{\mathcal{U}},\ |s| = 1\}$ eine kompakte Menge ist, auf welcher die Funktion $|\cdot|'$ stetig ist. Wegen (****) haben wir also

$$\|f\|'_{L^2_k} \leq C \|f\|_{L^2_k},$$

$$\|f\|'_{C^k} \leq C \|f\|_{C^k}$$

für alle $f \in \Gamma_0(E)$, deren Trägen in einer festen kleinen Menge $\mathcal{U}$ enthalten sind ($C$ hängt natürlich von $\mathcal{U}$ ab, aber nicht von $f$). Nach der Symmetrie unserer Voraussetzungen gelten ebenso die umgekehrten Abschätzungen: $\|f\|_{L^2_k} \leq C \|f\|'_{L^2_k}$ usw. Die Sobolew- und $C^k$-Normen von Schnitten, deren Trägen in einer festen kleinen Menge $\mathcal{U}$ liegen, hängen also, bis auf topologische Äquivalenz der Normen, von $\nabla^A$, $\langle\,,\rangle$ und $m$ nicht ab.



Um zu globalen Abschätzungen derart zu gelangen, werden wir das folgende Beweisschema verwenden:

LOKALISIERUNGSPRINZIP. Seien $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|''$ zwei "universell definierte" Normen in $\Gamma_0(E)$, die jedem System $(E, X, \nabla^A, \langle\,,\rangle, m)$ mit den obengenannten Eigenschaften zugeordnet sind* und sich äquivariant bezüglich der Einschränkungen auf offene Teilmengen von $X$, sowie bezüglich Bündelisomorphismen (mit beliebigen Basisdiffeomorphismen) transformieren. Setzen wir folgendes voraus:

(i) Für jede feste Funktion $\varphi \in C_0^\infty(X)$ ist der Operator $\Gamma_0(E) \ni f \to \varphi f \in \Gamma_0(E)$ bezüglich $\|\cdot\|'$, sowie bezüglich $\|\cdot\|''$, stetig.

(ii) $\|\cdot\|'$ (sowie $\|\cdot\|''$) ist bis auf Äquivalenz der Normen von $\nabla^A$, $\langle\,,\rangle$ und $m$ unabhängig, falls $X = B$ ein Ball in $\mathbb{R}^n$ ist und wir nur Schnitte von $E$ mit Trägern in einem festen kleineren Ball betrachten

* die Basisdimension $\dim X$ sowie die Faserdimension von $E$ müssen hier festgesetzt sein.

(iii) Ist $X = B$ ein Ball in $\mathbb{R}^n$, $m$ die euklidische Metrik, $E$ das triviale Bündel mit der flachen kovarianten Ableitung $\nabla^A$ und $\langle , \rangle$ konstant, so

$$\|f\|' \leq C \|f\|''$$

für alle $f \in \Gamma_0(E)$ und eine (von $f$ unabhängige) Konstante $C$.

Dann gilt folgendes: Für jedes "zulässige System" $(E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m)$ und jede relativ kompakte offene Menge $U \subset X$,

(a) Die Normen $\|\cdot\|'$ sowie $\|\cdot\|''$ für Schnitte von $E$, die Träger in $U$ haben, hängen, bis auf Äquivalenz, von $A, \langle , \rangle, m$ nicht ab.

(b) Es gibt eine Konstante $C$ mit

$$\|f\|' \leq C \|f\|''$$

für alle $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset U$.

Beweis. Sei $U \subset X$ relativ kompakt, $\varphi_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, q$) $C^\infty$-Funktionen auf $X$, deren Träger in "Bällen" $B_\alpha$ liegen ($\bar{B}_\alpha$ kompakt und in einem diffeomorphen Bild des euklidischen Balls enthalten), mit



$\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ auf $U$. Für $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset U$ gilt $f = \sum_\alpha f_\alpha$, $f_\alpha = \varphi_\alpha f$. Nach (ii) hängt $\|f_\alpha\|'$, sowie $\|f_\alpha\|''$, bis auf Äquivalenz nicht von $\nabla^A, \langle , \rangle, m$ ab. Also, da wegen (i)

$$\|f\|' \leq \sum_\alpha \|f_\alpha\|' = \sum_\alpha \|\varphi_\alpha f\|' \leq C \|f\|'$$

gilt das gleiche für $\|f\|'$ (und, ähnlich, für $\|f\|''$), was (a) beweist. Da $\|f_\alpha\|' \leq C \|f_\alpha\|''$ (vgl. (iii) und (ii)), gilt auch $\|f\|' \leq \sum_\alpha \|f_\alpha\|' \leq \tilde{C} \sum_\alpha \|f_\alpha\|'' = \tilde{C} \sum_\alpha \|\varphi_\alpha f\|'' \leq C \|f\|''$, woher unsere Behauptung folgt.

FOLGERUNG. Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $U \subset X$ relativ kompakt. Dann hängen die Sobolew- sowie $C^k$-Normen im Raum der Schnitte $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset U$, bis auf Äquivalenz, von $\nabla^A, \langle , \rangle, m$ nicht ab. Ist $X$ kompakt, so gilt das für die Sobolew- und $C^k$-Normen im ganzen Raum $\Gamma(E) = \Gamma_0(E)$.

Beweis. Lokalisierungsprinzip, Beh. (ii), $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_{L^2_k}$, $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_{C^k}$.

FOLGERUNG (Lemma von Sobolew). Seien $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle$, m wie vorhin. Ist $n = \dim X$, $U \subset X$ relativ kompakt und $k > \frac{n}{2} + r$ ($k, r \geq 0$ natürliche Zahlen), so gibt es $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{C^r} \leq C \|f\|_{L^2_k}$$

für alle $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset U$. Ist $X$ kompakt, so gilt dies, mit einer Konstante $C$, für alle $f \in \Gamma(E)$.

Beweis. Nach dem Lokalisierungsprinzip genügt es den Fall zu betrachten, wo $X = B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball mit Radius $R/2$ ist, $E = X \times V$ trivial, $\nabla^A$ flach, $\langle,\rangle$ konstant, m die euklidische Metrik. Sei $f \in \Gamma_0(E)$ (also eine $C^\infty$ Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to V$ mit $\operatorname{supp} f \subset B$), $v \in S^{n-1}$ ein Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in B$. Dann erhält man durch partielle Integration

$$f(x_0) = f(x_0) - f(x_0 + Rv) = -\int_0^R \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\, dt =$$



$$= -\int_0^R \left(\frac{d}{dt} t\right) \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\, dt = \int_0^R t \frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + tv)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^R t^2 \frac{d^3}{dt^3} f(x_0 + tv)\, dt = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_0^R t^{k-1} \frac{d^k}{dt^k} f(x_0 + tv)\, dt,$$

weil im Punkt $x_0 + Rv \notin B$, $f$ mit allen Ableitungen verschwindet. Da

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x_0 + tv) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} v_{i_1} \cdots v_{i_k} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x_0 + tv)$$

und $|v_i| \leq 1$, gilt deshalb

$$|f(x_0)| \leq \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \int_0^R t^{k-1} |\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x_0 + tv)|\, dt.$$

Integration der beiden Seiten über $v \in S^{n-1}$ ergibt

$$|f(x_0)| \cdot \operatorname{Vol}(S^{n-1}) \leq \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \int_{S^{n-1}} \int_0^R t^{k-1} |\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x_0 + tv)|\, dt\, dv$$

Sei $y = tv$. Wir haben hier also Integration in sphärischen Koordinaten, mit $dy = t^{n-1} dt\, dv$ und $t = |y|$:

$$|f(x_0)| \cdot \operatorname{Vol}(S^{n-1}) \leq \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \int_{|y| \leq R} |y|^{k-n} |\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x_0 + y)|\, dy.$$

Wegen der Schwarzschen Ungleichung,

$$|f(x_0)| \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(S^{n-1})} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \Big( \int\limits_{|y|\leq R} |y|^{2k-2n} \, dy \Big)^{1/2} \sum_{i_1, \dots, i_k} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f|^2 \Big)^{1/2} .$$

Das erste Integral hier ist endlich genau dann, wenn $2k-2n > -n$, d.h., $k > \frac{n}{2}$. In diesem Fall

$$\sup|f| \leq \tilde{C} \sum_{i_1, \dots, i_k} \|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f\|_{L^2} ,$$

woher unsere Behauptung für $r = 0$. Ist nun $k > \frac{n}{2} + r$, $0 \leq j \leq r$, so $k-j > \frac{n}{2} + r - j \geq \frac{n}{2}$, also, für die Funktion $\partial_{l_1} \cdots \partial_{l_j} f$ gibt die obige Ungleichung (mit $k-j$ statt $k$)

$$\sup|\partial_{l_1} \cdots \partial_{l_j} f| \leq \tilde{C} \sum_{i_1, \dots, i_{k-j}} \|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{k-j}} \partial_{l_1} \cdots \partial_{l_j} f\|_{L^2} \leq$$

$$\leq C \|f\|_{L^2_k} , \text{ für alle } j = 0, \dots, r ,$$

d.h.

$$\|f\|_{C^r} \leq C \|f\|_{L^2_k} \text{ falls } k > \frac{n}{2} + r .$$

Dies beweist unsere Behauptung.



Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $k \geq 0$. Der $k$-te <u>Sobolew-Raum</u> $L^2_k(E)$ (genauer, $L^2_k(E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m)$) ist die Komplettierung von $\Gamma_0(E)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^2_k}$. $L^2_k(E)$ ist also ein Hilbert-Raum, der $\Gamma_0(E)$ als einen dichten Unterraum enthält. Da $\|f\|_{L^2_k} \leq \|f\|_{L^2_l}$ für $k \leq l$ und $f \in \Gamma_0(E)$, kann die Identitätsabbildung $\Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E)$ eindeutig zu einem stetigen linearen Operator $L^2_l(E) \to L^2_k(E)$ fortgesetzt werden ($k \leq l$), den wir die <u>Inklusion</u> nennen. Außerdem ist $L^2_0(E) = L^2(E)$, der Raum aller meßbaren Schnitte $f$ von $E$ mit $\int |f|^2 < \infty$ ($f$ ist meßbar, wenn es bezüglich jeder Karte und Eichung als ein Tupel meßbarer Funktionen erscheint). $\Gamma_0(E)$ liegt nämlich dicht in $L^2(E)$, was leicht aus einem geeigneten "Lokalisierungsprinzip" folgt.

Für $k \le l$ ist die Inklusion $L^2_l(E) \to L^2_k(E)$ injektiv. Ist nämlich $f \in L^2_l(E)$, mit $L^2_k$-Bild Null, so gibt es $f_q \in \Gamma_0(E)$, die eine $L^2_l$-Cauchy-Folge bilden und gegen $f$ "abstrakt" konvergieren; also, $f_q \underset{L^2}{\to} s_0$, $\nabla f_q \underset{L^2}{\to} s_1$, $\dots$, $\nabla^l f_q \to s_l$ bei $q \to \infty$, für gewisse $L^2$-Schnitte $s_i$ von $E_i$, $i = 0, \dots, l$. Das $L^2_k$-Bild von $f$ gleich $0$ bedeutet $s_0 = s_1 = \dots = s_k = 0$ (fast überall). Für jedes $s' \in \Gamma_0(E_{k+1})$ ist also $\int \langle s', s_{k+1} \rangle = \lim_q \int \langle s', \nabla^{k+1} f_q \rangle = \lim_q \int \langle d^*_\nabla s', \nabla^k f_q \rangle = \int \langle d^*_\nabla s', s_k \rangle = 0$ (alle Integrale bezüglich $d\mu$), woher $s_{k+1} = 0$ in $L^2$, da $s' \in \Gamma_0(E_{k+1})$ dicht in $L^2(E_{k+1})$ liegen. Genauso beweist man, daß $s_{k+2} = \dots = s_l = 0$ fast überall; also, $\|f_q\|_{L^2_l} \to 0$, d.h. $f = 0$.



Die Elemente von $L^2_k(E)$ kann man also eindeutig (weil $L^2_k(E) \to L^2_0(E) = L^2(E)$ injektiv ist) als gewisse, sehr spezielle, $L^2$-Schnitte von $E$ auffassen; die injektiven Operatoren $L^2_l(E) \to L^2_k(E)$, $k \le l$, werden dabei zu mengentheoretischen Inklusionen.

Sei $C^r(E)$, $r \geq 0$, der Vektorraum aller $C^r$-differenzierbaren Schnitte von $E$. Aus dem Sobolewschen Lemma folgt, daß $L^2_k(E) \subset C^r(E)$ falls $k > \frac{n}{2} + r$, $n = \dim X$. Tatsächlich, sei $f \in L^2_k(E)$, $f_q \in \Gamma_0(E)$, $f_q \to f$ in $L^2_k(E)$ und $\varphi$ eine feste $C^\infty$-Funktion mit kompaktem Träger. Also $\varphi f_q \underset{L^2_k}{\to} \varphi f$. Nach dem Lemma von Sobolew, bilden die $\varphi f_q$ eine Cauchy-Folge bezüglich der $C^r$-Norm, also $\varphi f \in C^r(E)$. Da $\varphi \in C^\infty_0(X)$ beliebig war, folgt, daß $f \in C^r(E)$ (genauer: $f$ stimmt fast überall mit einem Element von $C^r(E)$ überein). Ist $X$ kompakt, so ist die $C^r$-Norm im ganzen Raum $C^r(E)$ definiert und macht ihn zu einem Banach-Raum; nach dem Lemma von Sobolew ist in diesem Fall ($X$ kompakt, $k > \frac{n}{2} + r$) die Inklusionsabbildung $L^2_k(E) \to C^r(E)$ sogar stetig.

Allgemein gilt

$$\Gamma_0(E) \subset \bigcap_{k \geq 1} L^2_k(E) \subset \Gamma(E);$$

falls $X$ kompakt, ist sogar $\Gamma(E) = \bigcap_{k \geq 1} L^2_k(E)$.

Um zu beweisen, daß ein Schnitt von $E$ $C^\infty$-differenzierbar ist, genügt also zu zeigen, daß er in allen Sobolew-Räumen $L^2_k(E)$ liegt.

Bemerkung. Ist $X$ kompakt, so hängt der Raum $L^2(E)$ von $\nabla^A, \langle,\rangle, m$ nicht ab (seine Norm, bis auf Äquivalenz, auch). Das gleiche gilt für alle $L^2_k(E)$.

LEMMA von Rellich. Seien $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle, m$ wie vorhin, $X$ kompakt, $0 \leq k < l$. Dann ist die Inklusion

$$L^2_l(E) \to L^2_k(E)$$

ein kompakter Operator.

Beweis. Wir können $l = k+1$ annehmen, weil die Hintereinanderschaltung eines kompakten Operators mit einem stetigen ein kompakter Operator



ist. Zunächst brauchen wir die folgenden lokalen Argumente:

a) Seien $f, h$ $L^1$-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, deren eine reellwertig ist, die andere Werte im endlich dimensionalen euklidischen Raum $V$ annimmt. Dann ist die Faltung $f * h : \mathbb{R}^n \to V$ mit

$$(f*h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, h(y)\, dy$$

(Lebesgue-Integral) auch integrierbar (wegen des Satzes von Fubini, da $\iint |f(x-y)\, h(y)|\, dy\, dx \leq \leq \|f\|_{L^1} \|h\|_{L^1} < \infty$). Falls $f$ beschränkt, gilt auch

$$\sup |f*h| \leq \sup |f| \cdot \|h\|_{L^1}.$$

Außerdem ist $f*h = h*f$ (man verwende den Koordinatenwechsel $y \to x-y$).

b) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball um $0$, $2B$ der zweimal größere Ball, beide mit der euklidischen Metrik versehen, $E_B = B \times V$ (bzw. $E_{2B} = 2B \times V$) das triviale Vektorraumbündel mit der flachen kovarianten Ableitung und dem konstanten Skalarprodukt. Für eine Funktion $\varphi \in C^\infty_0(B)$ und $f \in L^1(E_B)$, liegt $T_\varphi(f) = \varphi * f$ in $\Gamma_0(E_{2B})$ und der Operator

$$T_\varphi : L^1(E_B) \longrightarrow C_0^k(E_{2B})$$ (Raum der $C^k$-Schnitte von $E_{2B}$ mit kompakten Trägern)

ist kompakt bezüglich der $L^1$-Norm in $L^1(E_B)$ und der $C^k$-Norm in $C_0^k(E_{2B})$, $k \geqslant 0$.

Da $L^2_{k+1}(E_B) \subset L^2(E_B) \subset L^1(B)$ und $(C_0^k(E_{2B}), \|\cdot\|_{C^k}) \subset L^2_k(E_{2B})$ (alle Inklusionen stetig), ist auch

$$T_\varphi : L^2_{k+1}(E_B) \longrightarrow L^2_k(E_{2B})$$

ein kompakter Operator.

Tatsächlich, nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz, $\varphi * f$ ist, für jedes $k$, von der Klasse $C^k$ mit $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}(\varphi * f) = (\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}\varphi) * f$, woher, wegen a),

$\|\varphi * f\|_{C^k} \leq \|\varphi\|_{C^k}\|f\|_{L^1}$. Sei $f_q$ eine Folge mit $\|f_q\|_{L^1} \leq C$. Die Funktionen $\varphi * f_q$ haben Träger in der kompakten Menge $\operatorname{supp}\varphi + \overline{B} \subset 2B$ und sind $C^{k+1}$-beschränkt, also, nach dem Satz von Arzela, konvergiert eine Teilfolge von $\varphi * f_q$ bezüglich der $C^k$-Norm gegen einen $C^k$-Schnitt von $E_{2B}$ mit kompaktem Träger.



c) Die Inklusionsabbildung $J : L^2_{k+1}(E_B) \to L^2_k(E_B)$ ($E_B$ wie in b)) ist kompakt. Beweis: Es genügt die Kompaktheit von $J : L^2_{k+1}(E_B) \to L^2_k(E_{2B})$ zu zeigen. Sei $\varphi \in C_0^\infty(B)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ und, für $\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Dann ist $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B)$ und, nach b), ist $T_{\varphi_\varepsilon} : L^2_{k+1}(E_B) \to L^2_k(E_{2B})$ kompakt. Wir behaupten, daß es $C = C_{B,k,n} \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^2_k} \leq C\cdot\varepsilon\|\varphi\|_{L^2}\|f\|_{L^2_{k+1}}$$

für alle $f \in \Gamma_0(E_B)$ (daraus folgt sofort, daß $J$ kompakt ist, weil $T_{\varphi_\varepsilon} \to J$ bei $\varepsilon \to 0$, bezüglich der Operator-Norm). Es ist nämlich, wegen a), $(\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x) = (f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_B [f(x - \varepsilon u) - f(x)]\varphi(u)\,du$ (man verwende den Koordinatenwechsel $u = y/\varepsilon$). Da

$$f(x - \varepsilon u) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x - t\varepsilon u)\,dt =$$

$$= -\varepsilon \sum_i u_i \int_0^1 \partial_i f(x - t\varepsilon u)\,dt$$ und

$|u_i| \leq \tilde{C}$ für $u \in B$, haben wir, wegen der Schwarzschen Ungleichung,

$$|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leq \tilde{C}\varepsilon \sum_i \int_B \int_0^1 |\partial_i f(x-t\varepsilon u)\varphi(u)|\,dt\,du \leq$$

$$\leq \tilde{C}\varepsilon \|\varphi\|_{L^2} \sum_i \Big( \int_B \int_0^1 |\partial_i f(x-t\varepsilon u)|^2 dt\,du \Big)^{1/2}.$$

Daher $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|^2_{L^2} = \int_{2B} |\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)|^2 dx \leq$

$$\leq \tilde{\tilde{C}}^2 \varepsilon^2 \|\varphi\|^2_{L^2} \sum_i \int_{2B} \int_0^1 \int_B |\partial_i f(x - t\varepsilon u)|^2 dt\,du\,dx.$$

Integriert man im letzten Integral zunächst bezüglich $dx$, so

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^2} \leq \tilde{\tilde{\tilde{C}}}\varepsilon \|\varphi\|_{L^2} \sum_i \|\partial_i f\|_{L^2}.$$

Hier sind $\tilde{C}$, $\tilde{\tilde{C}}$, $\tilde{\tilde{\tilde{C}}}$ verschiedene, von $B, n, k$ abhängige Konstanten. Nun, für $0 \leq j \leq k$,

$$\|\partial_{\ell_1} \cdots \partial_{\ell_j}(\varphi_\varepsilon * f - f)\|_{L^2} = \|\varphi_\varepsilon * \partial_{\ell_1} \cdots \partial_{\ell_j} f - \partial_{\ell_1} \cdots \partial_{\ell_j} f\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{\tilde{C}}}\varepsilon \|\varphi\|_{L^2} \sum_i \|\partial_i \partial_{\ell_1} \cdots \partial_{\ell_j} f\|_{L^2},$$ woher

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^2_k} \leq C\varepsilon \|\varphi\|_{L^2} \|f\|_{L^2_{k+1}}$$

womit c) bewiesen ist.



Aus c) folgt nun das Lemma von Rellich: Seien $\rho_\alpha$ $C^\infty$-Funktionen auf der kompakten Mannigfaltigkeit $X$, die eine endliche Zerlegung der Eins bilden, und deren Träger in kleinen diffeomorphen Bildern $B_\alpha$ von Bällen liegen. Sei $f_q \in L^2_{k+1}(E)$ eine beschränkte Folge; man kann $f_q \in \Gamma_0(E) = \Gamma(E)$ annehmen, indem man $\tilde{f}_q \in \Gamma(E)$ findet mit $\|f_q - \tilde{f}_q\|_{L^2_{k+1}} < 1/q$. Die Folge $\rho_\alpha f_q$ ist beschränkt in $L^2_{k+1}(E_{B_\alpha})$ und, nach c), gibt es eine Teilfolge $f_{q'}$ von $f_q$, für die $\rho_\alpha f_{q'}$ eine Cauchy-Folge in $L^2_k(E_{B_\alpha})$ ist (jedes $\alpha$). Dann ist $f_{q'} = \sum_\alpha \rho_\alpha f_{q'}$ eine Cauchy-Folge in $L^2_k(E)$, woher unsere Behauptung.

<u>Beispiel einer Anwendung</u> des Lemma von Rellich. Sei $X$ eine <u>kompakte</u> Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\Delta: C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ der <u>Laplace-Operator</u> von $X$ mit $\Delta\varphi = d^*_m d\varphi$ (wobei $m$ die Metrik, $d^*_m$ die Divergenz ist und man $d\varphi$ als ein Vektorfeld betrachtet). Sind $\varphi, \psi \in C^\infty(X)$ und wendet man die Formel $d^*_m(\varphi\xi) = \varphi\, d^*_m \xi - d\varphi(\xi)$ ($\xi \in \Gamma(TX)$) auf $\xi = d\psi$, so sieht man daß, wegen der Greenschen Formel,

$$\int \varphi \Delta\psi \, d\mu = \int \langle d\varphi, d\psi \rangle d\mu .$$

Also, $\Delta$ ist $L^2$-symmetrisch: $\int \varphi \Delta \psi \, d\mu = \int \psi \Delta \varphi \, d\mu$, woraus folgt, das die Eigenräume von $\Delta$ paarweise $L^2$-orthogonal sind. Außerdem ist

$$\int \varphi \Delta \varphi \, d\mu = \int |d\varphi|^2 d\mu \geq 0 .$$

Daher sind alle Eigenwerte $\lambda$ von $\Delta$ nicht-negativ, und die Eigenfunktionen für $\lambda = 0$ sind die Konstanten allein. Wir behaupten, daß es für jedes $a > 0$ nur endlich viele Eigenwerte $\lambda$ von $\Delta$ gibt mit $\lambda \leq a$ und daß, für jeden Eigenwert, der entsprechende Raum der Eigenfunktionen endlich dimensional ist. Wäre diese Behauptung nicht erfüllt, so könnten wir eine unendliche Folge $\varphi_q \in C^\infty(X)$ finden mit $\Delta \varphi_q = \lambda_q \varphi_q$, $0 \leq \lambda_q \leq a$, die ein $L^2$-orthonormales System bildet. Da, für jedes $\varphi$,

$$\|\varphi\|^2_{L^2_1} = \|\varphi\|^2_{L^2} + \|d\varphi\|^2_{L^2} = \|\varphi\|^2_{L^2} + \langle \varphi, \Delta\varphi \rangle_{L^2} \leq$$

$$\leq \|\varphi\|^2_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} \|\Delta\varphi\|_{L^2} \leq \left( \|\varphi\|_{L^2} + \|\Delta \varphi\|_{L^2} \right)^2,$$

ist unsere Folge $\varphi_q$ $L^2_1$-beschränkt. Nach dem Lemma von Rellich besitzt sie eine $L^2$ konvergente Teilfolge, was der $L^2$-Orthonormalität der $f_q$ widerspricht (da $\|f_q - f_{q'}\|_{L^2} = \sqrt{2}$ für $q \neq q'$). Somit ist unsere Behauptung bewiesen.



Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin*, $f \in \Gamma_0(E)$, $k \geq 0$. Für jedes $h \in \Gamma_0(E)$ ist $\left| \int \langle f, h \rangle d\mu \right| \leq \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2_k}$. Die Zuordnung $h \to \int \langle f, h \rangle d\mu$ ist also ein stetiges Linearfunktional auf $\Gamma_0(E)$ mit der $L^2_k$-Norm. Seine Funktionalnorm bezeichnen wir mit $\|f\|_{L^2_{-k}}$. Es ist also $\|f\|_{L^2_{-k}} \leq \|f\|_{L^2}$ und

$$\|f\|_{L^2_{-k}} = \sup \left\{ \frac{\left| \int \langle f, h \rangle d\mu \right|}{\|h\|_{L^2_k}} : h \in \Gamma_0(E),\ h \text{ nicht identisch } 0 \right\}.$$

Somit sind die Sobolew-Normen $\|\cdot\|_{L^2_k}$ in $\Gamma_0(E)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert und $\|f\|_{L^2_k} \leq \|f\|_{L^2_l}$ falls $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \leq l$. Für $\varphi \in C_0^\infty(X)$, $f, h \in \Gamma_0(E)$ ist $\left| \int \langle \varphi f, h \rangle d\mu \right| = \left| \int \langle f, \varphi h \rangle d\mu \right| \leq \|f\|_{L^2_{-k}} \|\varphi h\|_{L^2_k} \leq C \|\varphi\|_{C^k} \|f\|_{L^2_{-k}} \|h\|_{L^2_k}$ $(k \geq 0)$, d. h. $\|\varphi f\|_{L^2_{-k}} \leq C \|\varphi\|_{C^k} \|f\|_{L^2_{-k}}$. Bedingung (i) des Lokalisierungsprinzips gilt also für $\|\cdot\|_{L^2_{-k}}$. Sind $\nabla^{A'}, \langle , \rangle', m'$ andere Objekte der gleichen Art, so gibt es einen Bündelisomorphismus $T$ von $E$ mit $\int \langle f, h \rangle' d\mu' = \int \langle f, Th \rangle d\mu$

* $E$ wird als ein reelles Bündel betrachtet

für alle $f, h \in \Gamma_0(E)$. Also, $|\int \langle f, h\rangle' d\mu'| \leq \|f\|_{L^2_{-k}} \|Th\|_{L^2_k} \leq C\|f\|_{L^2_{-k}} \|h\|'_{L^2_k}$ falls supp $h$ in einer festen kleinen Menge $U$ liegt, woher $\|f\|'_{L^2_{-k}} \leq C\|f\|_{L^2_{-k}}$ wenn supp $f \subset U$ $(k \geq 0)$. Wegen des Lokalisierungsprinzips sind also die Sobolew-Normen $\|\cdot\|_{L^2_{-k}}$, $k \geq 0$, für Schnitte mit Trägern in einer festen relativ kompakten Menge $U \subset X$, bis auf Äquivalenz, von $\nabla^A$, $\langle , \rangle$ und $m$ unabhängig. Ist $X$ kompakt, so gilt das im ganzen Raum $\Gamma_0(E) = \Gamma(E)$.

Bezeichnen wir mit $L^2_{-k}(E)$ die Komplettierung von $\Gamma_0(E)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^2_{-k}}$ $(k \geq 0)$. Die Abbildung von $\Gamma_0(E)$ in den dualen Raum $(L^2_k(E))^*$, die jedem $f$ das Funktional $h \to \int \langle f, h\rangle d\mu$ zuordnet, ist isometrisch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^2_{-k}}$ in $\Gamma_0(E)$ und der Funktionalnorm in $(L^2_k(E))^*$; außerdem ist ihr Bild dicht in $(L^2_k(E))^*$ (da $L^2_k(E)$ ein Hilbert-Raum ist, bedeutet dies genau, daß $h \in L^2_k(E)$ verschwindet genau dann, wenn $\int \langle f, h\rangle d\mu = 0$ für alle $f \in \Gamma_0(E)$). Wir haben also eine kanonische lineare Isometrie $L^2_{-k}(E) \approx (L^2_k(E))^*$ $(k \geq 0)$. Die Identitätsabbildung von $\Gamma_0(E)$ hat, für $k > l \geq 0$, eine stetige Fortsetzung $L^2_{-l}(E) \to L^2_{-k}(E)$,



die offenbar, bei den obigen Identifizierungen, dem dualen Operator zur Inklusion $L^2_k(E) \to L^2_l(E)$ entspricht. Die letztere ist kompakt,* injektiv und hat dichtes Bild (da $\Gamma_0(E) \subset L^2_l(E)$); diese drei Eigenschaften besitzt also auch die duale Inklusion $L^2_{-l}(E) \to L^2_{-k}(E)$. Deshalb, für beliebige $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k > l$, ist die Inklusion $L^2_k(E) \to L^2_l(E)$ kompakt,* injektiv und hat dichtes Bild.

LEMMA (die Sobolew-Ungleichung für drei Sobolew-Normen). Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $X$ kompakt, $k, l, r \in \mathbb{Z}$ mit $k > l > r$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $C(\varepsilon) > 0$ mit

$$\|f\|_{L^2_l} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2_k} + C(\varepsilon) \|f\|_{L^2_r}$$

für alle $f \in L^2_k(E)$.

<u>Beweis</u>. Seien $(V_i, \|\cdot\|_i)$ Banach-Räume, $F: V_1 \to V_2$ linear und kompakt, $H: V_2 \to V_3$ linear, stetig und injektiv, $\varepsilon > 0$. Wir behaupten, daß es $C(\varepsilon) > 0$ gibt mit $\|F(f)\|_2 \leq \varepsilon \|f\|_1 + C(\varepsilon) \|H(F(f))\|_3$ für alle $f \in V_1$. Sonst gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $f_q \in V_1$ (die man normieren kann: $\|f_q\|_1 = 1$) mit

$$\|F(f_q)\|_2 > \varepsilon_0 + q \|H(F(f_q))\|_3, \quad q \geq 1.$$

* Nur unter der Voraussetzung, daß $X$ kompakt ist!

Da $\|F(f_q)\|_2 \leq \|F\|_{\text{Operator-Norm}}$, ist $\|H(F(f_q))\|_3 \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Andererseits besitzt $F(f_q)$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $h$, woher $H(h) = 0$, also $h = 0$. Deshalb ist für diese Teilfolge $\|F(f_q)\|_2 \to 0$, was der obigen Ungleichung ($\|F(f_q)\|_2 > \varepsilon_0$) widerspricht.

Seien nun $E$ und $E'$ zwei Vektorraumbündel über derselben Mannigfaltigkeit $X$. Unter einer gemeinsamen Trivialisierungskarte für $E$ und $E'$ verstehen wir eine Karte $\mathcal{U} \subset X$ mit festen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ und mit festen Trivialisierungen $E/_{\mathcal{U}} \approx \mathcal{U} \times V$, $E'/_{\mathcal{U}} \approx \mathcal{U} \times V'$ von $E$ und $E'$ über $\mathcal{U}$. In $\mathcal{U}$ kann man also die Schnitte von $E$ (bzw. von $E'$) als Funktionen der Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ mit Werten im Vektorraum $V$ (bzw. $V'$) betrachten.

<u>Definition.</u> Ein Differentialoperator $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ der Ordnung $k \geq 0$ ist eine lineare Abbildung $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Trivialisierungskarte $\mathcal{U} \subset X$ gibt es $C^\infty$-Funktionen

$$a_{i_1 \dots i_k}, a_{i_1 \dots i_{k-1}}, \dots, a_{ij}, a_i, a : \mathcal{U} \to \operatorname{Hom}(V, V'), \quad 1 \leq i_s, i, j \leq n = \dim X,$$

mit



$$Pf(x) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x) \cdot \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x) + \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} a_{i_1 \dots i_{k-1}}(x) \cdot \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} f(x) + \dots$$

$$\dots + \sum_{i,j} a_{ij}(x) \cdot \partial_i \partial_j f(x) + \sum_i a_i(x) \cdot \partial_i f(x) + a(x) \cdot f(x), \quad \text{für } x \in \mathcal{U} \text{ und } f \in \Gamma_0(E),$$

wobei wir $f, \partial_i f, \dots, \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ (bzw. $Pf$) als Funktionen mit Werten in $V$ (bzw. in $V'$) betrachten. In dieser lokalen Darstellung von $P$ darf man immer voraussetzen, daß die $a_{i_1 \dots i_s}$ ($1 \leq s \leq k$) bezüglich $i_1, \dots, i_s$ symmetrisch sind, denn diese Symmetrie gilt für $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f$. Unter der Symmetrievoraussetzung sind die $a_{i_1 \dots i_s}$ ($0 \leq s \leq k$) durch $P$ und die Trivialisierungskarte eindeutig bestimmt (da man in jedem $x$ die in $i_1, \dots, i_s$ symmetrischen Werte von $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f(x)$, $0 \leq s \leq k$, beliebig vorschreiben kann, indem man als $f$ Polynome nimmt).

Betrachten wir nun dieselbe Karte $\mathcal{U}$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ und mit <u>anderen</u> Trivialisierungen von $E$ und $E'$ über $\mathcal{U}$. Der Schnitt, der in den ursprünglichen Trivialisierungen als $f$

(bzw. $Pf$) erschien, hat nun die Darstellung $\tilde{f}$ (bzw. $\widetilde{Pf}$) mit $f(x) = g(x)\cdot\tilde{f}(x)$ (bzw., $Pf = g'(x)\cdot\widetilde{Pf}(x)$), wobei $g: U \to Aut(V)$ (bzw. $g': U \to Aut(V')$) die Übergangsfunktion ist. Wegen der Leibniz-Regel ist

$$\widetilde{Pf}(x) = \sum_{i_1,\dots,i_k} g'(x)^{-1}\cdot a_{i_1\dots i_k}(x)\cdot g(x)\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k}\tilde{f}(x) +$$

$+$ (eine Kombination von $\partial_{j_1}\dots\partial_{j_s}\tilde{f}$, $0 \le s < k$).

Man kann also die höchsten Koeffizienten $a_{i_1\dots i_k}$ als Bündelhomomorphismen $E/_U \to E'/_U$ betrachten. Ist, umgekehrt, $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n$ ein anderes Koordinatensystem in (einer offenen Teilmenge von) $U$, und $\partial_i = \sum_j G_{ij}\tilde{\partial}_j$ mit $\tilde{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}$ ($[G_{ij}]: U \to GL(n,\mathbb{R})$, $n = \dim X$, ist eine "Übergangsfunktion" für $TX$), so ist

$$Pf = \sum_{\substack{i_1\dots i_k\\ j_1\dots j_k}} G_{i_1j_1}\dots G_{i_kj_k}a_{i_1\dots i_k}\tilde{\partial}_{j_1}\dots\tilde{\partial}_{j_k}f +$$

$+$ (Terme niedrigerer Ordnungen), d. h. die höchsten Koeffizienten transformieren sich bei Koordinatenwechsel wie $\tilde{a}_{j_1\dots j_k} = \sum_{i_1\dots i_k} G_{i_1j_1}\dots G_{i_kj_k}a_{i_1\dots i_k}$, wonach $S_P = \sum_{i_1\dots i_k} a_{i_1\dots i_k}\partial_{i_1}\otimes\dots\otimes\partial_{i_k} \in \underbrace{TX\otimes\dots\otimes TX}_{k}\otimes$ $\otimes\, Hom(E,E')$ Koordinaten- (und Trivialisierungs-)



-unabhängig ist. Da $S_P$ in den ersten $k$ "Stellen" symmetrisch ist, können wir genauso gut statt $S_P \in \Gamma(\underbrace{TX\otimes\dots\otimes TX}_{k}\otimes Hom(E,E'))$ den Schnitt $\sigma_{P,k}$ des Bündels $\pi^* Hom(E,E')$ über $T^*X$

($\pi: T^*X \to X$ ist die Projektion) betrachten, wobei

$$\sigma_{P,k}(\eta) = S_P(\underbrace{\eta,\dots,\eta}_{k\text{-fach}}).$$

$\sigma_{P,k}$ nennt man <u>das</u> $k$-<u>Symbol</u> <u>des</u> <u>Differentialoperators</u> $P$ <u>der</u> <u>Ordnung</u> $k$. Natürlich, ist $P$ dann auch ein Differentialoperator der Ordnung $k+1$ mit $\sigma_{P,k+1} = 0$. Ist zufällig auch $\sigma_{P,k} = 0$ identisch, so ist $P$ (in jeder lokalen Darstellung) ein Operator der Ordnung $k-1$ und hat das $(k-1)$-Symbol $\sigma_{P,k-1}$. Für jeden Differentialoperator $P \neq 0$ kann man in dieser Weise die kleinste Zahl $k$ zuordnen, die als Ordnung von $P$ auftritt. Dann ist $\sigma_{P,k} \neq 0$ irgendwo (sonst hätte $P$ auch die Ordnung $k-1$) und man nennt $\sigma_P = \sigma_{P,k}$ das <u>Symbol</u> des Differentialoperators $P \neq 0$; $k$ nennt man die wesentliche Ordnung von $P$. Dem trivialen Operator $P=0$ ordnet man das Symbol $\sigma_P = 0$ und jede Ordnung zu (oder die "wesentliche" Ordnung $-\infty$).

Das obige Argument zeigt auch daß, um zu prüfen ob $P$ ein Differentialoperator ist, man nicht alle gemeinsamen Trivialisierungskarten zu betrachten braucht, sondern nur eine Menge von solchen Karten, die ganz $X$ überdecken.

Die Summe zweier Differentialoperatoren $\Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ist offenbar ein Differentialoperator. Sind $P_1: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$, $P_2: \Gamma_0(E') \to \Gamma_0(E'')$ Differentialoperatoren, so ist $P_2 \circ P_1: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E'')$ ein Differentialoperator, dessen wesentliche Ordnung die Summe der wesentlichen Ordnungen von $P_1$ und $P_2$ ist*, und $\sigma_{P_2 \circ P_1}(\eta) = \sigma_{P_2}(\eta) \circ \sigma_{P_1}(\eta)$ (dies folgt leicht aus der Leibniz-Regel).

Beispiele. 1) Sei $T: E \to E'$ ein Bündelhomomorphismus, $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ mit $Ps = Ts$. Dann ist $P$ ein Differentialoperator der Ordnung $0$ mit $\sigma_{P,0} = T$ (von $\eta \in T^*X$ unabhängig).

2) Seien $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle, m$ wie vorhin, $k \geq 0$. Dann ist $\nabla: \Gamma_0(E_K) \to \Gamma_0(E_{K+1})$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $1$ mit

* falsch! Sie kann auch kleiner sein.



dem Symbol $\sigma_\nabla(\eta)(s) = \eta \otimes s$ ($\eta \in T^*X$, $s \in E_K$). Ist nämlich $U$ eine Trivialisierungskarte für $E$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ und $\nabla': \Gamma(E_K|_U) \to \Gamma(E_{K+1}|_U)$ die durch die euklidische Metrik in $U$ und die flache kovariante Ableitung im trivialen Bündel $E|_U$ bestimmte Operation, so $\nabla s = \nabla' s + T s$ in $U$, für $s \in \Gamma(E_K)$, wobei $T: E_K|_U \to E_{K+1}|_U$ ein Bündelhomomorphismus ist (siehe Seite 15). $\nabla$ wird also ein Differentialoperator sein, wenn $\nabla'$ es ist, und dann $\sigma_\nabla = \sigma_{\nabla'}$. Da aber $\nabla' s = \sum_i dx_i \otimes \partial_i s$ (Seite 13), haben wir

$\nabla' s = \sum_i a_i \cdot \partial_i s$, wobei $a_i: E_K|_U \to E_{K+1}|_U$ der Bündelhomomorphismus mit $a_i(s) = dx_i \otimes s$ ist. Nun ist $S_{\nabla'}(\eta)(s) = \sum_i \partial_i(\eta)\, a_i(s) = \sum_i \partial_i(\eta)\, dx_i \otimes s = \eta \otimes s$, woher unsere Behauptung. Die Komposition $\nabla^k = \nabla \circ \dots \circ \nabla: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E_K)$ ist deshalb ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k$, mit $\sigma_{\nabla^k}(\eta)(s) = \underbrace{\eta \otimes \dots \otimes \eta}_{k} \otimes s$. Ist außerdem $E'$ ein anderes Vektorbündel über $X$ und $S \in \Gamma(\underbrace{TX \otimes \dots \otimes TX}_{k} \otimes \mathrm{Hom}(E, E'))$ ein Schnitt, der bezüglich seiner $k$ $TX$-Argumente symmetrisch ist, so kann man $S$ als einen Bündelhomomorphismus $E_k \ni f \to S\cdot f \in E'$ betrachten (mit $S\cdot f = \omega_1(\xi_1)\cdot\ldots\cdot\omega_k(\xi_k)\cdot T(s)$ falls $S = \xi_1\otimes\ldots\otimes\xi_k\otimes T$, $f = \omega_1\otimes\ldots\otimes\omega_k\otimes s$, $\xi_i\in TX$, $\omega_i\in T^*X$, $s\in E$, $T\in Hom(E,E')$), also als einen Differentialoperator $\Gamma_0(E_k)\to\Gamma_0(E')$ der Ordnung 0. Deshalb ist die Komposition $P:\Gamma_0(E)\to\Gamma_0(E')$ mit $Pf = S\cdot\nabla^k f$ ein Differentialoperator der Ordnung $k$ mit $\sigma_{P,k}(\eta)(f) = S\cdot(\eta\otimes\ldots\otimes\eta\otimes f)$, d. h. mit $S_P = S$ (da $\sigma_{P,k}$ und $S_P$ einander eindeutig bestimmen, werden wir auch $\sigma_{P,k} = S$ schreiben).

Ist $P:\Gamma_0(E)\to\Gamma_0(E')$ ein beliebiger Differentialoperator der Ordnung $k$, so kann man $P$ als die Summe

$$Pf = S_k\cdot\nabla^k f + S_{k-1}\cdot\nabla^{k-1}f + \ldots + S_1\nabla f + S_0 f$$

darstellen (bei festen $\nabla^A, \langle,\rangle, m$), wobei $S_i\in\Gamma(\underbrace{TX\otimes\ldots\otimes TX}_{i}\otimes Hom(E,E'))$ bezüglich der $TX$-"Stellen" symmetrisch ist, $i=0,\ldots,k$, und $\sigma_{P,k} = S_k$. Setzt man nämlich $S_k =$



$=\sigma_{P,k}$, so hat der Operator $P_{k-1}f = Pf - S_k\cdot\nabla^k f$ das Symbol $\sigma_{P_{k-1},k} = 0$, d. h. $P_{k-1}$ hat auch die Ordnung $k-1$. Für $S_{k-1} = \sigma_{P_{k-1},k-1}$ hat der Operator $P_{k-2}f = Pf - S_k\cdot\nabla^k f - S_{k-1}\cdot\nabla^{k-1}f$ die Ordnung $k-2$, usw., d. h., man kann die $S_i$ induktiv definieren.

3) Seien $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle, m$ wie vorhin, $k\geq 0$. Wir behaupten, daß die Divergenz $d^*_\nabla:\Gamma_0(E_{k+1})\to\Gamma_0(E_k)$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 1 ist, dessen Symbol $\sigma_{d^*_\nabla}(\eta)$ in jedem $\eta\in T^*X$ das negative der adjungierten Abbildung $(\sigma_\nabla(\eta))^*$ zu $\sigma_\nabla(\eta)$ ist, d. h.

$$\langle\sigma_{d^*_\nabla}(\eta)(s), s'\rangle = -\langle s, \eta\otimes s'\rangle$$

für $s\in E_{k+1}$, $s'\in E_k$. Dazu genügt es zu beweisen daß, bei jedem festen Schnitt $s'\in\Gamma(E_k)$, die Formel $P_{s'}(s) = \langle d^*_\nabla s, s'\rangle$ einen Differentialoperator $P_{s'}:\Gamma_0(E_{k+1})\to C^\infty_0(X)$ der Ordnung 1 definiert mit $\sigma_{P_{s'},1}(\eta)(s) = -\langle s,\eta\otimes s'\rangle$.

Zunächst bemerken wir, daß die Riemannsche

Divergenz $d_m^*: \Gamma_0(TX) \to C_0^\infty(X)$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 1 ist mit $\sigma_{d_m^*}(\eta)(\xi) = -\eta(\xi)$, $\eta \in T^*X$, $\xi \in TX$ (weil $d_m^*$ die Komposition $-Tr \circ \nabla^m$ ist und $Tr(\eta \otimes \xi) = \eta(\xi)$). Da $P_{s'}(s) = \langle s, \nabla s'\rangle + d_m^*(s\cdot s')$ (Seite 14), ist $P_{s'}$ die Summe des Operators $s \to \langle s, \nabla s'\rangle$ der Ordnung 0 und des Operators $\tilde{P}_{s'}(s) = d_m^*(s\cdot s')$, der (als Komposition von $s \to s\cdot s'$ mit $d_m^*$) die Ordnung 1 und das Symbol $\sigma_{\tilde{P}_{s'},1}(\eta)(s) = -\eta(s\cdot s')$ hat. Wegen der Definition von $s\cdot s'$ (Seiten 13-14) ist $-\eta(s\cdot s') = -\langle s, \eta\otimes s'\rangle$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

4) Seien $E, E'$ Vektorbündel über $X$ mit festen Skalarprodukten $\langle , \rangle$, bzw. $\langle , \rangle'$ und $m$ eine Riemannsche Metrik auf $X$ (statt $m$ brauchen wir eigentlich nur das Riemannsche Maß $d\mu$), $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator. Man sagt, daß eine lineare Abbildung $P^*: \Gamma_0(E') \to \Gamma_0(E)$ <u>formal</u>



<u>adjungiert</u> zu $P$ ist, wenn

$$\int \langle Ps, s'\rangle' d\mu = \int \langle s, P^*s'\rangle d\mu$$

für alle $s \in \Gamma_0(E)$, $s' \in \Gamma_0(E')$.

a) Die formal adjungierte Abbildung, falls sie existiert, ist durch $P$ eindeutig bestimmt (die Definition!).

b) Besitzen $P_1, P_2: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ formal adjungierte Abbildungen $P_1^*, P_2^*$, so gilt dies auch für $P_1 + P_2$ und $(P_1+P_2)^* = P_1^* + P_2^*$.

c) Sind $P_1: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$, $P_2: \Gamma_0(E') \to \Gamma_0(E'')$ ($E''$ mit dem Skalarprodukt $\langle , \rangle''$) Differentialoperatoren, für die $P_1^*, P_2^*$ existieren, so hat auch $P_2 \circ P_1$ die formal adjungierte Abbildung $(P_2\circ P_1)^* = P_1^* \circ P_2^*$.

d) Ist $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator der Ordnung 0, d. h. $Ps = Ts$ für einen Bündelhomomorphismus $T: E \to E'$, so ist $P^*s' = T^*s'$ (der Bündelhomomorphismus $T^*: E' \to E$, "punktweise" adjungiert zu $T$). $P^*$ ist ein Differentialoperator der Ordnung 0 mit $\sigma_{P^*,0}(\eta) = T^* = (\sigma_{P,0}(\eta))^*$ für alle $\eta \in T^*X$.

e) Wählt man zu $\langle , \rangle, m$ eine kovariante Ableitung $\nabla^A$ in $E$ wie vorhin, so hat, für jedes $k \geq 0$, $P = \nabla : \Gamma_0(E_k) \to \Gamma_0(E_{k+1})$ den formal adjungierten Operator $d_\nabla^* : \Gamma_0(E_{k+1}) \to \Gamma_0(E_k)$ (bezüglich der natürlichen Skalarprodukte in $E_k, E_{k+1}$, vgl. Seite 14), der die gleiche Ordnung 1 hat wie $\nabla$ und das Symbol $\sigma_{d_\nabla^*,1}(\eta) = -(\sigma_{\nabla,1}(\eta))^*$ (Seite 48).

f) <u>Satz</u>: Jeder Differentialoperator $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ der Ordnung $k$ besitzt die adjungierte Abbildung $P^*$, die ebenfalls ein Differentialoperator der Ordnung $k$ ist und das Symbol $\sigma_{P^*,k}(\eta) = (-1)^k (\sigma_{P,k}(\eta))^*$ $(\eta \in T^*X)$ hat.

<u>Beweis</u>. Dies folgt direkt aus b), c), d), e) und aus der Darstellung $Pf = S_k \cdot \nabla^k f + \ldots + S_0 f$ (Seite 47).

<u>Definition</u>. Seien $E, E'$ Vektorbündel über $X$, $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator, $P \neq 0$.
(i) Man sagt, daß $P$ injektives (bzw. surjektives) Symbol hat, wenn für jedes $x \in X$ und jedes $\eta \in T_x^*X$ mit $\eta \neq 0$, $\sigma_P(\eta) \in$



$\in \mathrm{Hom}(E_x, E'_x)$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.
(ii) $P$ heißt elliptisch, wenn für jedes $x \in X$ und jedes $\eta \in T_x^*X$ mit $\eta \neq 0$, $\sigma_P(\eta) \in \mathrm{Hom}(E_x, E'_x)$ ein Isomorphismus ist (d. h. wenn $P$ gleichzeitig injektives und surjektives Symbol hat).

<u>Beispiele</u>. a) Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $k \geq 0$. Der Operator $\nabla : \Gamma_0(E_k) \to \Gamma_0(E_{k+1})$ hat injektives Symbol. Insbesondere gilt dies für $d = \overset{m}{\nabla} : C_0^\infty(X) \to \Gamma_0(T^*X) \approx \Gamma_0(TX)$.

b) Seien $V, V'$ endlich dimensionale reelle Vektorräume, $T: V \to V'$ linear. Ist $T$ injektiv (bzw. surjektiv), so ist $T^*$ surjektiv (bzw. injektiv) und $T^*T \in \mathrm{Aut}(V)$ (bzw. $TT^* \in \mathrm{Aut}(V')$). Seien nun $E, E'$ Vektorbündel mit Skalarprodukten über der Riemannschen Mannigfaltigkeit $X$, $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator mit injektivem Symbol (bzw. mit surjektivem Symbol, oder elliptisch). Dann hat $P^*$ surjektives Symbol (bzw. injektives Symbol, oder ist elliptisch). Ist das Symbol von $P$ injektiv (bzw. surjektiv), so ist der Operator $P^*P$ (bzw. $PP^*$) elliptisch (und <u>formal</u> <u>selbstadjungiert</u>, d. h. z. B. $(P^*P)^* = P^*P$, weil $P^{**} = P$).

c) Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $k \geq 0$. Der Operator $P = d_\nabla^* \circ \nabla : \Gamma_0(E_K) \to \Gamma_0(E_K)$ der Ordnung 2 ist elliptisch (wegen a) und b)). Da die Riemansche Divergenz $d_m^* : \Gamma_0(TX) \to C_0^\infty(X)$ der formal adjungierte Operator zu $d = \nabla^m$ ist (vgl. Seite 36), muß auch der Laplace Operator $\Delta = \Delta_m : C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$ elliptisch sein. $\Delta_m$, sowie $d_\nabla^* \circ \nabla$, ist auch formal selbstadjungiert.

d) Die Kompositionen von elliptischen Operatoren sind elliptisch.

Weitere Beispiele von Differentialoperatoren: Sei $P \to X$ ein $G$-Prinzipalbündel, $\rho : G \to Aut(V)$ eine Darstellung, $\underline{V} = P \times_\rho V$ das assoziierte Vektorraumbündel, $A$ ein Zusammenhang in $\underline{V}$. Wir kennen den Operator $d_A : \Omega_0^p(X, \underline{V}) \to \Omega_0^{p+1}(X, \underline{V})$, $p \geq 0$, wobei $\Omega_0^p(X, \underline{V}) = \Gamma_0(\Lambda^p(T^*X) \otimes \underline{V})$ mit der lokalen Darstellung $d_A \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{i=1}^n (\partial_i a_{i_1 \dots i_p} + A_i \cdot a_{i_1 \dots i_p}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ falls $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, d. h.



$d_A \omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge \partial_i \omega + T\omega$, wobei $T$ ein Bündelhomomorphismus ist. Insbesondere ist $d_A = d$ das gewöhnliche äußere Differential, wenn $G = \{1\}$ (dann ist $A_i = T = 0$). Wir behaupten, daß $d_A$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 1 ist mit dem Symbol $\sigma_{d_A}(\eta)(\omega) = \eta \wedge \omega$, $\eta \in T^*X$, $\omega \in \Lambda^p(T^*X) \otimes \underline{V}$. Es ist nämlich $d_A \omega = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \partial_i \omega + T\omega$, wobei $a_i(\omega) = dx_i \wedge \omega$. Also ist $S_{d_A} = \sum_{i=1}^n \partial_i \otimes a_i$ und $S_{d_A}(\eta)(\omega) = \sum_{i=1}^n \partial_i(\eta) a_i(\omega) = \sum_{i=1}^n \partial_i(\eta) dx_i \wedge \omega = \eta \wedge \omega$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin. Wir definieren die ($C^\infty$-) Konvergenz in $\Gamma_0(E)$ folgendermaßen: $f_q \xrightarrow[q \to \infty]{} f$ in $\Gamma_0(E)$ falls die Träger der $f_q$ in einer gemeinsamen kompakten Menge enthalten sind und $\sup_X |\nabla^k f_q - \nabla^k f| \xrightarrow[q \to \infty]{} 0$ für alle $k \geq 0$, d. h. $f_q \to f$ bezüglich der $C^k$-Norm, für alle $k \geq 0$. Bei dieser Konvergenz sind die Inklusionen $\Gamma_0(E) \to C_0^k(E)$ und $\Gamma_0(E) \to L_K^2(E)$ stetig, wobei wir in $C_0^k(E)$ (bzw. $L_K^2(E)$) die Norm $\|\cdot\|_{C^k}$ (bzw. $\|\cdot\|_{L_K^2}$) betrachten.

Unter einer <u>Distribution</u> in $E$ verstehen wir ein lineares Funktional $v : \Gamma_0(E) \to \mathbb{R}$, das bezüglich der $C^\infty$-Konvergenz stetig ist. Die Menge $\Gamma_0(E)^*$ aller Distributionen in $E$ ist ein Vektorraum. Bemerken wir, daß die $C^\infty$-Konvergenz (und somit der Begriff Distribution) von $\nabla^A, \langle , \rangle$ und $m$ nicht abhängen.

Sei $L^1_{loc}(E)$ der Raum aller lokal integrierbaren Schnitte von $E$ (d. h. aller meßbaren Schnitte $f$ mit $\int_K |f| \, d\mu < \infty$ für alle kompakte Mengen $K \subset X$). Es ist also $L^q(E) \subset L^1_{loc}(E)$ für $q \geq 1$. Jedem $f \in L^1_{loc}(E)$ können wir die Distribution $v_f \in \Gamma_0(E)^*$ zuordnen mit $v_f(h) = \int \langle f, h \rangle \, d\mu$ für $h \in \Gamma_0(E)$. Die Abbildung $L^1_{loc}(E) \ni f \to v_f \in \Gamma_0(E)^*$ ist injektiv. Somit bilden die Distributionen in $E$ eine natürliche Erweiterung der Schnitte von $E$; von nun an werden wir $v_f = f$ schreiben, d. h. $f \in L^1_{loc}(E)$ als eine Distribution betrachten. Die Inklusion $L^1_{loc}(E) \to \Gamma_0(E)^*$ <u>hängt von</u> $\langle , \rangle$ <u>und</u> $m$ <u>ab</u>.

Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle\, m$ wie vorhin, $E'$ ein Vektorbündel mit Skalarprodukt über $X$. Jeder Differentialoperator $P : \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ist stetig



bezüglich der $C^\infty$-Konvergenz; dies folgt sofort aus der Darstellung $Pf = S_k \cdot \nabla^k f + \ldots + S_0 f$ (Seite 47). Betrachten wir wie oben $\Gamma_0(E)$ (bzw. $\Gamma_0(E')$) als einen Unterraum von $\Gamma_0(E)^*$ (bzw. $\Gamma_0(E')^*$) (weil $\Gamma_0(E) \subset L^1_{loc}(E)$), so besitzt $P$ eine Erweiterung $P : \Gamma_0(E)^* \to \Gamma_0(E')^*$, die wir ebenfalls mit $P$ bezeichnen, wobei

$$Pv(h) = v(P^* h), \; v \in \Gamma_0(E)^*, \; h \in \Gamma_0(E').$$

$P : \Gamma_0(E)^* \to \Gamma_0(E')^*$ ist stetig bezüglich der <u>schwachen</u> <u>Konvergenz</u> von Distributionen ($v_q \to v$ in $\Gamma_0(E)^*$ falls $v_q(h) \to v(h)$ für alle $h \in \Gamma_0(E)$).

Jeder Sobolew-Raum $L^2_k(E)$ ($k \in \mathbb{Z}$) besitzt eine natürliche Einbettung $L^2_k(E) \to \Gamma_0(E)^*$, die bezüglich der Sobolew-Norm und der schwachen Konvergenz stetig ist und auf dem Unterraum $\Gamma_0(E) \subset L^2_k(E)$ mit der obigen Inklusion übereinstimmt. Für $k \geq 0$ ist es die Inklusion $L^2_k(E) \subset L^2(E) \subset L^1_{loc}(E) \subset \Gamma_0(E)^*$ (die Stetigkeit folgt aus der $L^2$-Stetigkeit des $L^2$-Skalarprodukts). Ist $k < 0$, so sind die Elemente von $L^2_k(E)$ $\|\cdot\|_{L^2_{-k}}$-stetige Linearfunktionale auf $\Gamma_0(E)$, die deshalb auch $C^\infty$-stetig sein müssen (vgl. Seiten 38-39). Da die

$L^2_k$-Konvergenz die schwache Konvergenz der entsprechenden Funktionale impliziert, folgt unsere Behauptung. Insgesamt haben wir die Folge von stetigen Inklusionen ($k \geq 1$):
$\Gamma_0(E) \subset \ldots \subset L^2_k(E) \subset L^2_{k-1}(E) \subset \ldots \subset L^2_1(E) \subset L^2_0(E) = L^2(E) \subset L^2_{-1}(E) \subset$
$\subset \ldots \subset L^2_{-k+1}(E) \subset L^2_{-k}(E) \subset \ldots \subset \Gamma_0(E)^*$.

LEMMA. Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $E', X, \nabla^{A'}, \langle , \rangle', m$ der gleichen Art, $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator der Ordnung $k$, $\mathcal{U} \subset X$ offen und relativ kompakt.

(i) Für jedes natürliche $r \geq 0$ gibt es $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\|Pf\|_{L^2_r} \leq \sup_{\operatorname{supp} f} |\sigma_{P,k}| \cdot \|f\|_{L^2_{r+k}} + C\|f\|_{L^2_{r+k-1}}$$

(falls $r = k = 0$ kann man $C = 0$ nehmen) für alle $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. Dabei ist die Norm von $\sigma_{P,k} = S_P \in \Gamma(\underbrace{TX \otimes \ldots \otimes TX}_{k} \otimes \operatorname{Hom}(E, E'))$ punktweise durch das natürliche Skalerprodukt in $TX \otimes \ldots \otimes TX \otimes$ $\otimes \operatorname{Hom}(E, E')$ definiert.

(ii) Für $r \geq 0$ gibt es $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ mit

$$\|Pf\|_{L^2_r} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^2_{r+k}}$$

für alle $f$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$, $f \in \Gamma_0(E)$.

(iii) Ist $X$ kompakt, so besitzt $P: \Gamma_0(E) \to$ $\to \Gamma_0(E')$ eine stetige Fortsetzung



$$P: L^2_{r+k}(E) \to L^2_r(E')$$

(für alle $r \in \mathbb{Z}$), die mit der Erweiterung von $P$ zum Distributionsoperator $\Gamma_0(E)^* \to \Gamma_0(E')^*$ übereinstimmt.

<u>Beweis</u>. Für $s \in \Gamma_0(E_\ell)$ und $r \geq 0$ ist $\|\nabla s\|_{L^2_r} \leq$ $\leq \|s\|_{L^2_{r+1}}$ (Definition der Sobolew-Normen). Ist dagegen $T$ ein Bündelhomomorphismus (Operator der Ordnung 0) zwischen beliebigen Bündeln, so ist, für alle $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$, $|\nabla^i(Tf)| \leq$ $\leq |T| \cdot |\nabla^i f| + C \sum_{j=0}^{i} |\nabla^j f|$, woher $\|Tf\|_{L^2_r} \leq$ $\leq \sup_{\operatorname{supp} f} |T| \cdot \|f\|_{L^2_r} + C\|f\|_{L^2_{r-1}}$ für $r \geq 0$ (wobei $C = 0$ falls $r = 0$). Wegen der Zerlegung $Pf = S^k \cdot \nabla^k f + \ldots + S_0 \cdot f$ (Seite 47) gilt also (i), während (ii) eine triviale Konsequenz von (i) ist. Sei nun $X$ kompakt. Wegen (ii) besitzt jeder Differentialoperator $P$ der Ordnung $k \geq 0$ eine stetige Fortsetzung $P: L^2_{r+k}(E) \to L^2_r(E')$ ($r \geq 0$). Ist $f \in L^2_{r+k}(E)$, $h \in \Gamma_0(E')$ und $f_q \in$ $\in \Gamma_0(E)$ mit $f_q \xrightarrow[q\to\infty]{} f$ in $L^2_{r+k}(E)$, so haben wir $Pf_q \to Pf$ in $L^2_r(E)$ ($r \geq 0$), woher

$\int \langle Pf, h\rangle' d\mu = \lim_q \int \langle Pf_q, h\rangle' d\mu = \lim_q \int \langle f_q, P^*h\rangle d\mu =$

$= \int \langle f, P^*h\rangle d\mu$, d.h. $P$ operiert auf $L^2_{r+k}(E)$ wie auf dem Raum $\Gamma_0(E)^*$ der Distributionen.

Ist weiter $r \geq 0$, so gilt, in $\Gamma_0(E) = \Gamma(E)$, $\|Pf\|_{L^2_{-r-k}} \leq C\|f\|_{L^2_{-r}}$, weil, für $h \in \Gamma_0(E')$,

$|\int \langle Pf, h\rangle' d\mu| = |\int \langle f, P^*h\rangle d\mu| \leq \|f\|_{L^2_{-r}} \|P^*h\|_{L^2_r} \leq$

$\leq C\|f\|_{L^2_{-r}} \|h\|_{L^2_{r+k}}$. $P$ besitzt also eine stetige Fortsetzung $P: L^2_{-r}(E) \to L^2_{-r-k}(E)$ $(r \geq 0)$, die mit der Distributionsfortsetzung übereinstimmen muß (falls $f \in L^2_{-r}(E)$, $h \in \Gamma_0(E')$ und $f_q \in \Gamma_0(E)$, $f_q \to f$ in $L^2_{-r}$, ist $Pf_q \to Pf$ in $L^2_{-r-k}$ und somit als Distributionen, woher $(Pf)(h) =$

$= \lim_q (Pf_q)(h) = \lim_q \int \langle Pf_q, h\rangle' d\mu = \lim_q \int \langle f_q, P^*h\rangle d\mu =$

$= f(P^*h))$. Behauptung (iii) gilt also falls $k=0$ oder $k=1$. Da jeder Operator $P$ der Ordnung $k$ die Form $Pf = S^k \cdot D^k f + \dots + S^0 f$ hat, folgt nun (iii) für beliebige Differentialoperatoren von beliebigen Ordnungen.



Betrachten wir den Torus $T^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$. $T^n$ ist eine abelsche Lie-Gruppe (Quotientengruppe von $\mathbb{R}^n$). Da die euklidische Metrik von $\mathbb{R}^n$ unter der Translationsgruppe $2\pi\mathbb{Z}^n$ invariant ist, trägt $T^n$ die entsprechende Quotientenmetrik m. Die Funktionen auf $T^n$ sind also "$2\pi\mathbb{Z}^n$-periodische" Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, Integration auf $T^n$ entspricht der Lebesgue-Integration in $[0, 2\pi)^n$ etc. Die durch die kartesischen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ auf $\mathbb{R}^n$ definierten Vektorfelder $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und 1-Formen $dx_i$ sind ebenso $2\pi\mathbb{Z}^n$-invariant (im Gegensatz zu den $x_i$), d.h. man kann sie auf Vektorfelder $\partial_i$ und 1-Formen $dx_i$ auf $T^n$ projizieren.

Für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ betrachten wir die Funktion $\chi_\alpha : T^n \to \mathbb{C}$, die wir als $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ definieren:

$$\chi_\alpha(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{i\langle \alpha, x\rangle},$$

$x \in \mathbb{R}^n$, wobei $\langle , \rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist. Da $\int_{T^n} |\chi_\alpha|^2 d\mu = 1$ und $\int_{T^n} \chi_\alpha \bar{\chi}_\beta d\mu = 0$ falls $\alpha \neq \beta$, bilden die $\chi_\alpha$ ein $L^2$-orthonormales System in $L^2(T^n, \mathbb{C})$. Andererseits ist

$$\bar{\chi}_\alpha = \chi_{-\alpha},\ \chi_\alpha\chi_\beta = (2\pi)^{-n/2}\chi_{\alpha+\beta},\ \chi_0 = 1,$$

d.h. die komplexen Kombinationen der $\chi_\alpha$ bilden eine Algebra, die – nach dem Satz von Stone und Weierstraß – dicht im Raum $C^0(T^n, \mathbb{C})$ der stetigen Funktionen liegen muß. Deshalb liegen diese Kombinationen auch dicht in $L^2(T^n, \mathbb{C})$, d.h. die $\chi_\alpha$ bilden eine Hilbert-Basis von $L^2(T^n, \mathbb{C})$. Definiert man für $\varphi \in L^2(T^n, \mathbb{C})$ die Fourier-Koeffizienten $\hat{\varphi}(\alpha) = \int \varphi \bar{\chi}_\alpha d\mu \in \mathbb{C}$ $(\alpha \in \mathbb{Z}^n)$, so ist dann

$$\varphi = \sum_\alpha \hat{\varphi}(\alpha)\chi_\alpha \text{ in } L^2 \quad \text{und} \quad \|\varphi\|_{L^2}^2 = \sum_\alpha |\hat{\varphi}(\alpha)|^2.$$

Da

$$\partial_j \chi_\alpha = i\alpha_j \chi_\alpha$$

ist auch

$$\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\chi_\alpha = i^k \alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_k}\chi_\alpha,$$

und, für $\varphi \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$ ergibt die partielle Integration

$$(\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\varphi)^\wedge(\alpha) = i^k\alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_k}\hat{\varphi}(\alpha).$$

Also ist, in $L^2$,

$$\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\varphi = i^k\sum_\alpha \alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_k}\hat{\varphi}(\alpha)\chi_\alpha = $$

$$= \sum_\alpha \hat{\varphi}(\alpha)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\chi_\alpha$$



und

$$\sum_{j_1\cdots j_k}\int_{T^n}|\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\varphi|^2 d\mu = \sum_\alpha |\alpha|^{2k}|\hat{\varphi}(\alpha)|^2.$$

Sei nun $E = T^n \times V$ das triviale komplexe Vektorbündel über $T^n$ mit der flachen kovarianten Ableitung $\nabla^A$ und mit dem konstanten Hermiteschen Skalarprodukt $\langle\,,\,\rangle$. Für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ ordnen wir jedem $f \in L^2(E)$ den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(\alpha) = \int f\bar{\chi}_\alpha d\mu \in V$$

zu. Da, bezüglich einer Orthonormalbasis von $V$, $f$ als ein Tupel von Funktionen betrachtet werden kann, gilt

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_\alpha |\hat{f}(\alpha)|^2$$

und, für $k \geq 1$, und $f \in \Gamma(E)$,

$$\|f\|_{L_k^2}^2 = \sum_\alpha (1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + \ldots + |\alpha|^{2k})|\hat{f}(\alpha)|^2.$$

(s. Beispiel 2), Seite 18).

Sei $E' = T^n \times V'$ ein anderes triviales komplexes Vektorbündel mit flacher kovarianter Ableitung $\nabla^{A'}$ und Skalarprodukt, das wir ebenfalls mit $\langle\,,\,\rangle$ bezeichnen. Ist $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator der Ordnung $k$, so entsteht wegen der Existenz der Überlagerungsabbildung $\mathbb{R}^n \to T^n$ der zurückgeholte Operator $\tilde{P}: \Gamma_0(\mathbb{R}^n \times V) \to \Gamma_0(\mathbb{R}^n \times V')$.

In anderen Worten, bildet die Projektion $\mathbb{R}^n \to T^n$ lokale Koordinaten auf $T^n$, in welchen $Pf = \sum_{j_1,\dots,j_k} a_{j_1\dots j_k}\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f + \dots + a\cdot f$, wobei $a_{j_1\dots j_k}, \dots, a : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(V,V')$. Da, für $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodische Schnitte $f$, $Pf$ auch $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodisch sein muß und die (symmetrischen) Koeffizienten $a_{j_1\dots j_k}, \dots, a$ eindeutig bestimmt sind, müssen die letzten auch $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodisch sein. Es ist also $Pf = \sum_{j_1\dots j_k} a_{j_1\dots j_k}\cdot\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f + \dots + a\cdot f$, mit $a_{j_1\dots j_k}, \dots, a : T^n \to \mathrm{Hom}(V,V')$.

SATZ (die Ungleichung von Friedrichs). Sei $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle, m$ wie oben, $E', X, \nabla^{A'}, \langle,\rangle', m$ der gleichen Art, $P : \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator der (wesentlichen) Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol, $\mathcal{U} \subset X$ eine offene, relativ kompakte Menge. Für jedes $r \geq 0$ gibt es $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{L^2_{r+k}} \leq C\left(\|Pf\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r}\right)$$

für alle $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$.



<u>Beweis</u>. a) Sei zunächst $X = \mathcal{U} = T^n$, $E = T^n \times V$, $E' = T^n \times V'$, $\nabla^A, \nabla^{A'}$ flach, $\langle,\rangle, \langle,\rangle'$ konstant, $m$ die kanonische Metrik von $T^n$, und $Pf = \sum_{j_1\dots j_k} a_{j_1\dots j_k}\cdot\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f$, wobei die Funktionen $a_{j_1\dots j_k}$ <u>konstant</u> sind. Nach Voraussetzung ist, für $f \in V$, $f \neq 0$ und $\eta \in T^*_x T^n \approx \mathbb{R}^n$, $\eta \neq 0$, auch $S_P(\eta,\dots,\eta,f) \neq 0$, woher $|S_P(\eta,\dots,\eta,f)| \geq C_0 |\eta|^k |f|$ mit $C_0 > 0$. Da $S_P = \sum_{j_1\dots j_k} \partial_{j_1}\otimes\dots\otimes\partial_{j_k}\cdot a_{j_1\dots j_k}$, ist

$$\Big|\sum_{j_1\dots j_k} \eta_{j_1}\cdots\eta_{j_k} a_{j_1\dots j_k} f\Big| \geq C_0|\eta|^k|f|,$$

wobei $\eta_i = \eta(\partial_i)$ die (euklidischen) Komponenten von $\eta$ sind. Also, da $(Pf)^\wedge(\alpha) = i^k \sum_{j_1\dots j_k} \alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_k} a_{j_1\dots j_k}\hat{f}(\alpha)$, ist auch

$$|(Pf)^\wedge(\alpha)|^2 \geq C_0^2|\alpha|^{2k}|\hat{f}(\alpha)|^2.$$

Andererseits gibt es $C > 0$ mit

$$(1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r+2k} \leq C(1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r})(1+C_0^2|\alpha|^{2k})$$

(weil $\lim_{|\alpha|\to\infty}(1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r+2k})(1+\dots+|\alpha|^{2r})^{-1}(1+C_0^2|\alpha|^{2k})^{-1} = C_0^{-2} < \infty$).

Also

$$\|f\|^2_{L^2_{r+k}} = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r+2k})|\hat f(\alpha)|^2 \le$$

$$\le C\Big(\sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r})|\hat f(\alpha)|^2 +$$

$$+\sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r})\, C_0^2|\alpha|^{2k}|\hat f(\alpha)|^2\Big) \le$$

$$\le C\Big(\sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r})|\hat f(\alpha)|^2 +$$

$$+\sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2r})|(Pf)^\wedge(\alpha)|^2\Big) =$$

$$= C\big(\|Pf\|^2_{L^2_r} + \|f\|^2_{L^2_r}\big) \le C\big(\|Pf\|_{L^2_r}+\|f\|_{L^2_r}\big)^2;$$

die Ungleichung von Friedrichs gilt also in diesem Fall.

b) Die Ungleichung gilt für beliebige $E, X$ usw., falls $\mathcal U$ eine genügend kleine Umgebung des festen Punktes $x_0 \in X$ ist. Ist nämlich $\mathcal U$ eine kleine gemeinsame Trivialisierungskarte für $E, E'$, so ist $Pf = \sum_{j_1\dots j_k} a_{j_1\dots j_k}\cdot\partial_{j_1}\dots\partial_{j_k}f + \dots + af$ in $\mathcal U$, wobei $E|_{\mathcal U} = \mathcal U\times V$, $E'|_{\mathcal U} = \mathcal U\times V'$, $a_{j_1\dots j_k}: \mathcal U \to \mathrm{Hom}(V,V')$. Man kann also $\mathcal U$ als eine Teilmenge von $T^n$ betrachten, so daß die $\partial_i$ den Feldern $\partial_i$ auf $T^n$ entsprechen. Der Operator $P_0: \Gamma_0(T^n\times V)\to\Gamma_0(T^n\times V')$



mit $P_0 f = \sum_{j_1\dots j_k} a_{j_1\dots j_k}(x_0)\cdot\partial_{j_1}\dots\partial_{j_k}f$ erfüllt dann die Voraussetzungen von a). Da die Sobolew-Normen von Schnitten $f\in\Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f\subset\mathcal U$ bis auf Äquivalenz von $\nabla^A, \langle,\rangle, m$ nicht abhängen, haben wir wegen a), für solche $f$,

$$\|f\|_{L^2_{r+k}} \le C\big(\|P_0f\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r}\big) \le$$

$$\le C\big(\|Pf\|_{L^2_r} + \|(P-P_0)f\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r}\big) \le$$

$$\le C\Big(\|Pf\|_{L^2_r} + \sup_{\operatorname{supp} f}|\sigma_{P-P_0,k}|\cdot\|f\|_{L^2_{r+k}} + \|f\|_{L^2_r} +$$

$$+ C'\|f\|_{L^2_{r+k-1}}\Big),$$ vgl. das Lemma auf S. 57.

Da $\sigma_{P-P_0,k}|_{x_0} = 0$, ist $C\sup_{\operatorname{supp} f}|\sigma_{P-P_0,k}| < \frac12$ falls $\operatorname{supp} f\subset \mathcal U'$ für eine geeignete Menge $\mathcal U'$ mit $x_0\in\mathcal U'\subset\mathcal U$ ($\mathcal U'$ offen). Also, für solche $f$,

$$\tfrac12\|f\|_{L^2_{r+k}} \le C\big(\|Pf\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r} + C'\|f\|_{L^2_{r+k-1}}\big).$$

Ist $k=1$, so ist unsere Behauptung bewiesen. Sonst finden wir, wegen der Ungleichung für 3 Sobolew-Normen, eine Konstante $C''$ mit

$$CC'\|f\|^2_{L_{r+k-1}} \leq \frac{1}{4}\|f\|^2_{L_{r+k}} + C''\|f\|^2_{L_r}$$

für $f$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}'$, d. h.

$$\frac{1}{4}\|f\|^2_{L_{r+k}} \leq C(\|Pf\|^2_{L_r} + \|f\|^2_{L_r}) + C''\|f\|^2_{L_r},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

c) Seien nun $E, X, \ldots$ usw. beliebig, $\mathcal{U} \subset X$ offen und relativ kompakt. Es gibt endlich viele $C^\infty$-Funktionen $\varphi_\alpha$ auf $X$ mit $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ auf $\mathcal{U}$, deren Träger in kleinen offenen Mengen liegen, wo unsere Ungleichung gilt (vgl. b)). Für $f \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$ ist also

$$\|f\|^2_{L_{r+k}} \leq \sum_\alpha \|\varphi_\alpha f\|^2_{L_{r+k}} \leq \sum_\alpha C_\alpha(\|P(\varphi_\alpha f)\|^2_{L_r} + \|\varphi_\alpha f\|^2_{L_r}).$$

Da $P'_\alpha f = P(\varphi_\alpha f) - \varphi_\alpha Pf$ ein Differentialoperator der Ordnung $k-1$ ist, haben wir (Seite 57)

$$\|P(\varphi_\alpha f)\|^2_{L_r} \leq \|\varphi_\alpha Pf\|^2_{L_r} + C\|f\|^2_{L_{r+k-1}},$$

und, da die Multiplikation mit $\varphi_\alpha$ stetig ist,

$$\|\varphi_\alpha Pf\|^2_{L_r} \leq C\|Pf\|^2_{L_r}, \quad \|\varphi_\alpha f\|^2_{L_r} \leq C\|f\|^2_{L_r}.$$



Deshalb

$$\|f\|^2_{L_{r+k}} \leq C(\|Pf\|^2_{L_r} + \|f\|^2_{L_r}) + C'\|f\|^2_{L_{r+k-1}}.$$

Ist $k=1$, so sind wir fertig. Sonst gibt es (Ungleichung für 3 Sobolev Normen!) ein $C'' \in \mathbb{R}$ mit $C'\|f\|^2_{L_{r+k-1}} \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L_{r+k}} + C''\|f\|^2_{L_r}$ falls $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$, d. h.

$$\frac{1}{2}\|f\|^2_{L_{r+k}} \leq C(\|Pf\|^2_{L_r} + \|f\|^2_{L_r}) + C''\|f\|^2_{L_r}.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

FOLGERUNG. Seien $E, E'$ Vektorbündel über der <u>kompakten</u> Mannigfaltigkeit $X$, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator mit injektivem Symbol (z. B. elliptisch). Dann ist der Raum

$$\operatorname{Ker} P = \{f \in \Gamma(E) : Pf = 0\}$$

endlich dimensional.

<u>Beweis</u>. Wählen wir $\nabla^A, \langle\,,\rangle, \nabla^{A'}, \langle\,,\rangle', m$ in $E$ (bzw. $E', X$) wie vorhin, so gibt die Ungleichung von Friedrichs mit $\mathcal{U} = X$ und $r = 0$

$$\|f\|^2_{L_k} \leq C(\|Pf\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})$$

für alle $f \in \Gamma(E)$ (wir dürfen hier annehmen, daß $P$ die wesentliche Ordnung $k \geq 1$ hat; ist nämlich $k=0$, so ist $P$ ein injektiver Bündelhomomorphismus, woher $\operatorname{Ker} P = \{0\}$). Wäre $\operatorname{Ker} P$ unendlich dimensional, so würde es eine unendliche $L^2$-orthonormale Folge $f_q$ enthalten. Da aber $\|f_q\|_{L^2_k} \leq C$, muß $f_q$ eine $L^2$-konvergente Teilfolge besitzen (Lemma von Rellich), was der Orthonormalität widerspricht.

Seien nun $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle, m$ wie vorhin, $r > 0$. Betrachten wir den Differentialoperator $P_r : \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E)$ der Ordnung $2r$ mit

$$P_r f = f + d^*_\nabla(\nabla f) + (d^*_\nabla)^2 \nabla^2 f + \dots + (d^*_\nabla)^r \nabla^r f.$$

Es ist also, für $f, h \in \Gamma_0(E)$, $\int \langle P_r f, h \rangle d\mu = \int \langle f, h \rangle d\mu + \int \langle \nabla f, \nabla h \rangle d\mu + \dots + \int \langle \nabla^r f, \nabla^r h \rangle d\mu = \langle f, h \rangle_{L^2_r}$. Da $\|P_r f\|_{L^2_{-r}}$ die Funktionalnorm von $h \to \int \langle P_r f, h \rangle d\mu$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^2_r}$ ist, muß sie mit $\|f\|_{L^2_r}$ übereinstimmen (weil $f$ die Skalarproduktdarstellung des entsprechenden Funktionals auf dem dichten Unterraum $\Gamma_0(E)$



ist), d.h. für $f \in \Gamma_0(E)$

$$\|P_r f\|_{L^2_{-r}} = \|f\|_{L^2_r}.$$

Die isometrische Abbildung $P_r : (\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^2_r}) \to (\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^2_{-r}})$ muß eine isometrische Fortsetzung $P_r : L^2_r(E) \to L^2_{-r}(E)$ besitzen. Diese Fortsetzung stimmt mit der Distributionsfortsetzung von $P_r$ überein (Beweis wie auf S. 59). Außerdem ist diese Fortsetzung eine Isometrie (d.h. eine surjektive isometrische Abbildung), weil ihr Bild alle Elemente $\varphi$ des dichten Unterraumes $\Gamma_0(E) \subset L^2_{-r}(E)$ enthält: für so ein $\varphi$ muß es $f \in L^2_r(E)$ geben mit $\int \langle \varphi, h \rangle d\mu = \langle f, h \rangle_{L^2_r}$ für alle $h \in \Gamma_0(E)$ (weil $h \to \int \langle \varphi, h \rangle d\mu$ ein $\|\cdot\|_{L^2_r}$-stetiges Funktional ist). Es ist aber $\langle f, h \rangle_{L^2_r} = \langle f, P_r^* h \rangle_{L^2}$ (und $P_r^* = P_r$); ist nämlich $f_q \to f$ in $L^2_r(E)$, $f_q \in \Gamma_0(E)$, so $\langle f, h \rangle_{L^2_r} = \lim_q \langle f_q, h \rangle_{L^2_r} = \lim_q \langle f_q, P_r^* h \rangle_{L^2} = \langle f, P_r^* h \rangle_{L^2}$. Also $\varphi = P_r f$ (als Distributionen).

Sei nun $v \in \Gamma_0(E)^*$ eine Distribution, $U \subset X$ eine offene Menge. Wir sagen, daß $v$ auf $U$ verschwindet, wenn $v(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \Gamma_0(E)$

mit $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Sind $U_t$, $t \in T$, offene Mengen mit der Eigenschaft, daß $v$ auf jedem $U_t$ verschwindet, so verschwindet $v$ auf $U = \bigcup_{t \in T} U_t$ (weil für $\varphi \in \Gamma_0(E)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset U$, $\varphi = \varphi_{t_1} + \dots + \varphi_{t_q}$ mit $\varphi_{t_i} \in \Gamma_0(E)$ und $\operatorname{supp}\varphi_{t_i} \subset U_{t_i}$, $t_i \in T$, $i = 1, \dots, q$). Die Vereinigung $U_0$ aller offenen Mengen, auf denen $v$ verschwindet ist also die größte offene Menge mit dieser Eigenschaft. Die abgeschlossene Menge $\operatorname{supp} v = X \setminus U_0$ nennt man dann den <u>Träger der Distribution</u> $v$. Wir behaupten, daß jede Distribution $v \in \Gamma_0(E)^*$ <u>mit kompaktem Träger</u> $A \subset X$ in einem der Sobolew-Räume $L^2_k(E)$ $(k \in \mathbb{Z})$ liegen muß. Sei nämlich $U$ eine feste relativ kompakte Umgebung von $A$ und $\varphi \in C_0^\infty(X)$ eine feste Funktion mit $\varphi = 1$ auf einer Umgebung von $A$ und $\varphi = 0$ auf $X \setminus U$; also $v(h) = v(\varphi h)$ für alle $h \in \Gamma_0(E)$. Unsere Behauptung wird folgen, wenn wir zeigen, daß es $k > 0$ gibt mit der Eigenschaft, daß $v$ $\|\cdot\|_{L^2_k}$ - stetig ist (oder - wegen Linearität -



- nur in $0$ stetig: $v(h_q) \to 0$ falls $\|h_q\|_{L^2_k} \to 0$).
Nach dem Lemma von Sobolew genügt also zu beweisen, daß es $r \geq 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: ist $h_q \in \Gamma_0(E)$ eine Folge mit $\|\varphi h_q\|_{C^r} \xrightarrow[q \to \infty]{} 0$, so ist $v(\varphi h_q) \to 0$. Gäbe es kein solches $r \geq 0$, so finden wir, für jedes $r \geq 0$, $h_r \in \Gamma_0(E)$ mit $\|\varphi h_r\|_{C^r} < 2^{-r}$, $|v(\varphi h_r)| \geq 1$. Da $\operatorname{supp}(\varphi h_r) \subset U$, haben wir die $C^\infty$-Konvergenz $\varphi h_r \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$, was der $C^\infty$-Stetigkeit von $v$ widerspricht.

Betrachten wir nun das triviale reelle Vektorbündel $E_{\mathbb{R}} = T^n \times V_{\mathbb{R}}$ mit dem konstanten Skalarprodukt $\langle\,,\rangle_{\mathbb{R}}$ über $T^n$. Wir haben auch die komplexe Erweiterung $E = T^n \times V$ von $E_{\mathbb{R}}$, wobei $V_{\mathbb{R}}$ die reelle Form von $V$ ist (also $V_{\mathbb{R}} \subset V$, wie etwa $\mathbb{R}^a \subset \mathbb{C}^a$, falls wir $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^a$, $V = \mathbb{C}^a$ setzen), mit dem Hermiteschen Skalarprodukt $\langle\,,\rangle$, das auf $E_{\mathbb{R}}$ mit $\langle\,,\rangle_{\mathbb{R}}$ übereinstimmt. Sei $E$ mit der flachen kovarianten Ableitung und $T^n$ mit der "euklidischen" Quotientenmetrik zu versehen. Der Raum $\Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$ der <u>komplexen</u> <u>Distributionen</u> besteht aus allen $C^\infty$-stetigen $\mathbb{C}$-linearen Funktionalen $v : \Gamma(E) \to \mathbb{C}$. Wegen der natürlichen Zerlegung $\Gamma(E) = \Gamma(E_{\mathbb{R}}) + i\,\Gamma(E_{\mathbb{R}})$ kann jede reelle Distribution $v \in \Gamma(E)^*$ als eine komplexe Distribution betrachtet werden, mit $v(h) = v(\operatorname{Re} h) + i v(\operatorname{Im} h)$ für $h \in \Gamma(E)$, wobei $\operatorname{Re} h \in \Gamma(E_{\mathbb{R}})$, $i \operatorname{Im} h \in i\Gamma(E_{\mathbb{R}})$. Auch hier haben wir die Inklusion $L^1_{loc}(E) \ni f \to v_f = f \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$ mit $v_f(h) = \int \langle f, \bar h \rangle \, d\mu$ für $h \in \Gamma(E)$ und $\bar h = \operatorname{Re} h - i \operatorname{Im} h$, die für reelle Schnitte $h \in \Gamma(E_{\mathbb{R}})$ mit der uns bereits bekannten Inklusion übereinstimmt.

Sei $e_1, \dots, e_a$ eine feste $\langle\,,\rangle_{\mathbb{R}}$-orthonormale Basis von $V_{\mathbb{R}}$; deshalb ist sie auch eine $\langle\,,\rangle$-orthonormale Basis von $V$. Wir wissen, daß $\|f\|^2_{L^2_k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})|\hat f(\alpha)|^2$ für $f \in \Gamma(E)$ und $k \geq 0$. Da die Norm $\|\cdot\|_{L^2_k}$ das Sobolewsche Skalarprodukt $\langle\,,\rangle_{L^2_k}$ eindeutig bestimmt, ist auch



$$\langle f, h\rangle_{L^2_k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k}) \langle \hat f(\alpha), \hat h(\alpha)\rangle$$

für beliebige $f, h \in \Gamma(E)$. Da $(\chi_\alpha e_j)^\wedge(\alpha) = e_j$ und $(\chi_\alpha e_j)^\wedge(\beta) = 0$ für $\beta \neq \alpha$, folgt aus dieser Formel, daß $\chi_\alpha e_j \in \Gamma(E)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $j = 1, \dots, a$, ein $\langle\,,\rangle_{L^2_k}$-orthogonales System bilden und $\|\chi_\alpha e_j\|^2_{L^2_k} = 1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k}$; also ist

$$\{ f_{\alpha,j,k} = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})^{-1/2} \chi_\alpha e_j : \alpha \in \mathbb{Z}^n, j = 1, \dots, a\}$$

ein orthonormales System im Hilbertraum $L^2_k(E)$. Für $f \in L^2(E)$ haben wir $f = \sum_\alpha \hat f(\alpha)\chi_\alpha$ (eine $L^2$-konvergente Reihe, S. 61). Ist $f \in \Gamma(E)$, so ist auch $\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s} f = \sum_\alpha \hat f(\alpha)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s}\chi_\alpha$ ($L^2$-Konvergenz), für alle $s$, d. h.

$$f = \sum_\alpha \hat f(\alpha)\chi_\alpha \text{ in } L^2_k(E), \text{ für alle } k \geq 0$$

($L^2_k$-Konvergenz der Reihe; nach dem Lemma von Sobolew ist dann auch $f = \sum_\alpha \hat f(\alpha)\chi_\alpha$ bezüglich der $C^\infty$-Konvergenz). Dies bedeutet aber, daß die endlichen Kombinationen der $f_{\alpha,j,k}$ <u>dicht</u> in $(\Gamma(E), \|\cdot\|_{L^2_k})$

und deshalb auch in $L_k^2(E)$ liegen. Das System $\{f_{\alpha,j,k}\}$ ist also eine Hilbert-Basis von $L_k^2(E)$. Für jedes $f \in L_k^2(E)$ ist nun $\|f\|_{L_k^2}^2 = \sum_{\alpha,j} \langle f, f_{\alpha,j,k}\rangle_{L_k^2}^2$. Wir behaupten, daß

$$\langle f, f_{\alpha,j,k}\rangle_{L_k^2} = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})^{1/2}\langle \hat f(\alpha), e_j\rangle.$$

Als Funktion von $f$ ist die linke Seite stetig auf $L_k^2(E)$. Die rechte Seite ist dagegen stetig als Funktion von $f \in L^2(E)$, bezüglich der $L^2$-Norm, und somit auch stetig auf $L_k^2(E) \subset L^2(E)$, bezüglich der $L_k^2$-Norm. Da die beiden Seiten für $f$ im dichten Unterraum $\Gamma(E) \subset L_k^2(E)$ übereinstimmen, folgt unsere Gleichung. Also ist

$$\|f\|_{L_k^2}^2 = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})|\hat f(\alpha)|^2$$

für alle $f \in L_k^2(E)$, und somit

$$\langle f, h\rangle_{L_k^2} = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})\langle \hat f(\alpha), \hat h(\alpha)\rangle$$

für beliebige $f, h \in L_k^2$.



Sei nun $v \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$ eine komplexe Distribution, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Wir definieren den Fourier-Koeffizienten $\hat v(\alpha) \in V$ durch

$$\hat v(\alpha) = \sum_{j=1}^{a} v(\bar\chi_\alpha e_j) e_j$$

(falls $v \in L^2(E)$, stimmt diese Definition mit der früheren überein). Liegt $v$ in $L^2_{-k}(E)$ $(k>0)$, so ist $v$ ein stetiges Funktional $L_k^2(E) \to \mathbb{C}$ und $\|v\|_{L^2_{-k}}$ ist die entsprechende Funktionalnorm. Es muß aber genau ein $f \in L_k^2(E)$ geben mit $\langle f, \bar h\rangle_{L_k^2} = v(h)$ für alle $h \in \Gamma(E)$ (vgl. S. 70), und dann $\|v\|_{L^2_{-k}} = \|f\|_{L_k^2}$. Setzen wir hier $h = \bar\chi_\alpha e_j$ $(j = 1, \dots, a,\ \alpha \in \mathbb{Z}^n)$, so $\langle \hat v(\alpha), e_j\rangle = v(h) = \langle f, \bar h\rangle_{L_k^2} = \sum_\beta (1+\dots+|\beta|^{2k})\langle \hat f(\beta), \hat{\bar h}(\beta)\rangle$. Da aber $\hat{\bar h}(\alpha) = e_j$ und $\hat{\bar h}(\beta) = 0$ für $\beta \neq \alpha$, ist $\hat v(\alpha) = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})\hat f(\alpha)$, woher $\|f\|_{L_k^2}^2 = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})^{-1}|\hat v(\alpha)|^2$, d.h.

$$\|v\|_{L^2_{-k}}^2 = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})^{-1}|\hat v(\alpha)|^2$$

für alle $v \in L^2_{-k}$, $k>0$.

<u>Bemerkung</u>. Wir haben soeben bewiesen, daß für den Isometrie-Operator $P_r : L^2_r(E) \to L^2_{-r}(E)$ $(r>0)$ in unserem trivialen Bündel $E$ gilt

$$(P_r f)^\wedge(\alpha) = (1+|\alpha|^2+\ldots+|\alpha|^{2r})\hat{f}(\alpha)$$

für alle $f \in L^2_r(E)$ (weil $v = P_r f$); siehe Seiten 69-70.

$L^2_{-k}(E)$ ist auch ein Hilbert-Raum (weil $L^2_{-k}(E) = (L^2_k(E))^*$). Unsere Formel für $\|\cdot\|_{L^2_{-k}}$ gibt

$$\langle v, u\rangle_{L^2_{-k}} = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\ldots+|\alpha|^{2k})\langle \hat{v}(\alpha), \hat{u}(\alpha)\rangle$$

für beliebige $v, u \in L^2_{-k}(E)$.

LEMMA. Für $E$ über $T^n$ wie oben, $v \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$ und $k \in \mathbb{Z}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $v \in L^2_k(E)$

(ii) $\|v\|_k < \infty$, wobei $\|v\|_k^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(1+|\alpha|^2)^k|\hat{v}(\alpha)|^2$.

<u>Beweis</u>. Da es Konstanten $C_k, C'_k > 0$ gibt



mit

$$C_k(1+|\alpha|^2)^k \leq (1+|\alpha|^2+\ldots+|\alpha|^{2|k|})^{\operatorname{sign} k} \leq$$
$$\leq C'_k(1+|\alpha|^2)^k$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ (man betrachte $\lim_{|\alpha|\to\infty}$ von den entsprechenden Quotienten), folgt (ii) aus (i) (dabei ist $\|\cdot\|_k$ eine mit $\|\cdot\|_{L^2_k}$ äquivalente Norm auf $L^2_k(E)$). Sei nun $v \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$ mit $\|v\|_k < \infty$. Da, für $\varphi \in \Gamma(E)$, $\varphi = \sum_\alpha \hat{\varphi}(\alpha)\chi_\alpha$ ($C^\infty$-Konvergenz, vgl. S. 74), ist

$$v(\varphi) = v\Big(\sum_{\alpha,i}\langle\hat{\varphi}(\alpha), e_i\rangle\chi_\alpha e_i\Big) = \sum_\alpha \langle \hat{v}(\alpha), \overline{\hat{\varphi}(-\alpha)}\rangle,$$

woher $|v(\varphi)| \leq \|v\|_k\|\varphi\|_{-k}$. $v$ ist deshalb $\|\cdot\|_{-k}$-stetig, es muß also als Distribution mit einem Element des Dualen Raumes $L^2_k(E)$ zu $L^2_{-k}(E)$ übereinstimmen.

Sei $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle', m$ wie vorhin, $E', X, \nabla^{A'}, \langle,\rangle', m$ der gleichen Art, $X$ kompakt. Wegen Behauptung (iii) des Lemmas auf S. 57 ist die Distributionsfortsetzung jedes Differentialoperators $P$ der Ordnung $k$ eine stetige Abbildung $P: L^2_{r+k}(E) \to L^2_r(E')$, für alle $r \in \mathbb{Z}$. Falls $r \geq 0$, gilt sogar

$$\|Pf\|_{L^2_r} \leq \sup_X |\sigma_{P,k}| \cdot \|f\|_{L^2_{r+k}} + C\|f\|_{L^2_{r+k-1}}$$

für alle $f \in L^2_{r+k}(E)$, mit $C = C(r,P) \in \mathbb{R}$ (vgl. (i), Seite 57).

LEMMA*. Seien $E, E'$ triviale komplexe Bündel über $T^n$, $D^A, D^{A'}, \langle , \rangle, \langle , \rangle'$, $m$ wie vorhin, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der Ordnung $k$. Für jedes $r \in \mathbb{Z}$ gibt es positive Konstanten $C_0, C$ (wobei $C_0$ nur von $n$, $r$, $k$ und nicht von $P$ abhängt) mit

$$\|Pf\|_{L^2_r} \leq C_0 \sup_{T^n} |\sigma_{P,k}| \cdot \|f\|_{L^2_{r+k}} + C\|f\|_{L^2_{r+k-1}}$$

für alle $f \in L^2_r(E)$

<u>Beweis</u>. Wegen der obigen Bemerkung dürfen wir $r < 0$ annehmen, d.h. $r = -q$, $q \geq 1$. Sei $f \in L^2_{-q}(E)$. Da $P_q : L^2_q(E) \to L^2_{-q}(E)$ eine Isometrie ist (sowie der entsprechende Operator $P_q' : L^2_q(E') \to L^2_{-q}(E')$, s. Seite 70),

* Dieses Lemma ist falsch formuliert (es soll $f \in L^2_{r+k}(E)$ statt $f \in L^2_r(E)$ sein) und falsch bewiesen. Siehe Anhang, Seite 109a.



gibt es $\varphi \in L^2_q(E)$ mit $P_q\varphi = f$, $\|f\|_{L^2_{-q}} = \|\varphi\|_{L^2_q}$. Also

$$\|Pf\|_{L^2_{-q}} = \|PP_q\varphi\|_{L^2_{-q}} \leq \|P_q'P\varphi\|_{L^2_{-q}} + \|(PP_q - P_q'P)\varphi\|_{L^2_{-q}}.$$

Da $P_q$ ein Operator der Ordnung $2q$ ist mit dem Symbol $\sigma_{P_q,2q}(\eta) = |\eta|^{2q} \cdot Id$, ist die Ordnung von $PP_q - P_q'P$ nicht größer als $2q+k-1$, woher $\|(PP_q - P_q'P)\varphi\|_{L^2_{-q}} \leq \tilde{C}\|\varphi\|_{L^2_{q+k-1}}$ ((iii), Seite 57), Da $\|P_q'P\varphi\|_{L^2_{-q}} = \|P\varphi\|_{L^2_q} \leq$

$$\leq \sup_{T^n} |\sigma_{P,k}| \cdot \|\varphi\|_{L^2_{q+k}} + \tilde{\tilde{C}}\|\varphi\|_{L^2_{q+k-1}}$$

(vgl. die obige Bemerkung), haben wir also

$$\|Pf\|_{L^2_{-q}} \leq \sup_{T^n} |\sigma_{P,k}| \cdot \|\varphi\|_{L^2_{q+k}} + C'\|\varphi\|_{L^2_{q+k-1}}.$$

Für jedes $s \in \mathbb{Z}$ gibt es $C_s = C_s(q,n) > 0$ mit $\|\varphi\|_{L^2_s} \leq C_s \|P_q\varphi\|_{L^2_{s-2q}}$ für alle Distributionen $\varphi \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$. Wir haben nämlich (vgl. Seite 77) $\|P_q\varphi\|^2_{L^2_{s-2q}} \geqslant C'_{s,q}\|P_q\varphi\|^2_{s-2q} =$

$= C_{s,q}\sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^{s-2q}|(P_q\varphi)^\wedge(\alpha)|^2 \geqslant$

$\geqslant C'_{s,q}\sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^s|\hat\varphi(\alpha)|^2 = C'_{s,q}\|\varphi\|^2_s \geqslant$

$\geqslant C''_{s,q}\|\varphi\|^2_{L^2_s}$. Verwendet man dies mit $s=q+k$ oder $s=q+k-1$ und $f=P_q\varphi$, so

$\|Pf\|_{L^2_{-q}} \leqslant C_{q+k}(q,n)\cdot\sup_{T^n}|\sigma_{P,k}|\cdot\|f\|_{L^2_{-q+k}} +$

$+ C'C_{q+k-1}\|f\|_{L^2_{-q+k-1}}$, womit unsere Behauptung für $r=-q<0$ bewiesen ist.

LEMMA (die verallgemeinerte Ungleichung von Friedrichs). Seien $E, E'$ triviale Bündel über $T^n$, $\nabla^A, \nabla^{A'}, \langle,\rangle, \langle,\rangle'$, $m$ wie vorhin, $P: \Gamma(E)\to\Gamma(E')$ ein Differentialoperator der Ordnung $k\geqslant 1$ mit injektivem Symbol (z. B. elliptisch), $r\in\mathbb{Z}$. Dann gibt es $C>0$ mit

$$\|f\|_{L^2_{r+k}} \leqslant C(\|Pf\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r})$$



für alle $f\in L^2_{r+k}(E)$.

<u>Beweis</u>. Statt der Sobolev-Normen $\|\cdot\|_{L^2_s}$ können wir die äquivalenten Normen $\|\cdot\|_s$ betrachten.

a) Sei zunächst $P$ von der Form

$$Pf = \sum_{j_1\cdots j_k} a_{j_1\cdots j_k}\cdot\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}f$$

wobei die $a_{j_1\cdots j_k}$ konstant sind. Wie auf Seite 64 haben wir $|\sum_{j_1\cdots j_k}\eta_{j_1}\cdots\eta_{j_k}a_{j_1\cdots j_k}f| \geqslant$

$\geqslant C_0|\eta|^k|f|$ und $|(Pf)^\wedge(\alpha)|^2 \geqslant C_0^2|\alpha|^{2k}|\hat f(\alpha)|^2$

$(C_0>0)$, woher $\|Pf\|^2_r = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^r|(Pf)^\wedge(\alpha)|^2 \geqslant$

$\geqslant C_0^2\sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^{r+k}|\hat f(\alpha)|^2 = C_0^2\|f\|^2_{r+k}$, was die Ungleichung in diesem Fall beweist.

b) Jeder Punkt $x_0\in T^n$ besitzt eine Umgebung $U$ mit der Eigenschaft, daß die Ungleichung gilt für alle $f$ mit $\operatorname{supp} f\subset U$, $f\in\Gamma(E)$.

Sei $P_0$ der Operator mit $P_0 f =$

$= \sum_{j_1\cdots j_k} a_{j_1\cdots j_k}(x_0)\cdot\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}f$, wobei $Pf =$

$= \sum_{j_1\cdots j_k} a_{j_1\cdots j_k}\cdot\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}f + \dots + a\cdot f$. Wegen a) ist

$$\|f\|_{L^2_{r+k}} \leq C(\|P_0 f\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r}) \leq$$

$$\leq C(\|Pf\|_{L^2_r} + \|(P_0-P)f\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r})$$

für alle $f \in \Gamma(E)$. Seien $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ Umgebungen von $x_0$ mit $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ und $\varphi \in C^\infty(T^n)$ eine Funktion mit $\varphi = 1$ auf $\mathcal{U}$, $\varphi = 0$ außerhalb $\mathcal{U}'$, $0 \leq \varphi \leq 1$. Da $P_0 - P$ ein Operator der Ordnung $k$ mit $\sigma_{P_0-P,k}|_{x_0} = 0$, kann man $\mathcal{U}'$ so wählen, daß $C_0 C \sup_{\mathcal{U}'} |\sigma_{P_0-P,k}| \leq \frac{1}{2}$;* für den Operator** $\tilde{P} = \varphi(P_0 - P)$ ist dann $C_0 C \sup_{T^n} |\sigma_{\tilde{P},k}| \leq \frac{1}{2}$ und $(P_0-P)f = \tilde{P}f$ falls $f \in \Gamma(E)$, $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. Für solche $f$ haben wir also

$$\|f\|_{L^2_{r+k}} \leq C(\|Pf\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r}) +$$

$$+ C_0 C \sup_{T^n} |\sigma_{\tilde{P},k}| \cdot \|f\|_{L^2_{r+k}} + \tilde{C}\|f\|_{L^2_{r+k-1}},$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2}\|f\|_{L^2_{r+k}} \leq C(\|Pf\|_{L^2_r} + \|f\|_{L^2_r}) +$$

* $C_0$ wie auf Seite 79 | ** $\tilde{P}$ ist ein Operator über $T^n$



$$+ \tilde{C}\|f\|_{L^2_{r+k-1}}.$$

Unsere Behauptung folgt nun aus der Ungleichung für 3 Sobolev-Normen (falls $k > 1$, wie auf Seiten 65-66) und ist trivial wenn $k = 1$.

c) Der allgemeine Fall folgt nun genauso wie auf Seiten 67-68.

Sei $E = T^n \times V$, $\langle\,,\rangle$, $\nabla^A$, $m$ wie vorhin, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| \leq 1$, so daß $h$ als ein Element der Gruppe $T^n$ betrachtet werden kann. Für $f \in \Gamma(E)$, d. h. $f: T^n \xrightarrow{C^\infty} V$, sei $\tau_h f \in \Gamma(E)$ mit $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$. Die lineare Abbildung $\tau_h: \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ ist $C^\infty$-stetig, und hat den "formal adjungierten" Operator $\tau_h^* = \tau_{-h}$, so daß sie die natürliche Fortsetzung $\tau_h: \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}} \to \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$ besitzt mit $(\tau_h v)(\varphi) = v(\tau_{-h}\varphi)$, $v \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$, $\varphi \in \Gamma(E)$. Da $\tau_h \chi_\alpha = e^{i\langle h,\alpha\rangle}\chi_\alpha$, haben wir $(\tau_h v)^\wedge(\alpha) = e^{i\langle h,\alpha\rangle}\hat{v}(\alpha)$. Somit ist $\|\tau_h v\|_k = \|v\|_k$, d. h. $\tau_h$ ist eine Isometrie von $L^2_k(E)$ für alle

$k \in \mathbb{Z}$. Für $h \neq 0$ mit $|h| \le 1$ setzen wir

$$v^h = \frac{1}{|h|}\left(\tau_h v - v\right),$$

$v \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$.

LEMMA. Sei $v \in L^2_k(E)$ über $T^n$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $v \in L^2_{k+1}$

(ii) Es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $\|v^h\|_k \le C$ für alle $h$ mit $h \neq 0$, $|h| \le 1$.

<u>Beweis</u>. (i) → (ii). Da $(v^h)^\wedge(\alpha) = \dfrac{e^{i\langle h,\alpha\rangle}-1}{|h|}\hat{v}(\alpha)$, und $|e^{i\langle h,\alpha\rangle}-1|^2 = (\cos\langle h,\alpha\rangle - 1)^2 + \sin^2\langle h,\alpha\rangle =$
$= 2(1-\cos\langle h,\alpha\rangle) = 4\sin^2\dfrac{\langle h,\alpha\rangle}{2}$,
ist

$$|(v^h)^\wedge(\alpha)|^2 = \frac{4}{|h|^2}\sin^2\frac{\langle h,\alpha\rangle}{2}\,|\hat{v}(\alpha)|^2$$

und $\|v^h\|_k^2 = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^k \cdot \frac{4}{|h|^2}\sin^2\frac{\langle h,\alpha\rangle}{2}|\hat{v}(\alpha)|^2 \le$

$\le \sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^{k+1}|\hat{v}(\alpha)|^2 = \|v\|^2_{k+1}$,

da $4\sin^2\frac{\langle h,\alpha\rangle}{2} \le |h|^2|\alpha|^2$. Deshalb folgt (ii) aus (i). Sei nun $v \in L^2_k(E)$ und



$\|v^h\|_k \le C$ für $h \neq 0$, $|h| \le 1$. Für $h = t\partial_j$, $|t| \le 1$, haben wir, für alle $N \geq 0$,

$$C^2 \geq \lim_{t\to 0} \sum_{|\alpha|\le N} (1+|\alpha|^2)^k \,|(v^{t\partial_j})^\wedge(\alpha)|^2 =$$

$$= 4\lim_{t\to 0}\sum_{|\alpha|\le N}(1+|\alpha|^2)^k \cdot \frac{\sin^2(t\alpha_j/2)}{t^2}\,|\hat{v}(\alpha)|^2 =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le N}(1+|\alpha|^2)^k |\alpha_j|^2 |\hat{v}(\alpha)|^2.$$ Also

$$\sum_{|\alpha|\le N}(1+|\alpha|^2)^{k+1}|\hat{v}(\alpha)|^2 \leq n\,C^2 + \|v\|_k^2,$$

d.h. $\|v\|^2_{k+1} \leq nC^2 + \|v\|_k^2 < \infty$. Somit ist unser Lemma bewiesen.

SATZ. Seien $E, E'$ triviale komplexe Vektorbündel über dem Torus $T^n$, $\nabla^A, \nabla^{A'}$ flache kovariante Ableitungen, $\langle\,,\rangle, \langle\,,\rangle'$ konstante Skalarprodukte in $E$ bzw. $E'$, $m$ die euklidische Metrik auf $T^n$. Ist $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol und $v \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$ eine Distribution mit $Pv \in L^2_r(E)$ $(r \in \mathbb{Z})$, so liegt $v$ in $L^2_{r+k}(E)$.

Beweis. Es genügt die folgende Implikation zu beweisen:

Ist $s \in \mathbb{Z}$, $v \in L^2_{s+k}(E)$ und $Pv \in L^2_{s+1}(E)$, dann $v \in L^2_{s+k+1}$.

Die Voraussetzung dieser Implikation ist nämlich durch mindestens ein $s < r$ erfüllt (Seite 71), so daß wir nach endlich vielen Schritten $v \in L^2_{r+k}$ erreichen.

Für $h \in T^n$, $h \neq 0$, $|h| \leq 1$, sei $P^h$ der Operator mit $P^h f = \sum_{j_1 \cdots j_k} (a_{j_1 \cdots j_k})^h \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f + \ldots + a^h \cdot f$, wobei

$$Pf = \sum_{j_1 \cdots j_k} a_{j_1 \cdots j_k} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f + \ldots + a \cdot f.$$

Da die $a_{j_1 \cdots j_k}$ $C^1$-Funktionen sind, haben wir

$$\sup_{T^n} |\sigma_{P^h,k}| \leq C_1$$

mit einer von $h$ unabhängigen Zahl $C_1$. Wir haben

$$P(v^h) = (Pv)^h - P^h(\tau_h v)$$

für alle $v \in \Gamma(E)^*_{\mathbb{C}}$. Dies gilt offenbar für $v \in \Gamma(E)$, so daß es für beliebige



Distributionen aus der Definition folgt. Ist nun $v \in L^2_{s+k}(E)$, $Pv \in L^2_{s+1}(E)$, so

$$\|v^h\|_{s+k} \leq C(\|P(v^h)\|_s + \|v^h\|_s)$$

(die Ungleichung von Friedrichs). Es genügt nun für $\|v^h\|_{s+k}$ eine von $h$ unabhängige obere Schranke zu finden. Wir haben $\|v^h\|_s \leq$ const. (genauer $\|v^h\|_s \leq \|v\|_{s+1}$, s. Seite 85). Andererseits

$$\|P(v^h)\|_s \leq \|(Pv)^h\|_s + \|P^h(\tau_h v)\|_s$$

und $\|(Pv)^h\|_s \leq \|Pv\|_{s+1}$ (Seite 85), während (vgl. Seite 79)

$$\|P^h(\tau_h v)\|_s \leq C_0 \sup_{T^n} |\sigma_{P^h,k}| \cdot \|\tau_h v\|_{s+k} + C\|\tau_h v\|_{s+k-1} \leq C_0 C_1 \|v\|_{s+k} + C\|v\|_{s+k-1},$$

weil die $\tau_h$ Isometrien sind. Somit ist der Satz bewiesen [die Konstante $C$ ist von $h$ unabhängig, weil alle Ableitungen jeder festen Ordnung von den Koeffizienten von $P^h$ gemeinsam, von $h$ unabhängig, beschränkt sind, denn $P$ hat $C^\infty$-Koeffizienten].

Seien $E, X, \nabla^A, \langle,\rangle, m$ wie vorhin, $E', X, \nabla^{A'}, \langle,\rangle', m$ ebenso. Für jede Distribution $v \in \Gamma_0(E)^*$ und $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\|v\|_{L^2_k} = \|v\|_{L^2_k(E)} = \sup\left\{ \frac{|v(\varphi)|}{\|\varphi\|_{L^2_{-k}}} : \varphi \in \Gamma_0(E), \varphi \text{ nicht identisch } 0 \right\}.$$

Ist $v \in L^2_k(E)$, so stimmt diese Definition mit der $L^2_k$-Norm überein; die Elemente von $L^2_k(E)$ sind nämlich genau die stetigen Funktionale auf $L^2_{-k}(E)$, und ihre $\|\cdot\|_{L^2_k}$-Norm ist die Funktionalnorm. Genauso sieht man, daß $\|v\|_{L^2_k} < \infty$ genau dann, wenn $v \in L^2_k(E)$.

Sei $\mathcal{U} \subset X$ eine offene Untermannigfaltigkeit. Jeder Distribution $v \in \Gamma_0(E)^*$ kann man ihre Einschränkung $v_{\mathcal{U}} \in \Gamma_0(E|_{\mathcal{U}})^*$ zuordnen, wobei $v_{\mathcal{U}}(\varphi) = v(\varphi)$ für $\varphi \in \Gamma_0(E|_{\mathcal{U}}) \subset \Gamma_0(E)$. Die Inklusion $(\Gamma_0(E|_{\mathcal{U}}), \|\cdot\|_{L^2_r}) \to (\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^2_r})$ ist isometrisch für $r \geq 0$ (für $r < 0$ ist sie aber, im allgemeinen, nicht mal stetig). Deshalb ist $\|v_{\mathcal{U}}\|_{L^2_k(E|_{\mathcal{U}})} \leq \|v\|_{L^2_k(E)}$ für $k \leq 0$ (aber nicht für $k > 0$!). Ist $\mathcal{U}$ relativ kompakt, so sind die "Normen" $\|\cdot\|_{L^2_k(E|_{\mathcal{U}})}$



in $\Gamma_0(E|_{\mathcal{U}})^*$ $(k \in \mathbb{Z})$ bis auf Äquivalenz von den Objekten $\nabla^A, \langle,\rangle, m$ auf $X$ unabhängig (vgl. Seiten 38–39).

Wir sagen, daß $v \in \Gamma_0(E)^*$ <u>lokal in $L^2_k$ liegt</u> $(k \in \mathbb{Z})$, Bezeichnung: $v \in L^2_{k,loc}(E)$, wenn $\varphi v \in L^2_k(E)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(X)$ (dabei operiert die Multiplikation mit $\varphi$ auf $v$ als Differentialoperator der Ordnung $0$). Der Unterraum $L^2_{k,loc}(E)$ von $\Gamma_0(E)^*$ enthält also $L^2_k(E)$. Außerdem ist $L^2_{k,loc}(E) \subset L^2_{l,loc}(E)$ falls $k \geq l$ und, wegen des Lemmas von Sobolew, $\Gamma(E) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} L^2_{k,loc}(E)$. Ist $X$ kompakt, so $L^2_{k,loc}(E) = L^2_k(E)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Um zu beweisen, daß $v \in \Gamma_0(E)^*$ in $L^2_{k,loc}(E)$ liegt, genügt es zu beweisen, daß $\varphi v \in L^2_k(E)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(X)$, deren Träger in kleinen Trivialisierungskarten von $E$ liegen (da jede Funktion in $C_0^\infty(X)$ eine

endliche Summe von solchen $\varphi$ ist).

Sei $\mathcal{U} \subset X$ eine offene Untermannigfaltigkeit, $v \in \Gamma_0(E)^*$ eine Distribution mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} v \subset \mathcal{U}$. Dann ist, für $k \in \mathbb{Z}$, $v \in L^2_k(E)$ genau dann, wenn $v_{\mathcal{U}} \in L^2_k(E/\mathcal{U})$. Für $k \geq 0$ haben wir sogar

$\|v\|_{L^2_k(E)} = \|v_{\mathcal{U}}\|_{L^2_k(E/\mathcal{U})}$. Die Inklusion

$(\Gamma_0(E/\mathcal{U}), \|\cdot\|_{L^2_k(E/\mathcal{U})}) \to (\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^2_k(E)})$ ist dann nämlich isometrisch und somit besitzt eine isometrische Fortsetzung $J: L^2_k(E/\mathcal{U}) \to L^2_k(E)$. Für $f \in L^2_k(E/\mathcal{U}) \subset L^2(E/\mathcal{U})$ ist $Jf \in L^2_k(E) \subset L^2(E)$ der Schnitt mit $Jf = f$ auf $\mathcal{U}$, $Jf = 0$ außerhalb $\mathcal{U}$ (fast überall); dies sieht man leicht, wenn man $f$ durch Schnitte aus $\Gamma_0(E)$ in $L^2_k(E/\mathcal{U})$ (und somit in $L^2(E/\mathcal{U})$) approximiert. Da $v = Jv_{\mathcal{U}}$ (weil $v$, $v_{\mathcal{U}}$ $L^2$-Schnitte sind), müssen die entsprechenden Normen gleich sein. Sei nun $k < 0$. Wir haben $\|v_{\mathcal{U}}\|_{L^2_k(E/\mathcal{U})} \leq$



$\leq \|v\|_{L^2_k(E)}$ (Seite 89). Andererseits, wählen wir $\varphi \in C^\infty_0(X)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{U}$ und $\varphi = 1$ auf einer Umgebung $\mathcal{U}'$ von $\operatorname{supp} v$. Somit ist $v = \varphi v$ (weil $v - \varphi v$ auf $\mathcal{U}'$ sowie auf $X \setminus \operatorname{supp}\varphi$ verschwindet, vgl. Seite 71). Für $h \in \Gamma_0(E)$ ist $\|\varphi h\|_{L^2_{|k|}(E)} \leq C\|h\|_{L^2_{|k|}(E)}$ ($C$ von $h$ unabhängig), woher $|v(h)| = |\varphi v(h)| = |v(\varphi h)| = |v_{\mathcal{U}}(\varphi h)| \leq \|v_{\mathcal{U}}\|_{L^2_k(E/\mathcal{U})} \|\varphi h\|_{L^2_{|k|}(E/\mathcal{U})} = \|v_{\mathcal{U}}\|_{L^2_k(E/\mathcal{U})} \|\varphi h\|_{L^2_{|k|}(E)} \leq C\|v_{\mathcal{U}}\|_{L^2_k(E/\mathcal{U})} \|h\|_{L^2_{|k|}(E)}$ und, deshalb, $\|v\|_{L^2_k(E)} \leq C\|v_{\mathcal{U}}\|_{L^2_k(E/\mathcal{U})}$.

(Daraus folgt, wenn man für $\mathcal{U}$ relativ kompakte Mannigfaltigkeiten nimmt, daß die Räume $L^2_{k,loc}(E)$ von $D^A, \langle,\rangle, m$ nicht abhängen; siehe Seiten 90–91).

Ist $\mathcal{U} \subset X$ eine offene Untermannigfaltigkeit und $v \in \Gamma_0(E/\mathcal{U})^*$ eine Distribution mit kompaktem Träger, so definieren wir die <u>tri</u>-

viale Fortsetzung $v' \in \Gamma_0(E)^*$ mit $v'_{\mathcal{U}} = v$ und $v_{(X \setminus \operatorname{supp} v)} = 0$ (es kann höchstens ein solches $v'$ geben, vgl. Seite 71). Existenz von $v'$: sei $\varphi \in C_0^\infty(X)$ eine Funktion mit $\varphi = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} v$ und mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathcal{U}$. Für $h \in \Gamma_0(E)$ setzen wir $v'(h) = v(\varphi h)$.

LEMMA. Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $E', X, \nabla^{A'}, \langle , \rangle', m$ ebenso, $P : \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol, $s \in \mathbb{Z}$. Ist $v \in \Gamma_0(E)^*$ eine Distribution mit $v \in L^2_{s+k,loc}(E)$ und $Pv \in L^2_{s+1,loc}(E')$, dann ist $v \in L^2_{s+k+1,loc}(E)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\varphi v \in L^2_{s+k+1}(E)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}'$, wobei $\mathcal{U}'$ eine kleine gemeinsame Trivialisierungskarte für



$E, E'$ ist, die mit dem euklidischen $n$-Ball diffeomorph ist. Wir können also annehmen, das $E|_{\mathcal{U}'} = \mathcal{U}' \times V$, $E'|_{\mathcal{U}'} = \mathcal{U}' \times V'$ und $\overline{\mathcal{U}}' \subset T^n$, wobei wir über $T^n$ die reellen Bündel $T^n \times V$, $T^n \times V'$ sowie deren komplexen Erweiterungen mit flachen kovarianten Ableitungen, und so weiter, betrachten. Die Einschränkung von $P$ auf $\mathcal{U}$ können wir zu einem Operator $\tilde{P} : \Gamma(T^n \times V) \to \Gamma(T^n \times V')$ mit injektivem Symbol fortsetzen: die Koeffizienten der lokalen Darstellung $Pf = \sum_{j_1 \cdots j_k} a_{j_1 \cdots j_k} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f + \cdots$ $\cdots + a_0 f$ von $P$ auf $\mathcal{U}'$ (in den kartesischen Koordinaten), wenn auf $\partial \mathcal{U}'$ eingeschränkt, sind zu Konstanten homotop, wobei in jedem Homotopiestadium man injektives $k$-Symbol hat (z. B. Homotopie durch Einschränkung von $a_{j_1 \cdots j_k}$ usw. auf immer kleinere konzentrische Sphären im Ball $\mathcal{U}'$). Mittels einer geeigneten $C^\infty$-Homotopie ~~deformiert man nun~~ $P$ auf $\mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}$ zu einem $\tilde{P}$ mit konstanten Koeffizienten auf einer Umgebung von $\partial \mathcal{U}'$, welches man weiter (konstant) auf $T^n$ fortsetzt. Sei $\varphi$ wie oben und wählen wir $\rho \in C_0^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp} \rho \subset \mathcal{U}'$, $\rho = 1$ auf $\mathcal{U}$. Nach Voraussetzung ist $\varphi v \in L^2_{s+k}(E)$ und $\varphi v = (\varphi v)_{\mathcal{U}} \in L^2_{s+k}(E|_{\mathcal{U}})$ (bezüglich der ursprünglichen Metrik $m$ und $\nabla^A, \langle , \rangle$), also auch $\varphi v \in L^2_{s+k}((T^n \times V)|_{\mathcal{U}})$ (bezüglich der Torusmetrik usw., weil $\bar{\mathcal{U}}$ kompakt ist), also* liegt die triviale Fortsetzung von $\varphi v$ auf $T^n$ (ebenfalls mit $\varphi v$ bezeichnet) in $L^2_{s+k}(T^n \times V)$. Genauso ist $\varphi P v \in L^2_{s+1}(T^n \times V')$, $\rho v \in L^2_{s+k}(T^n \times V)$. Wir haben (da $\tilde{P} = P$ auf $\mathcal{U}$)

$$\tilde{P}(\varphi v) = P(\varphi v) = \varphi \cdot P v + P' v$$

wobei $P'$ ein Operator der Ordnung $k-1$ ist, der außerhalb $\operatorname{supp} \varphi$ verschwindet. Also $P' v = P'(\rho v)$. Da $P'$ die (triviale) Fortsetzung auf $T^n$ besitzt, liegt (die triviale Fortsetzung von) $P'v$ in $L^2_{s+1}(T^n \times V')$. Also $\varphi v \in L^2_{s+k}(T^n \times V)$, $\tilde{P}(\varphi v) \in L^2_{s+1}(T^n \times V')$ woher (Satz auf Seite 86) $\varphi v \in L^2_{s+k+1}(T^n \times V)$.

* siehe die obige Bemerkung.



Also wieder $\varphi v \in L^2_{s+k+1}((T^n \times V)|_{\mathcal{U}})$, d.h. $\varphi v \in L^2_{s+k+1}(E|_{\mathcal{U}})$ und $\varphi v \in L^2_{s+k+1}(E)$. Somit ist das Lemma bewiesen.

Sei $P$ ein beliebiger Differentialoperator $\Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ der Ordnung $k$. Dann ist, für jede Distribution $v \in L^2_{r+k}(E)$ ($r \in \mathbb{Z}$) mit kompaktem Träger, $Pv \in L^2_r(E)$. Ist nämlich $\varphi \in C_0^\infty(X)$ mit $\varphi = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} v$, so $v = \varphi v$ und es gibt $C$ mit

$$\| P(\varphi f) \|_{L^2_r} \leq C \| \varphi f \|_{L^2_{r+k}}$$

für alle $f \in \Gamma_0(E)$ ((ii), Seite 57). Seien nun $f_q \in \Gamma_0(E)$ mit $f_q \xrightarrow[q\to\infty]{} v$ in $L^2_{r+k}$, so daß auch $\varphi f_q \to \varphi v = v$ in $L^2_{r+k}$ (und als Distributionen, woher $P(\varphi f_q) \to Pv$ als Distributionen). Wegen unserer Ungleichung ist aber $P(\varphi f_q)$ eine $L^2_r$-Cauchy-Folge; ihr $L^2_r$-Grenzwert muß mit dem Distributionsgrenzwert $Pv$ übereinstimmen, d.h.

$Pv \in L^2_r(E)$. Außerdem ist

$$P(L^2_{r+k,loc}(E)) \subset L^2_{r,loc}(E)$$

für $r \in \mathbb{Z}$. Beweis: Induktion bezüglich der Ordnung $k$ von $P$. Ist $k=0$, $v \in L^2_{r,loc}(E)$, $\varphi \in C^\infty_0(X)$, so $\varphi P v = P(\varphi v) \in L^2_r(E)$ (da $\varphi v \in L^2_r(E)$ kompakten Träger hat). Gilt die Inklusion für Operatoren aller Ordnungen $\leq k-1$, so, für $v \in L^2_{r+k,loc}(E)$ und $\varphi \in C^\infty_0(X)$, $\varphi P v = P(\varphi v) + P'v$, wobei $P'$ Ordnung $k-1$ hat. Es ist $P(\varphi v) \in$ $\in L^2_r(E)$, weil $\varphi v \in L^2_{r+k}(E)$ kompakten Träger hat. Außerdem $P'v \in L^2_{r+1,loc}(E)$ (induktive Voraussetzung). Ist nun $\rho \in C^\infty_0(X)$ eine Funktion mit $\rho = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp}\varphi$, so $\varphi P v = \rho\varphi P v = \rho P(\varphi v) +$ $+ \rho P' v \in L^2_r(E)$, für alle $\varphi$, d. h. $Pv \in$ $\in L^2_{r,loc}(E)$.



SATZ (Regularitätssatz für Operatoren mit injektivem Symbol). Seien $E, E'$ Vektorbündel über $X$, $P_0 : \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol (z. B. elliptisch). Ist $v \in \Gamma_0(E)^*$ eine Distribution mit $Pv \in L^2_{r,loc}(E')$, $r \in \mathbb{Z}$, so haben wir $v \in L^2_{r+k,loc}(E')$.

<u>Beweis</u>. Sei $\varphi \in C^\infty_0(X)$ beliebig, $\varphi_0 \in C^\infty_0(X)$ eine Funktion mit $\varphi_0 = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp}\varphi$. Da $\operatorname{supp}(\varphi_0 v)$ kompakt ist, gibt es $s_0 < r$ mit $\varphi_0 v \in L^2_{s_0+k}(E)$ (Seite 71). Wählen wir Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-s_0} \in C^\infty_0(X)$ mit $\varphi_{r-s_0} = \varphi$ und $\varphi_i = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp}\varphi_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, r-s_0-1$. Wir behaupten, daß $\varphi_i v \in L^2_{s_0+k+i}(E)$ für $i = 0, 1, \dots, r-s_0$. Für $i=0$ haben wir es schon. Induktiver Schritt: sei $\varphi_i v \in$ $\in L^2_{s_0+k+i}(E)$, $0 \leq i < r-s_0$. Es ist

$P(\varphi_{i+1}v) = \varphi_{i+1}Pv + P_i'v$, wobei $P_i'$ ein Differentialoperator der Ordnung $k-1$ ist, der außerhalb $\operatorname{supp}\varphi_{i+1}$ verschwindet. Also $P_i'v = P_i'(\varphi_i v)$ und, da $\varphi_i v \in L^2_{s_0+k+i}(E)$ kompakten Träger hat, $P_i'v \in L^2_{s_0+i+1}(E)$ (Seite 96). Andererseits, $\varphi_{i+1}Pv \in L^2_r(E) \subset L^2_{s_0+i+1}(E)$ und somit $P(\varphi_{i+1}v) \in L^2_{s_0+i+1}(E)$. Da aber $\varphi_{i+1}v = \varphi_{i+1}\varphi_i v \in L^2_{s_0+k+i}(E)$, folgt aus dem obigen Lemma (mit $\varphi_{i+1}v$ statt $v$ und $s = s_0+i$), daß $\varphi_{i+1}v \in L^2_{s_0+k+i+1,loc}(E)$, also $\varphi_{i+1}v = \varphi_i\varphi_{i+1}v \in L^2_{s_0+k+i+1}(E)$.

Insbesondere ist, für $i = r - s_0$, $\varphi v = \varphi_{r-s_0}v \in L^2_{r+k}(E)$. Da $\varphi$ beliebig war, ist damit unser Satz bewiesen.



FOLGERUNG. Seien $E, E'$ Vektorbündel über $X$, $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol. Ist $v \in \Gamma_0(E)^*$ eine Distribution mit $Pv \in \Gamma(E')$ (z. B. $Pv = 0$), so ist auch $v \in \Gamma(E)$.

FOLGERUNG. $E, E', X, P$ wie oben, $X$ kompakt. Ist $v \in \Gamma(E)^*$ eine Distribution mit $Pv \in L^2_r(E)$, so ist $v \in L^2_{r+k}(E)$.

[Tatsächlich, folgt die erste Folgerung daraus, daß $\Gamma(E) = \bigcap_s L^2_{s,loc}(E)$ und die zweite aus $L^2_{s,loc}(E) = L^2_s(E)$ falls $X$ kompakt (Seite 90)].

SATZ (die Ungleichung von Poincaré). Seien $E, E'$ Vektorbündel über der <u>kompakten</u> Mannigfaltigkeit $X$, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$. Dann gibt es $C = C_r > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: für alle $f \in L^2_{r+k}(E) \subset L^2(E)$ die zum Raum $\operatorname{Ker} P \subset \Gamma(E) \subset L^2(E)$ $L^2$-orthogonal sind, ist

$$\|Pf\|_{L^2_r} \geq C\, \|f\|_{L^2_{r+k}} .$$

<u>Beweis</u>. Sonst finden wir eine Folge $f_q \in L^2_{r+k}(E)$ mit $\|f_q\|_{L^2_{r+k}} = 1$, $f_q \underset{L^2}{\perp} \operatorname{Ker} P$ und $\|Pf_q\|_{L^2_r} \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$. Wegen des Lemmas von Rellich (Seite 31) darf man annehmen, daß $f_q$ in $L^2_r(E)$ gegen eine Funktion $f \in L^2_r(E)$ konvergiert (indem man $f_q$ durch eine Teilfolge ersetzt), so daß $\|f\|_{L^2_{r+k}} = 1$*, und, da auch $f_q \to f$ in $L^2$, $f \underset{L^2}{\perp} \operatorname{Ker} P$.

Wendet man die Ungleichung von Friedrichs (Seite 63) auf die Differenzen $f_q - f_{q'}$ an, so sieht man, daß $f_q$ eine $L^2_{r+k}$-Cauchy-Folge und somit $L^2_{r+k}$-konvergent sein

* Dies folgt eigentlich erst später, wenn wir $f \in L^2_{r+k}$ haben.



muß, wobei der $L^2_{r+k}$-Grenzwert auch der $L^2_r$-Grenzwert ist, d. h. $f \in L^2_{r+k}(E)$ und $f_q \to f$ in $L^2_{r+k}$. Dabei ist $\|Pf\|_{L^2_r} = \lim_q \|Pf_q\|_{L^2_r} = 0$, also $f \in \operatorname{Ker} P \subset \Gamma(E)$ (Regularitätssatz, Seite 100), was mit $f \underset{L^2}{\perp} \operatorname{Ker} P$ und $\|f\|_{L^2_{r+k}} = 1$ unvereinbar ist. Mit diesem Widerspruch ist der Satz bewiesen.

LEMMA. Seien $E, E'$ Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit $X$, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$. Das Bild des stetigen Operators

$$P: L^2_{r+k}(E) \longrightarrow L^2_r(E')$$

ist dann in $L^2_r(E')$ abgeschlossen.

<u>Beweis</u>. Sei $V \subset L^2_{r+k}(E)$ der Unterraum aller $f$ mit $f \underset{L^2}{\perp} \operatorname{Ker} P$. Also ist

$L^2_{r+k}(E) = V \oplus \operatorname{Ker} P$ (weil man die Zerlegung in $L^2(E) \supset L^2_{r+k}(E)$ durchführen kann, da $\operatorname{Ker} P$ endlich dimensional und somit abgeschlossen ist, s. Seite 68). Das Bild $P(L^2_{r+k}(E)) = P(V)$ muß nun $L^2_r$-abgeschlossen sein. Ist nämlich $Pf_q \to h$ in $L^2_r(E')$, $f_q \in V$, so ist $f_q$ eine $L^2_{r+k}$-Cauchy-Folge (Ungleichung von Poincaré, S. 101), d. h. $f_q \to f$ in $L^2_{r+k}$ und $h = \lim_q Pf_q = Pf$, also $h \in P(L^2_{r+k}(E))$, womit das Lemma bewiesen ist.

SATZ. Seien $E, E'$ Vektorbündel über der <u>kompakten</u> Mannigfaltigkeit $X$, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein <u>elliptischer</u> Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$.

(i) Das Bild des Operators

$$P: L^2_{r+k}(E) \to L^2_r(E')$$

besteht aus allen $h \in L^2_r(E')$ die zu $\operatorname{Ker} P^*$ $L^2$-orthogonal sind.



(ii) Das Bild von

$$P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$$

besteht aus allen $h \in \Gamma(E')$ die zu $\operatorname{Ker} P^*$ $L^2$-orthogonal sind.*

<u>Bemerkung</u>. Da $P^*$ auch elliptisch ist (Seite 52), ist $\operatorname{Ker} P^*$ endlich dimensional und jede Distribution $v$ mit $P^* v = 0$ liegt in $\Gamma(E')$.

<u>Beweis</u>. Das Bild $P(L^2_{r+k}(E))$, bzw. $P(\Gamma(E))$ ist zu $\operatorname{Ker} P^*$ $L^2$-orthogonal, weil für alle $v \in \Gamma(E)^*$, $\varphi \in \Gamma(E')$, $(Pv)(\varphi) = v(P^*\varphi)$.

Sei nun $r = 0$. Das Bild von $P: L^2_k(E) \to L^2(E')$ ist abgeschlossen (Lemma, S. 102) und zu $\operatorname{Ker} P^*$ $L^2$-orthogonal. Ist, umgekehrt, $h \in L^2(E')$ zu diesem Bild $L^2$-orthogonal, so $(P^*h)(f) = h(Pf) = 0$ für alle $f \in \Gamma(E)$, d. h. $P^*h = 0$ und $h \in \operatorname{Ker} P^* \subset \Gamma(E')$ (Regula-

---

* Bezüglich beliebiger Skalarprodukte $\langle , \rangle, \langle , \rangle'$ in $E$ bzw. $E'$ und einer Metrik $m$ auf $X$.

ritätssatz für den elliptischen Operator $P^*$). Das Bild $P(L^2_k(E))$ muß also mit dem $L^2$-Orthogonalkomplement von $\operatorname{Ker} P^*$ übereinstimmen, was (i) für $r=0$ beweist. Ist $h \in L^2_r(E')$ (bzw. $h \in \Gamma(E')$) zu $\operatorname{Ker} P^*$ $L^2$-orthogonal, so gibt es $f \in L^2_k(E)$ mit $Pf = h$ (weil $h \in L^2(E')$). Wegen des Regularitätssatzes (Seite 100) ist $f \in L^2_{r+k}(E)$ (bzw. $f \in \Gamma(E)$). Damit ist der Satz bewiesen.

LEMMA. Seien $E', E, E''$ Vektorbündel mit kovarianten Ableitungen und Skalarprodukten wie vorhin über der <u>kompakten</u> Riemannschen Mannigfaltigkeit $X$, $P: \Gamma(E') \to \Gamma(E)$ und $Q: \Gamma(E) \to \Gamma(E'')$ Differentialoperatoren der gleichen Ordnung $k \geq 1$. Dabei ist die Faserdimension von $E$ positiv, eines der $E', E''$ darf aber auch Faserdimension 0 haben. Setzen wir voraus, daß für alle $\eta \in T^*X$ mit $\eta \neq 0$

$$\operatorname{Im}(\sigma_{P,k}(\eta)) = \operatorname{Ker}(\sigma_{Q,k}(\eta)).$$

Dann gilt folgendes:

(i) Der "Laplace-Operator"



$$\Delta = P \circ P^* + Q^* \circ Q : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

ist ein elliptischer selbstadjungierter Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $2k$ mit positivem oder negativem Symbol, je nachdem $k$ gerade oder ungerade ist.

(ii) Sei zusätzlich $Q \circ P = 0$. Für jedes $r \geq 0$ haben wir die folgende $L^2$-orthogonale Zerlegung von $L^2_r(E)$ in die direkte Summe von abgeschlossenen Unterräumen:

$$L^2_r(E) = P(L^2_{r+k}(E')) \oplus \operatorname{Ker} \Delta \oplus Q^*(L^2_{r+k}(E''))$$

und $P(L^2_{r+k}(E')) \oplus \operatorname{Ker} \Delta$ ist der Kern von $Q: L^2_r(E) \to \Gamma(E'')^*$, während $\operatorname{Ker} \Delta \oplus Q^*(L^2_{r+k}(E''))$ der Kern von $P^*: L^2_r(E) \to \Gamma(E')^*$ ist. Genauso haben wir die $L^2$-orthogonale Zerlegung

$$\Gamma(E) = P(\Gamma(E')) \oplus \operatorname{Ker} \Delta \oplus Q^*(\Gamma(E''))$$

und $P(\Gamma(E')) \oplus \operatorname{Ker} \Delta$ (bzw. $\operatorname{Ker} \Delta \oplus Q^*(\Gamma(E''))$) ist der Kern von $Q: \Gamma(E) \to \Gamma(E'')$ (bzw. von $P^*: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$).

(iii) Für $v \in \Gamma(E)^*$ ist $\Delta v = 0$ genau dann, wenn $Qv = 0$ und $P^* v = 0$.

Beweis. Für $x \in X$, $\eta \in T_x^* X$, $f \in E_x$, haben wir $\langle \sigma_{\Delta,2k}(\eta)(f), f \rangle = (-1)^k (\langle \sigma_P(\eta) \circ \sigma_P(\eta)^* f, f \rangle +$

$+ \langle \sigma_Q(\eta)^* \circ \sigma_Q(\eta)(f), f \rangle) =$

$= (-1)^k \left[ |\sigma_P(\eta)^*(f)|^2 + |\sigma_Q(\eta)(f)|^2 \right]$,

woher (i) folgt, weil $\mathrm{Ker}(\sigma_P(\eta)^*)$ das orthogonale Komplement von $\mathrm{Im}(\sigma_P(\eta))$ in $E_x$ ist; dabei $\sigma_P = \sigma_{P,k}$, $\sigma_Q = \sigma_{Q,k}$. Da außerdem $\langle \Delta f, f \rangle_{L^2} = \| P^* f \|_{L^2}^2 + \| Q f \|_{L^2}^2$ für $f \in \Gamma(E)$, folgt aus $v \in \Gamma(E)^*$, $\Delta v = 0$, daß $v \in \Gamma(E)$ (Regularitätssatz) und somit $P^* v = 0$, $Qv = 0$, was (iii) beweist (die umgekehrte Implikation ist trivial).

Unter den Voraussetzungen von (ii), haben wir die folgende Symmetrie: man kann $E'$ durch $E''$ (und umgekehrt), $P$ durch $Q^*$ und $Q$ durch $P^*$ ersetzen; die Voraussetzungen bleiben erfüllt und $\Delta$ bleibt unverändert.

Sei $0 \le r \le \infty$, wobei wir unter $L^2_\infty(E)$ usw. $\Gamma(E)$ verstehen. Für $h \in L^2_{r+k}(E')$ und



$\varphi \in \mathrm{Ker}\,\Delta \subset \Gamma(E)$ haben wir, indem wir $Ph$ als Distribution betrachten, $\langle Ph, \varphi \rangle_{L^2} = (Ph)(\varphi) = h(P^*\varphi) = 0$, denn $P^*\varphi = 0$ wegen (iii). Also, $P(L^2_{r+k}(E')) \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Ker}\,\Delta$ und, aus den genannten Symmetriegründen, $\mathrm{Ker}\,\Delta \underset{L^2}{\perp} Q^*(L^2_{r+k}(E''))$.

Ist $h \in L^2_{r+k}(E')$ und $s \in L^2_{r+k}(E'')$, so wählen wir $s_q \in \Gamma(E'')$ mit $s_q \to s$ in $L^2_{r+k}(E'')$, also $Q^* s_q \to Q^* s$ in $L^2_r(E) \subset L^2(E)$. Dann $\langle Ph, Q^* s \rangle_{L^2} = \lim_q \langle Ph, Q^* s_q \rangle_{L^2} =$

$= \lim_q (Ph)(Q^* s_q) = \lim_q (QPh)(s_q) = 0$, da $Q \circ P = 0$, wobei $Ph$ als Distribution betrachtet wird. Somit ist $P(L^2_{r+k}(E')) \underset{L^2}{\perp} Q^*(L^2_{r+k}(E''))$.

Um die gewünschte Zerlegung von $L^2_r(E)$ zu erreichen, nehmen wir $f \in L^2_r(E) =$

$= \mathrm{Ker}\,\Delta \oplus \Delta(L^2_{r+2k}(E))$ (Satz auf Seite 103 mit $\Delta^* = \Delta$). Also ist $f = f_0 + \Delta h$, $f_0 \in \mathrm{Ker}\,\Delta$, $h \in L^2_{r+2k}(E)$, d. h.

$f = f_0 + PP^*h + Q^*Qh \in \mathrm{Ker}\,\Delta + P(L^2_{r+k}(E')) + Q^*(L^2_{r+k}(E''))$, woraus folgt, daß $L^2_r(E)$

tatsächlich in die genannte direkte Summe zerlegbar ist. Da $Q \circ P = 0$, folgt aus (iii), daß $P(L^2_{r+k}(E')) \oplus \operatorname{Ker}\Delta$ im Kern von $Q: L^2_r(E) \to \Gamma(E'')^*$ enthalten ist. Andererseits ist dieser Kern zu $Q^*(L^2_{r+k}(E''))$ $L^2$-orthogonal, weil, für $f \in L^2_r(E)$ mit $Qf = 0$, $h \in L^2_{r+k}(E'')$ und $h_q \in \Gamma(E'')$ mit $h_q \to h$ in $L^2_{r+k}(E'')$, ist $Q^* h_q \to Q^* h$ in $L^2_r(E) \subset L^2(E)$ und $\langle f, Q^*h\rangle_{L^2} = \lim_q \langle f, Q^* h_q\rangle_{L^2} = \lim_q f(Q^* h_q) = \lim_q (Qf)(h_q) = 0$. Deshalb ist $P(L^2_{r+k}(E')) \oplus \operatorname{Ker}\Delta$ der Kern von $Q$ auf $L^2_r(E)$ und somit ein abgeschlossener Unterraum von $L^2_r(E)$ falls $r < \infty$ (da $Q: L^2_r(E) \to \Gamma(E'')^*$ stetig ist). Aus Symmetriegründen ist nun $\operatorname{Ker}\Delta \oplus Q^*(L^2_{r+k}(E''))$ der Kern von $P^*$ auf $L^2_r(E)$ (und abgeschlossen, falls $r < \infty$).
Da das $L^2$-Skalarprodukt auf $L^2_r(E) \subset L^2(E)$ stetig ist, sind die entsprechenden $L^2$-Orthogonalkomplemente $P(L^2_{r+k}(E'))$, $Q^*(L^2_{r+k}(E''))$ auch in $L^2_r(E)$ abgeschlossen, womit der Satz bewiesen ist.



## ANHANG: Korrekturen.

1. Das Lemma auf Seite 79 ist falsch formuliert und falsch bewiesen. Es soll folgendermaßen korrigiert werden:

a) Formulierung: In der letzten Zeile der Behauptung soll "$f \in L^2_{r+k}(E)$" statt "$f \in L^2_r(E)$" sein.

b) Beweis: Zunächst sei $k = 0$. Der auf S. 79–81 angegebene Beweis ist dann gültig (wobei man auf jeder Stelle $k = 0$ setzen muß). Andererseits ist, für $s \in \Gamma(E_l)$,
$$\|d^*_\nabla s\|_{L^2_r} \leq C_0' \|s\|_{L^2_{r+1}} \quad (r \geq 0)$$
((ii), Seite 57), wobei $C_0'$ nur von $n, l, r$ und der Faserdimension abhängt. Deshalb haben wir, für $s \in \Gamma(E_l)$, $\varphi \in \Gamma(E_{l+1})$
$$\left|\int \langle \nabla s, \varphi\rangle d\mu\right| = \left|\int \langle s, d^*_\nabla \varphi\rangle d\mu\right| \leq$$
$$\leq \|s\|_{L^2_{-r}} \|d^*_\nabla \varphi\|_{L^2_r} \leq C_0' \|s\|_{L^2_{-r}} \|\varphi\|_{L^2_{r+1}}$$
für alle $r \geq 0$, d. h. $\|\nabla s\|_{L^2_{-r-1}} \leq C_0' \|s\|_{L^2_{-r}}$;

die Ungleichung

$$\|\nabla s\|_{L^2_r} \leq C_0' \|s\|_{L^2_{r+1}}, \quad C_0' = C_0'(r)$$

gilt also für alle $r \in \mathbb{Z}$. Da $Pf =$ $= S_k \cdot \nabla^k f + \dots + S_0 \cdot f$, folgt unsere Behauptung an für den (beliebigen) Operator $P$.

2. Beweis auf Seite 101: In Zeile 6 von unten, soll man die Gleichung $\|f\|_{L^2_{r+k}} = 1$ weglassen. Stattdessen muß man

$$\|f\|_{L^2_{r+k}} = 1$$

auf Seite 102, Zeile 3 von oben, haben.



Anwendungen des obigen Lemmas*

(a) Sei $X$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $n = \dim X$, $0 \leq p \leq n$. Für $E' = \Lambda^{p-1} T^*X$, $E = \Lambda^p T^*X$, $E'' =$ $= \Lambda^{p+1} T^*X$, $P = d : \Omega^{p-1}(X) \to \Omega^p(X)$, $Q = d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$, $k = 1$, sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt und $Q \circ P = 0$; dabei ist $\Lambda^{-1} T^*X =$ $= \Lambda^{n+1} T^*X = 0$, das 0-dimensionale Bündel über $X$. Es ist nämlich $\sigma_{d,1}(\eta)(\omega) =$ $= \eta \wedge \omega$ und, für $\eta \neq 0$ und $\omega \in \Lambda^p T^*X$, $\eta \wedge \omega = 0$ genau dann, wenn es $\xi \in \Lambda^{p-1} T^*X$ gibt mit $\omega = \eta \wedge \xi$ (vgl. S. 53-54).

Der formal adjungierte Operator zu $P =$ $= d : \Omega^{p-1}(X) \to \Omega^p(X)$ ist $P^* = d^* =$ $= (-1)^{n(p-1)-1} * d * : \Omega^p(X) \to \Omega^{p-1}(X)$ (dabei braucht $X$ nicht orientierbar zu sein: $*$ ist, lokal, bis auf Vorzeichen definiert).

Der "Laplace-Operator" $\Delta_p = PP^* + Q^*Q =$

---

* Seite 105

$= (-1)^{n(p-1)-1} [d*d* + (-1)^n *d*d] : \Omega^p(X) \to \Omega^p(X)$

ist elliptisch, selbstadjungiert und sein Kern (der Raum $\mathcal{H}^p(X)$ der <u>harmonischen</u> $p$-Formen) besteht aus $\omega \in \Omega^p(X)$ mit $d\omega = 0$ und $d^*\omega = 0$ ((iii), Seite 107). Wegen (ii) auf Seite 106 ist $\operatorname{Ker} d|_{\Omega^p}$ (der Kern von $d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$) folgendermaßen zerlegbar:

$$\operatorname{Ker} d|_{\Omega^p} = d(\Omega^{p-1}(X)) \oplus \operatorname{Ker} \Delta_p .$$

Der de Rhamsche Kohomologieraum

$$H^p(X, \mathbb{R}) = (\operatorname{Ker} d|_{\Omega^p}) \big/ d(\Omega^{p-1}(X))$$

ist also kanonisch mit $\operatorname{Ker} \Delta_p$ isomorph. Deshalb haben wir für jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit $X$ und $0 \le p \le n$ den folgenden Satz:

(i) Jede Kohomologieklasse von geschlossenen $p$-Formen auf $X$ enthält genau eine harmonische Form; dabei ist jede harmonische Form geschlossen.



(ii) Die Kohomologieräume $H^p(X, \mathbb{R})$ sind endlich dimensional (Seite 68).

(iii) Ist $X$ orientierbar, so erfüllen die Betti-Zahlen $b_p(X) = \dim H^p(X, \mathbb{R})$, $p = 0, \dots, n$, die <u>Poincarésche Dualität</u>

$$b_p(X) = b_{n-p}(X).$$

Wegen der Formel für $\Delta_p$ (S. 110-111) kommutiert nämlich für jedes $p$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(X) & \xrightarrow{\Delta_p} & \Omega^p(X) \\ {\scriptstyle *}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle *} \\ \Omega^{n-p}(X) & \xrightarrow[\Delta_{n-p}]{} & \Omega^{n-p}(X) . \end{array}$$

Deshalb bildet $*$ den Raum $\mathcal{H}^p(X)$ isomorph auf $\mathcal{H}^{n-p}(X)$ ab.

(b) Sei $X$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Unter einem <u>elliptischen Komplex</u> über $X$ verstehen wir eine endliche Folge $E_0 = 0, E_1, \dots, E_q, E_{q+1} = 0$ von Vektorbündeln* über $X$ mit Differen-

* mit Skalarprodukten

tialoperatoren $P_i : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_{i+1})$, $i = 0, \ldots, q$, der gleichen Ordnung $k \geq 1$ mit der Eigenschaft, daß

$$P_{i+1} \circ P_i = 0 \quad , \quad i = 0, \ldots, q-1$$

und, für alle $\eta \in T_x^* X$ mit $\eta \neq 0$ die Symbolsequenz $0 \to (E_1)_x \xrightarrow[\sigma_{P_1,k}(\eta)]{} (E_2)_x \to \ldots$

$\ldots \xrightarrow[\sigma_{P_{q-1},k}(\eta)]{} (E_q)_x \to 0$ exakt ist ($x \in X$ beliebig); d. h., $Im(\sigma_{P_i,k}(\eta)) = Ker(\sigma_{P_{i+1},k}(\eta))$, $i = 0, \ldots, q-1$. Beispiel: der <u>De Rhamsche Komplex</u> von Differentialformen, vgl. (a).

Für so einen Komplex $\mathbb{E}$ bilden wir (Lemma, Seite 105) die Laplace-Operatoren $\Delta_i : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_i)$ (elliptisch, der wesentlichen Ordnung $2k$, selbst-adjungiert, mit $\Delta_i = P_{i+1}^* \circ P_i + P_{i-1} \circ P_i^*$, $i = 1, \ldots, q$), sowie die Kohomologie-



-Räume $H^i(\mathbb{E})$, $i = 1, \ldots, q$, mit

$$H^i(\mathbb{E}) = {}^{Ker\, P_i} \Big/ {}_{P_{i-1}(\Gamma(E_{i-1}))}.$$

Nach dem obigen Lemma ist jedes $H^i(\mathbb{E})$ mit $\mathcal{H}^i(\mathbb{E}) = Ker\, \Delta_i$ isomorph und somit endlich dimensional. Genauer, enthält jede Kohomologieklasse in $H^i(\mathbb{E})$ einen eindeutig bestimmten <u>harmonischen Schnitt</u> $f$ von $E_i$ (d. h. einen Schnitt mit $P_i f = 0$ und $P_{i-1}^* f = 0$; dies ist der <u>Satz von Hodge</u>).

(c) Seien $E', E, E''$ Vektorbündel mit Skalarprodukten über der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit $X$, $P : \Gamma(E') \to \Gamma(E)$, $Q : \Gamma(E) \to \Gamma(E'')$ Differentialoperatoren der gleichen Ordnung $k \geq 1$ mit der Eigenschaft, daß für alle $x \in X$, $\eta \in T_x^* X$ mit $\eta \neq 0$, die Symbolsequenz $0 \to E'_x \xrightarrow[\sigma_{P,k}(\eta)]{} E_x \xrightarrow[\sigma_{Q,k}(\eta)]{} E''_x \to$

$\to 0$ exakt ist (dabei darf $Q \circ P \neq 0$ sein, so daß $\mathbb{E} = (0, E', E, E'', 0)$ im allgemeinen kein elliptischer Komplex ist).

Für die Sequenzen $0 \to E' \xrightarrow[P]{} E$, $E \xrightarrow[Q]{} E'' \to 0$ gilt also die ganze Behauptung des obigen Lemmas, für $E' \xrightarrow[P]{} E \xrightarrow[Q]{} E''$ nur Behauptungen (i) und (iii). Deshalb haben wir die elliptischen, formal-selbstadjungierten Laplace-Operatoren $\Delta'$, $\Delta$, $\Delta''$ in $E'$, $E$, bzw. $E''$ und die endlich dimensionalen Räume der harmonischen Schnitte:

$\mathcal{H}^0(\mathbb{E}) = \operatorname{Ker} \Delta'$, $\mathcal{H}^1(\mathbb{E}) = \operatorname{Ker} \Delta$,

$\mathcal{H}^2(\mathbb{E}) = \operatorname{Ker} \Delta''$. Für jedes ganze $r \geq 0$ ist

$$L^2_r(E') = \mathcal{H}^0(\mathbb{E}) \oplus P^*(L^2_{r+k}(E))$$

und

$$L^2_r(E'') = Q(L^2_{r+k}(E)) \oplus \mathcal{H}^2(\mathbb{E})$$

($L^2$-orthogonale Zerlegungen). Außerdem gilt

$$\mathcal{H}^0(\mathbb{E}) = \{v \in \Gamma(E')^* : Pv = 0\},$$



$$\mathcal{H}^1(\mathbb{E}) = \{v \in \Gamma(E)^* : Qv = 0,\ P^*v = 0\},$$

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{E}) = \{v \in \Gamma(E'')^* : Q^*v = 0\}.$$

Ein wichtiger Spezialfall der in (c) beschriebenen Situation entsteht folgendermaßen. Sei $X$ eine kompakte, orientierte, vier-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, $G$ eine kompakte Lie-Gruppe, $P \to X$ ein $G$-Prinzipalbündel, $\rho: G \to \operatorname{Aut}(V)$ eine Darstellung von $G$ im Vektorraum $V$, $\underline{V} = P \times_\rho V$, $A$ ein $G$-Zusammenhang in $V$. Die Folge

$$0 \to \Omega^0(X, \underline{V}) \xrightarrow[d_A]{} \Omega^1(X, \underline{V}) \xrightarrow[d_A^-]{} \Omega^2_-(X, \underline{V}) \to 0,$$

wobei $d_A^- = \pi_- \circ d_A$ ($\pi_- : \Omega^2(X, \underline{V}) \to \Omega^2_-(X, \underline{V})$ ist die Orthogonalprojektion) erfüllt dann die Voraussetzungen von (c) (exakte Symbolsequenz). Um dies zu sehen, genügt es die Surjektivität des Symbols von $d_A^-$ zu beweisen. Der formal adjungierte Operator zu $d_A^-$ ist aber die Einschränkung von $d_A^*$ auf $\Omega^2_-(X,\underline{V}) \subset \Omega^2(X,\underline{V})$ (weil $\Omega^2 = \Omega^2_+ \oplus \Omega^2_-$, orthogonal bezüglich $L^2$). Für $\omega \in \Omega^2_-(X,\underline{V})$ ist also $(d_A^-)^*\omega = -*d_A*\omega = *d_A\omega$. Das Symbol von $(d_A^-)^*$ ist also injektiv: sei $\eta \in T_x^*X$, $\omega \in \Lambda^2_- T_x^*X \otimes \underline{V}_x$, mit $\eta \neq 0$ und $0 = (\sigma_{(d_A^-)^*,1}(\eta))(\omega) = *(\eta\wedge\omega)$. Da $\eta\wedge\omega = 0$, ist $\omega = \eta\wedge\zeta$ mit $\zeta \in T_x^*X \otimes \underline{V}_x$; man kann $\omega$ und $\zeta$ als reellwertige Formen betrachten, indem man die einzelnen Komponenten bezüglich einer Basis von $\underline{V}_x$ nimmt. Also darf man $\zeta$ zu $\eta$ orthogonal wählen, woher $\omega = ae_1\wedge e_2$ und $-\omega = *\omega = ae_3\wedge e_4$ für eine orthonormale Basis $e_1,\dots,e_4$ von $T_x^*X \simeq T_xX$, was nur möglich ist, wenn



$a=0$ und $\omega = 0$.

Unsere Folge ist ein elliptischer Komplex ($d_A^-\circ d_A = 0$) genau dann, wenn $A$ ein selbst-dualer Zusammenhang ist ($F^- = 0$), weil $d_A^-\circ d_A = \pi_-\circ(d_A\circ d_A) = \pi_-\circ F = F^-$.

<u>Definition</u>. Seien $V_1, V_2$ Banach-Räume, $L: V_1 \to V_2$ eine stetige lineare Abbildung. $L$ heißt ein <u>Fredholm-Operator</u> wenn $\dim \operatorname{Ker} L < \infty$ und $\dim\left(V_2/L(V_1)\right) < \infty$; dann definiert man den <u>Index</u> von $L$,

$$\operatorname{Index}(L) = \dim \operatorname{Ker} L - \dim\left(V_2/L(V_1)\right) \in \mathbb{Z}.$$

<u>Beispiel</u>. Seien $E_1, E_2$ Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit $X$, $P:\Gamma(E_1)\to\Gamma(E_2)$ ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$. Dann ist $P: L^2_{r+k}(E_1) \to L^2_r(E_2)$ ein Fredholm-Operator mit dem Index

$$\operatorname{Index}(P) = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Ker} P^*$$

(Seiten 68 und 103-104); dabei wird $P^*$ mit Hilfe einer Riemannschen Metrik in $X$ sowie Skalarprodukte in $E_1, E_2$ gebildet.

Betrachten wir wieder $E', E, E'', X$, $P, Q$ wie in (c) (Seite 114). Wir behaupten, daß der Differentialoperator

$$Q + P^* : \Gamma(E) \to \Gamma(E'' \oplus E')$$

elliptisch ist. Da $\dim E_x = \dim E'_x + \dim E''_x$, genügt es die Injektivität seines Symbols zu beweisen. Ist aber $\eta \in T^*_x X$, $\eta \neq 0$, und $f \in E_x$ mit $0 = \sigma_{Q+P^*,k}(\eta)(f) =$
$= \sigma_{Q,k}(\eta)(f) + (-1)^k(\sigma_{P,k}(\eta))^*(f)$, so
$f \in \mathrm{Ker}(\sigma_{Q,k}(\eta)) \cap \mathrm{Ker}(\sigma_{P,k}(\eta))^* =$
$= \mathrm{Ker}(\sigma_{Q,k}(\eta)) \cap [\mathrm{Im}(\sigma_{P,k}(\eta))]^{\perp} = \{0\}$.

Sei nun $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, und $\mathrm{Ker}_{r+k} P^* =$ $= \{v \in L^2_{r+k}(E) : P^* v = 0\}$. Betrachten wir die Einschränkung

$$L : \mathrm{Ker}_{r+k} P^* \to L^2_r(E'')$$



von $Q : L^2_{r+k}(E) \to L^2_r(E'')$ auf den abgeschlossenen (Hilbert-)Raum $\mathrm{Ker}_{r+k} P^*$.

<u>Behauptung</u>. $L$ ist ein Fredholm-Operator mit

$$\mathrm{Index}(L) = \mathrm{Index}(Q + P^*) + \dim \mathcal{H}^0(\mathbb{E}).$$

<u>Beweis</u>. Wegen der Zerlegung von $L^2_r(E')$ (Seite 115) hat das Bild $P^*(L^2_{r+k}(E)) \subset$ $\subset L^2_r(E')$ die endliche Kodimension $\dim \mathcal{H}^0(\mathbb{E})$. Der Rest folgt nun aus dem folgenden algebraischen Lemma (Übung!), wobei wir die folgende Terminologie verwenden: eine Basis $\mathcal{B}$ des (endlich oder unendlichdimensionalen) Vektorraumes $\Omega$ über dem Unterraum $\Omega'$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \Omega$ von Vektoren, deren Äquivalenzklassen eine Basis von $\Omega/\Omega'$ bilden.

<u>Lemma</u>. Seien $\Omega', \Omega, \Omega''$ Vektorräume, $Q : \Omega \to \Omega''$, $\delta : \Omega \to \Omega'$ lineare Abbildungen, $\mathcal{B}$ eine Basis von $\Omega''$ über $Q(\mathrm{Ker}\,\delta)$. Dann ist die Menge

$\mathcal{B} \oplus 0$ unabhängig über $(Q+\delta)(\Omega)$ in $\Omega'' \oplus \Omega'$, und, wenn man sie zu einer Basis

$$\mathcal{B} \oplus 0 \ \cup \ \mathcal{F}$$

von $\Omega'' \oplus \Omega'$ über $(Q+\delta)(\Omega)$ vervollständigt, bilden die $\Omega'$-Komponenten der Elemente von $\mathcal{F}$ (injektiv nach $\Omega'$ projiziert) eine Basis von $\Omega'$ über $\delta(\Omega)$.

Hinweis zum Beweis des Lemmas: lineare Unabhängigkeit. Ist $\mathcal{B} = \{b_s\}_{s\in S}$, $\mathcal{F} = \{x_t \oplus y_t\}_{t\in T}$ und $\sum_t \mu_t y_t = \delta\omega$, $\mu_t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ (alle Summen endlich), so gibt es $\lambda_s \in \mathbb{R}$, $\eta \in \Omega$ mit $\delta\eta = 0$ und $\sum_t \mu_t x_t = \sum_s \lambda_s b_s + Q\eta$, sowie $\nu_s \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \Omega$ mit $\delta\xi = 0$ und $Q\omega = \sum_s \nu_s b_s + Q\xi$ (die Basis-Eigenschaft von $\mathcal{B}$). Deshalb ist $\sum_s (\nu_s - \lambda_s) b_s \oplus 0 + \sum_t \mu_t x_t \oplus y_t = (Q+\delta)(\omega + \eta - \xi)$, woher $\mu_t = 0$.



Unsere Behauptung (S. 120) folgt nun aus diesem Lemma mit $\delta = P^*$, $\Omega = L^2_{r+k}(E)$, $\Omega' = L^2_r(E')$, $\Omega'' = L^2_r(E'')$. Es ist nämlich $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker}(Q + P^*) \subset \Gamma(E)$. Nach dem Lemma ist auch

$$\dim\left( \frac{L^2_r(E'') \oplus L^2_r(E')}{(Q+P^*)(L^2_{r+k}(E))} \right) =$$

$$= \dim\left( \frac{L^2_r(E'')}{\operatorname{Im} L} \right) + \dim\left( \frac{L^2_r(E')}{P^*(L^2_{r+k}(E))} \right)$$

(Summe von Kardinalzahlen). Deshalb ist $L$ ein Fredholm-Operator mit dem auf S. 120 angegebenen Index. Bemerken wir auch, daß

$$\operatorname{Ker}(Q+P^*) = \operatorname{Ker} L = \mathcal{H}^1(\mathbb{E})$$

(vgl. Seite 116).

Sei nun zusätzlich $Q \circ P = 0$, so daß $\mathbb{E}$ ein elliptischer Komplex ist. Dann gilt

$$\operatorname{Index}(Q + P^*) = -\dim \mathcal{H}^0(\mathbb{E}) + \dim \mathcal{H}^1(\mathbb{E}) - \dim \mathcal{H}^2(\mathbb{E}).$$

Für $f = f'' \oplus f' \in \Gamma(E'' \oplus E')$ ist nämlich

$(Q+P^*)^* f = Q^* f'' + P f'$ (vgl. die Definition des formal adjungierten Operators). Da $\operatorname{Index}(Q+P^*) = \dim \operatorname{Ker}(Q+P^*) - \dim \operatorname{Ker}(Q+P^*)^* = \dim \mathcal{H}^1(\mathbb{E}) - \dim \operatorname{Ker}(Q+P^*)^*$, brauchen wir nur den Raum $\operatorname{Ker}(Q+P^*)^*$ zu finden. Sei $f = f'' \oplus f' \in \Gamma(E'' \oplus E')$ mit $0 = (Q+P^*)^* f = Q^* f'' + P f'$. Wenden wir darauf $Q$ an, so $0 = QQ^* f''$, woher $Q^* f'' = 0$, da $\|Q^* f''\|^2_{L^2} = \langle QQ^* f'', f'' \rangle_{L^2}$. Also, $f'' \oplus f' \in \operatorname{Ker}(Q+P^*)^*$ genau dann, wenn $Q^* f'' = 0$ und $P f' = 0$, d.h. $\operatorname{Ker}(Q+P^*)^* = \operatorname{Ker} Q^* \oplus \operatorname{Ker} P$, woher unsere Behauptung folgt (vgl. S. 115-116).

Seien nun $E, \nabla^A, \langle\,,\,\rangle, X, m$ wie vorhin, $p \geq 1$ eine reelle Zahl, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Im Raum $\Gamma_0(E)$ definieren wir die Sobolew-Norm $\|\cdot\|_{L^p_k}$ durch

$$\|f\|_{L^p_k} = \sum_{r=0}^{k} \| |\nabla^r f| \|_{L^p} .$$



Für $p = 2$ ist diese Norm mit der früher definierten Sobolew-Norm nicht identisch, aber trotzdem äquivalent; somit bleiben die bisher bewiesenen Abschätzungen auch für die neue Normen $\|\cdot\|_{L^2_k}$ erfüllt. Die Definition von $\|f\|_{L^p_k}$ hat auch Sinn für $f \in C^k_0(E)$.

Den Sobolew-Raum $L^p_k(E)$ definieren wir als die Komplettierung von $(\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^p_k})$; somit ist $L^p_k(E)$ ein Banach-Raum. Diese Sobolew-Normen und -Räume haben die folgenden Eigenschaften:

(i) Für $k \leq l$ und $f \in \Gamma_0(E)$ ist $\|f\|_{L^p_k} \leq \|f\|_{L^p_l}$, d.h. die Identitätsabbildung $\Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E)$ besitzt eine stetige Fortsetzung $L^p_l(E) \to L^p_k(E)$, die man Inklusion nennt.

(ii) Sei $X$ kompakt, $1 \leq p < p'$, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ meßbar. Wir haben die Hölldersche Ungleichung

$$\|\varphi\|^p_{L^p} = \int 1 \cdot |\varphi|^p d\mu \leq \left(\int 1^{\frac{p'}{p'-p}} d\mu\right)^{1-\frac{p}{p'}} \cdot \left(\int |\varphi|^{p \cdot \frac{p'}{p}} d\mu\right)^{\frac{p}{p'}} = \mu(X)^{1-p/p'} \cdot \|\varphi\|^p_{L^{p'}} ,$$ d.h.

$\|\varphi\|_{L^p} \le \mu(X)^{(1/p - 1/p')} \cdot \|\varphi\|_{L^{p'}}$. Wendet man dies auf $\varphi = |\nabla^r f|$ an, so sieht man, daß (für $X$ kompakt und $1 \le p \le p'$) die Identitätsabbildung $\Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E)$ eine stetige Fortsetzung $L^{p'}_k(E) \to L^p_k(E)$ hat, die man ebenso Inklusion nennt ($k \ge 0$ beliebig).

(iii) Man sieht leicht, daß das Lokalisierungsprinzip (S. 22) auch für die Normen $\|\cdot\|_{L^p_k}$ gilt.

(iv) Ist $X$ kompakt, so hängen die Normen $\|\cdot\|_{L^p_k}$, bis auf Äquivalenz, nicht von $\nabla^A, \langle , \rangle$ und $m$ ab (wegen (iii)).

(v) Genauso wie auf S. 29 beweist man, daß die Inklusionen in (i) injektiv sind. Man kann also $L^p_k(E)$ als gewisse Unterräume von $L^p_0(E) = L^p(E)$ betrachten. Dabei werden die Inklusionen in (i) und (ii) zu mengentheoretischen Inklusionsabbildungen. Ist $X$ kompakt, so hängen die Räume $L^p(E)$, sowie alle Unterräume $L^p_k(E)$, nicht von $\nabla^A, \langle , \rangle, m$ ab.



(vi) Das Lemma von Sobolew: Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $X$ kompakt, $p \ge 1$, $n = \dim X$. Sind $k, r \ge 0$ natürliche Zahlen mit

$$k > \frac{n}{p} + r,$$

so $L^p_k(E) \subset C^r(E)$ und die Inklusionsabbildung ist stetig. Beweis: Wie auf S. 25–27, wobei man in der ersten Abschätzung auf S. 27 die Höldersche Ungleichung für $p$ anwendet.

(vii) Das Lemma von Rellich: Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $X$ kompakt, $p \ge 1$, $k, l$ natürlich, $0 \le k < l$. Dann ist die Inklusion $L^p_l(E) \to L^p_k(E)$ ein kompakter Operator. Beweis: Wie auf S. 31–36.

LEMMA (Die Ungleichung von Gagliardo und Nirenberg, 1958). Sei $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, d. h. ein Schnitt des trivialen Bündels $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (mit trivialer kovarianten Ableitung $\nabla^A$, konstantem Skalarprodukt $\langle , \rangle$ und der euklidischen Metrik $m$), $n \ge 2$. Dann ist

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \le \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i \varphi\|_{L^1}^{1/n}.$$

<u>Beweis</u>. Sei $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ fest.

a) $|\varphi(x^{(0)})| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_i \varphi(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| dt$.

Tatsächlich, für $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$, ist

$$\Big|\int_{-\infty}^{t_0} \psi\Big| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\psi| \text{ für alle } t_0, \text{ weil}$$

$$\int_{\{t:\psi(t)\geq 0\}} |\psi| = \int_{\{t:\psi(t)<0\}} |\psi| = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\psi| \text{ und}$$

$$\Big|\int_{-\infty}^{t_0} \psi\Big| = \Big| \int_{\{t\leq t_0:\psi(t)\geq 0\}} |\psi| - \int_{\{t\leq t_0:\psi(t)<0\}} |\psi| \Big| \leq$$

$\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\psi|$. Die Ungleichung a) folgt nun aus $\varphi(x^{(0)}) = \int_{-\infty}^{x_i^{(0)}} \partial_i \varphi(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) dt$

mit $\psi(t) = \partial_i \varphi(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

b) $|\varphi(x^{(0)})|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \varphi| dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$

wobei $\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \varphi| dx_i = \int_{\mathbb{R}} |\partial_i \varphi(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| dt$.



Dies folgt sofort aus a) (Multiplikation, für verschiedene $i$).

c) Verallgemeinerte Höldersche Ungleichung: Sind $h_1, \dots, h_k$ meßbare Funktionen, $p_1, \dots, p_k > 1$ reelle Zahlen, $q \geq 1$ reell, $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{q}$, so

$$\|h_1 \cdots h_k\|_{L^q} \leq \|h_1\|_{L^{p_1}} \cdot \ldots \cdot \|h_k\|_{L^{p_k}}$$

(dies folgt leicht durch Induktion bezüglich $k$).

d) Seien $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen, $f_i$ von der $i$-ten Koordinate $x_i$ unabhängig, $i = 1, \dots, n$. Dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1 \cdots f_n|^{\frac{1}{n-1}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1|\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \ldots \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_n|\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

wobei $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i| = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)| dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$.

Beweis von d). Wegen c) mit $k = n-1$, $p_1 = \dots = p_k = n-1$, $q = 1$, $h_i = |f_{i+1}|^{\frac{1}{n-1}}$, $i = 1, \dots, n-1$, haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1 \cdots f_n|^{\frac{1}{n-1}} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1|^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2 \cdots f_n|^{\frac{1}{n-1}} dx_1\right) dx_2 \dots dx_n \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1|^{\frac{1}{n-1}} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}} |f_2| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \ldots \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} |f_n| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_2 \ldots dx_n .$$

Ebenso ist das letzte Integral, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f_2| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( |f_1|^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} |f| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \left( \int_{\mathbb{R}} |f_n| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \right) dx_2 \right] \times$$

$\times\, dx_3 \ldots dx_n$, wegen c) nicht größer als

$$\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f_2| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} |f_1| dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f_3| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \ldots$$

$$\ldots \times \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f_n| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot dx_3 \ldots dx_n .$$

Geht man mit den weiteren Veränderlichen $x_3, \ldots, x_n$ genauso vor, so erhält man, nach endlich vielen Anwendungen von c) mit $k = n-1$, $p_1 = \ldots = p_k = n-1$, die Ungleichung in d).

e) Beweis des Lemmas. Wendet man d) auf die Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} |\partial_i \varphi| dx_i$, so folgt aus b)



$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i \varphi\|_{L^1}^{\frac{1}{n-1}} ,$$

d.h.

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i \varphi\|_{L^1}^{1/n} ,$$

womit das Lemma bewiesen ist.

<u>Bemerkung</u>. Sei $V$ ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, $|\cdot|$ die entsprechende Norm in $V$, $\alpha > 1$ eine reelle Zahl, $f : \mathbb{R}^n \to V$ eine $C^1$-Funktion. Dann ist $|f|^\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ebenfalls eine $C^1$-Funktion und, für $i = 1, \ldots, n$,

$$\partial_i |f|^\alpha = \alpha |f|^{\alpha-1} \left\langle \frac{f}{|f|}, \partial_i f \right\rangle$$

in Punkten, wo $f \neq 0$, während $\partial_i |f|^\alpha = 0$ in Punkten, wo $f = 0$.

Tätsächlich, in Punkten wo $f \neq 0$, $|f|^\alpha$ ist $C^1$ und die obige Formel für $\partial_i |f|^\alpha$ gilt. Es ist auch $\partial_i |f|^\alpha = 0$ in inneren Punkten der Menge $f^{-1}(0)$. Nun sieht man leicht, daß $\partial_i |f|^\alpha$ sich stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzt.

SATZ (Die Sobolew-Ungleichungen). Seien $E, X, \nabla^A, \langle , \rangle, m$ wie vorhin, $X$ kompakt, $n = \dim X$, $p \in \mathbb{R}$.

(i) Ist $1 < p < n$, so gibt es $C > 0$ mit

$$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leq C \|f\|_{L^p_1}$$

für alle $f \in \Gamma(E)$; somit haben wir die stetige Inklusion $L^p_1(E) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(E)$. Insbesondere, für $n = 4$ und $p = 2$, $\|f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{L^2_1}$ und $L^2_1(E) \subset L^4(E)$.

(ii) Ist $1 < p < n$ und $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, so gibt es $C > 0$ mit

$$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}_{k-1}} \leq C \|f\|_{L^p_k}$$

für alle $f \in \Gamma(E)$; somit ist $L^p_k(E) \subset L^{\frac{np}{n-p}}_{k-1}(E)$ und der Inklusionsoperator ist stetig.

(iii) Seien $k, \ell \in \mathbb{Z}$, $k \geq \ell \geq 1$ und $1 < p < n/\ell$. Dann gibt es $C > 0$ mit



$$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-\ell p}}_{k-\ell}} \leq C \|f\|_{L^p_k}$$

für alle $f \in \Gamma(E)$; d.h. $L^p_k(E) \subset L^{\frac{np}{n-\ell p}}_{k-\ell}(E)$ und der Inklusionsoperator ist stetig.

<u>Beweis</u>. Wegen des Lokalisierungsprinzips (vgl. (iii), S. 125) dürfen wir annehmen, daß $X = B$ ein euklidischer Ball ist, $m$ die euklidische Metrik, $E = B \times V$ ein triviales Bündel, $\nabla^A$ eine triviale kovariante Ableitung und $\langle , \rangle$ ein konstantes Skalarprodukt. Für Funktionen $\varphi \in C^1_0(B)$ ist

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C \|\varphi\|_{L^1_1}, \text{ weil } \|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i \varphi\|_{L^1}^{1/n} \leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i \varphi\|_{L^1}$$

(Lemma auf S. 126 und die Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem algebraischen Mittelwert). Für $f \in C^\infty_0(E)$ und $\varphi = |f|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}$ haben wir $\varphi \in C^1_0(B)$ (Bemerkung, S. 130), woher

$$\|f\|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}_{L^{\frac{np}{n-p}}} = \|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C \|\varphi\|_{L^1_1} \leq$$

$$\leq \tilde{C} \left( \int |\varphi| + \sum_{i=1}^{n} \int |\partial_i \varphi| \right) =$$

$$= \tilde{C}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} \cdot |f| + \frac{(n-1)p}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n - f^{-1}(0)} |f|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} \langle \frac{f}{|f|}, \partial_i f\rangle\Big] \leq$$

$$\leq \tilde{C}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} \cdot |f| + \frac{(n-1)p}{n-p}\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} |\partial_i f|\Big].$$

Aus der Hölderschen Ungleichung

$$\int |h|\cdot|\psi| \leq \Big(\int |h|^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \Big(\int |\psi|^p\Big)^{1/p}$$

für $|h| = |f|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}$ und $|\psi| = |\partial_i f|$ oder $|\psi| = |f|$, folgt nun, daß

$$\|f\|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leq \tilde{C}\Big(\int |f|^{\frac{np}{n-p}}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big[\Big(\int |f|^p\Big)^{1/p} +$$

$$+ \frac{(n-1)p}{n-p}\sum_i \Big(\int |\partial_i f|^p\Big)^{1/p}\Big] \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{C}} \, \|f\|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}_{L^{\frac{np}{n-p}}} \|f\|_{L^p_1}, \quad \text{woher}$$

$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leq \tilde{\tilde{C}} \|f\|_{L^p_1}$. Damit ist (i) bewiesen.



(ii) Wir haben $\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}_{k-1}} = \sum_{r=0}^{k-1} \|\nabla^r f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}}$, wobei man $\nabla^r f$ als einen Schnitt von $E_r$ betrachtet. Da (i) auch für $E_r$ gilt, ist

$$\|\nabla^r f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leq C\|\nabla^r f\|_{L^p_1} = C(\|\nabla^r f\|_{L^p} +$$

$$+ \|\nabla^{r+1} f\|_{L^p}) \leq C\|f\|_{L^p_k}, \quad \text{da } r+1 \leq k.$$

Somit ist $\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}_{k-1}} \leq kC\|f\|_{L^p_k}$, was (ii) beweist.

(iii) Nach (ii) majorisiert $\|\cdot\|_{L^p_k}$ die Norm $\|\cdot\|_{L^{p'}_{k'}}$, wobei $(p', k')$ aus $(p, k)$ durch die Transformation $(p', k') = (\frac{np}{n-p}, k-1)$ entsteht, vorausgesetzt, daß $1 < p < n$, $k \geq 1$. Man sieht leicht (Induktion bezüglich $l$, $l = 1, \dots, k$), daß man diese Transformation $l$-fach auch $(p, k)$ anwenden kann, falls $1 < p < n/l$ (wegen der letzten Ungleichung ist an jedem Schritt die Voraussetzung erfüllt), und daß die $l$-fache Transformation von $(p,k)$ das Paar $\left(\frac{np}{n-lp}, k-l\right)$ ist. Somit ist der Satz bewiesen.

Seien $E, E', E''$ Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit $X$. Unter einer <u>Multiplikation</u> $B: E\times E' \to E''$ verstehen wir eine Abbildung $B$, die jedem $x\in X$ eine bilineare Abbildung $B_x : E_x \times E'_x \to E''_x$ zuordnet, und dabei $C^\infty$ differenzierbar ist: $B(f,f')\in\Gamma(E'')$ für beliebige $f\in\Gamma(E)$, $f'\in\Gamma(E')$.

<u>SATZ</u>. Seien $E, E', E''$ Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit $X$, $n=\dim X$, $p\in\mathbb{R}$, $1<p<n$, und $k\in\mathbb{Z}$, $k>\frac{n}{p}$. Dann ist jede Multiplikation $B: E\times E'\to E''$ stetig als bilineare Abbildung

$$(\Gamma(E), \|\cdot\|_{L^p_k}) \times (\Gamma(E'), \|\cdot\|_{L^p_k}) \to (\Gamma(E''), \|\cdot\|_{L^p_k}),$$

d. h. es gibt $C>0$ mit



$$\|B(f,h)\|_{L^p_k} \leq C\|f\|_{L^p_k}\|h\|_{L^p_k}$$

für alle $f\in\Gamma(E)$, $h\in\Gamma(E')$; somit besitzt $B$ eine stetige bilineare Fortsetzung

$$L^2_k(E)\times L^2_k(E') \to L^2_k(E'').$$

<u>Beweis</u>. Wegen der Leibniz-Regel gibt es $\tilde C>0$ mit

$$|\nabla^r(B(f,h))| \leq \tilde C \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq k}} |\nabla^i f|\cdot|\nabla^j h|$$

für alle $f\in\Gamma(E)$, $h\in\Gamma(E')$, $r\leq k$ und in jedem Punkt von $X$. Es genügt also zu beweisen, daß es für beliebige $i,j\geq 0$ mit $i+j\leq k$ ein $C>0$ gibt mit

$$(**)\quad \| |\nabla^i f|\cdot|\nabla^j h| \|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p_k}\|h\|_{L^p_k}$$

für alle $f\in\Gamma(E)$, $h\in\Gamma(E')$.

a) Sei $i<k-n/p$. Nach dem Lemma von Sobolew ((vi), S. 126) ist, in jedem Punkt,

$$|\nabla^i f| \leq \|f\|_{C^i} \leq \tilde{\tilde C}\|f\|_{L^p_k}, \text{ wobei}$$

$\tilde{\tilde{C}}$ von $f$ nicht abhängt. Also

$$\| |D^i f| \cdot |D^j h| \|_{L^p} = \left( \int |D^i f|^p |D^j h|^p d\mu \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{C}} \|f\|_{L^p_k} \cdot \left( \int |D^j h|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \tilde{\tilde{C}} \|f\|_{L^p_k} \|h\|_{L^p_k},$$

womit $\binom{*}{*}$ in diesem Fall bewiesen ist.

b) Sei $j < k - n/p$. Ungleichung $\binom{*}{*}$ folgt hier genauso wie in a), mit $j$ statt $i$ und $h$ statt $f$.

c) Sei nun $i \geq k - n/p$, $j \geq k - n/p$. Setzen wir

$$l = \begin{cases} k-i, & \text{falls } i > k - n/p \\ k-i-1, & \text{falls } i = k - n/p \end{cases},$$

$$q = \begin{cases} k-j, & \text{falls } j > k - n/p \\ k-j-1, & \text{falls } j = k - n/p \end{cases}.$$

Also

$$\binom{*}{**} \quad \begin{array}{l} l, q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq l \leq k-i, \quad 0 \leq q \leq k-j, \\ l < \frac{n}{p}, \quad q < \frac{n}{p}, \quad l+q \geq n/p. \end{array}$$

Es ist nämlich z. B. $l \geq 0$, weil $i \leq k$ und, falls $i = k - n/p$, $k - i = n/p > 1$. Die



Ungleichung $l + q \geq n/p$ folgt folgendermaßen: Ist $l = k-i$, $q = k-j$, so $l+q = k + (k-i-j) \geq k > n/p$. Ist $l = k-i$, $q = k-j-1$ (oder $l = k-i-1$, $q = k-j$), so $l+q = k-1+(k-i-j) \geq k-1 \geq n/p$, weil $k > n/p$ und, in diesem Fall, $n/p \in \mathbb{Z}$. Ist dagegen $l = k-i-1$, $q = k-j-1$, so $i = j = k - n/p$ und $l+q = 2n/p - 2 \geq n/p$, weil $n/p > 1$ und $n/p \in \mathbb{Z}$.

Die übrigen Ungleichungen in $\binom{*}{**}$ sind trivial.

Für reelle Zahlen $\alpha, \beta$ mit $1 < \alpha \leq \frac{n}{n-lp}$, $1 < \beta \leq \frac{n}{n-qp}$ ist $1 > \frac{1}{\alpha} \geq \frac{n-lp}{n}$, $1 > \frac{1}{\beta} \geq \frac{n-qp}{n}$, und die Summen $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ nehmen alle möglichen Werte $2 > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq 2 - \frac{(l+q)p}{n}$ an; da $l+q \geq n/p$, ist $2 - \frac{(l+q)p}{n} \leq 1$, so daß wir immer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\binom{**}{**} \quad 1 < \alpha \leq \frac{n}{n-lp}, \quad 1 < \beta \leq \frac{n}{n-qp}, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Nun haben wir, wegen der Hölderschen Ungleichung

$$\| |\nabla^i f| \cdot |\nabla^j h| \|_{L^p} \leq \|\nabla^i f\|_{L^{p\alpha}} \|\nabla^j h\|_{L^{p\beta}} \leq$$

$$\leq \|f\|_{L^{p\alpha}_i} \|h\|_{L^{p\beta}_j} \leq \|f\|_{L^{p\alpha}_{k-l}} \|h\|_{L^{p\beta}_{k-q}}$$

(weil $i \leq k-l$, $j \leq k-q$, vgl. $\left(\begin{smallmatrix} * \\ ** \end{smallmatrix}\right)$). Da

aber, wegen $\left(\begin{smallmatrix} ** \\ ** \end{smallmatrix}\right)$, $p\alpha \leq \frac{np}{n-lp}$, $p\beta \leq \frac{np}{n-qp}$,

ist $\|f\|_{L^{p\alpha}_{k-l}} \|h\|_{L^{p\beta}_{k-q}} \leq \tilde{C} \|f\|_{L^{\frac{np}{n-lp}}_{k-l}} \|h\|_{L^{\frac{np}{n-qp}}_{k-q}}$

(vgl. (ii), S. 124–125), woher, wegen der Sobolew-Ungleichung auf S. 132 (die trivial für $l=0$ gilt) und $\left(\begin{smallmatrix} * \\ ** \end{smallmatrix}\right)$,

$$\| |\nabla^i f| \cdot |\nabla^j h| \|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p_k} \|h\|_{L^p_k} .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

<u>Bemerkung</u>. Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes, hat die Multiplikation $B$ eine stetige Fortsetzung $B: L^p_k(E) \times L^p_k(E') \to L^p_k(E'')$. Andererseits sind die Elemente von $L^p_k$ ge-



wisse stetige Schnitte des Bündels*. Die Multiplikation in $L^p_k$, die in dieser Weise entsteht, muß mit der punktweise definierten $B$-Multiplikation übereinstimmen; tatsächlich, sind $f \in L^p_k(E)$, $h \in L^p_k(E')$, $f_q \in \Gamma(E)$, $h_q \in \Gamma(E')$, $f_q \to f$, $h_q \to h$ in $L^p_k$, so $f_q \to f$ und $h_q \to h$ gleichmäßig (Lemma von Sobolew), also, da $B(f_q, h_q) \xrightarrow[L^p_k]{} B(f,h)$ (Definition der stetigen Fortsetzung von $B$), ist auch $B(f_q, h_q) \to B(f,h)$ gleichmäßig und somit $(B(f,h))_x = B_x(f(x), h(x))$ für alle $x \in X$.

<u>Bemerkung</u>. Für $n = \dim X = 4$ und $p = 2$, bedeutet der obige Satz, daß eine Multiplikation $B$ eine stetige bilineare (punktweise definierte) Fortsetzung $L^2_k(E) \times L^2_k(E') \to L^2_k(E'')$ haben muß, falls $k \geq 3$.

---

* Lemma von Sobolew