A. Derdzinski

VORLESUNG DIFFERENTIAL-GEOMETRIE

BONN, 1983/84

Inhalt:

Tensoren, Tensorfelder ; S. 1-23

Zusammenhänge, kovariante Differentiation, Krümmung, Parallelverschiebung, flache Zusammenhänge, Ricci- und Bianchi-Identitäten ; S. 23-70

Riemannsche Metriken, Herauf- und Herunterziehen der Indizes, Levi-Civita-Zusammenhang, Lemma von Schur; S. 70-89

Meßbare Mengen, Integration auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Greensche Formel und Anwendungen, Lichnerowicz-Ungleichung für λ_1, der λ_1-Eigenraum für Sphären S. 90-126

Differentialoperatoren, Darstellung durch kovariante Ableitungen, Symbol, elliptische Operatoren, das Maximumprinzip von E. Hopf, Anwendungen S. 127-148

L^p-Räume, klassische Konvergenzsätze für Integrale, C^k-Normen und Sobolew-Normen, lokaler Charakter der Abschätzungen und der Kompaktheitseigenschaften, Lemma von Rellich, endliche Dimensionalität des Kerns für elliptische Operatoren 2. Ordnung, Lemma von Sobolew für L^p_k S. 149-189

Der formal-adjungierte Operator, C^∞-Konvergenz, Distributionen auf Mannigfaltigkeiten, Ungleichung von Poincaré S. 190-205

"Negative" Sobolew-Normen L^2_{-k} (Bezeichnung: $\|\cdot\|_{-k}$), Stetigkeit von Differentialoperatoren, Ungleichung für drei Sobolew-Normen, Fourier-Reihen auf dem Torus T^n, die Ungleichung von Friedrichs, endliche Dimensionalität des Kerns für elliptische Operatoren S. 205 - 244

Sobolew-Räume auf T^n, Regularitätssatz für elliptische Operatoren und Sobolew-Normen L^2_k auf kompakten Mannigfaltigkeiten (sowie für die Räume $L^2_{k,loc}$ im allgemeinen), Lösbarkeitskriterium für elliptische Systeme S. 245 - 278

Existenz des Spektrums von Δ, Wärmeleitungsgleichung, Maximumprinzip, Fourier-Reihen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten, $e^{-t\Delta}$, Lösbarkeit der Wärmeleitungsgleichung, die analytische Funktion $Z(t) = \sum_{j\geq 0} m_j e^{-t\lambda_j}$ in $(0,\infty)$, Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung S. 278 - 323

Wellengleichung, Lösbarkeit, (Riemannsche) Mannigfaltigkeiten mit Rand, Greensche Formel, endliche Geschwindigkeit der Wellen S. 323 - 354

Vektorbündel, Nichttrivialität von TS^2; Differentialformen, äußeres Produkt, äußere Ableitung, Lemma von Poincaré, De Rhamsche Kohomologieräume, Homotopieinvarianz des Kohomologiefunktors, H^*S^n, Kohomologiefunktor für stetige Abbildungen (C^∞-Approximation), Fixpunktsatz von Brouwer, Volumenelement, Integration von n-Formen, Nichtexistenz von Vektorfeldern ohne Nullstellen auf geradedimensionalen Sphären S. 355 - 472

$H^nM = \mathbb{R}$ falls M kompakt, n-dimensional, orientierbar; Abbildungsgrad, Formel für deg F (algebraische Anzahl der Urbilder), Satz von Sard, deg $F \in \mathbb{Z}$, Beispiele in Sphären, S. 472 - 493

Fasermetriken in Vektorbündeln, Existenz der Faserisometrien, Einheitssphärenbündel, Bündelhomomorphismen, Unterbündel, Kern und Bild eines Homomorphismus konstanten Ranges, Whitney-Summe, Orthogonalkomplement, Erweiterbarkeit zu einem trivialen Bündel, Existenz von Schnitten mit endlich vielen Nullstellen falls die Faser- und Basisdimension gleich sind S. 493 – 522

Abbildungsgrad in punktierten euklidischen Kugeln, der Index eines Schnitts in einer isolierten Singularität (falls die Faser- und Basisdimension des Vektorbündels übereinstimmen) S. 522 – 546

Das duale Bündel, Tensorprodukt, Operationen auf Fasermetriken, Zusammenhänge in Vektorbündeln, metrische Zusammenhänge, Operationen auf Zusammenhängen, Krümmungstensor, die Bianchi-Identität, Äquivalenz zwischen komplexen Geradenbündeln und orientierten reellen Ebenenbündeln S. 546 – 593

Die Euler-Klasse (erste Chern-Klasse) für komplexe Geradenbündel, die Gruppe der Isomorphismusklassen von komplexen Geradenbündeln, die Gauß-Bonnet-Formel für kompakte Flächen, Lemma von Stokes, die Indexformel von Poincaré für generische Schnitte in komplexen Geradenbündeln über kompakten Flächen, Klassifikation von komplexen Geradenbündeln über kompakten Flächen S. 593 – 644

Differentialoperatoren in Vektorbündeln, Symbol, injektives und surjektives Symbol, Elliptizität, Beispiele, der formal-adjungierte Operator, Divergenz von Differentialformen, der Laplace-Operator für Komplexe, harmonische Differentialformen, der $*$-Operator von Hodge S. 645 – 688

Sobolew-Räume von Schnitten in Vektorbündeln, Lemma von Rellich, Lemma von Sobolew, Ungleichung von Friedrichs, endliche Dimensionalität des Kerns für Operatoren mit injektivem Symbol, Regularitätssätze, Lösbarkeitskriterium für elliptische Systeme, Lemma von Hodge, Satz von Hodge und De Rham, Poincaré-Dualität S. 689 – 738

Fredholm-Operatoren, Index, Homotopie-
-Invarianz des Index für elliptische Ope-
ratoren, Index als Homotopie-Invariante
des Symbols, weitere Eigenschaften von
Fredholm-Operatoren
S. 739 - 784

VORLESUNG DIFFERENTIALGEOMETRIE

13. 10. 1983

M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $x : U \to x(U) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem in der offenen Menge $U \subset M$, $x = (x^1, \dots, x^n)$. Andere Bezeichnung: $x = (x^i)$. Es seien $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ die durch (x^i) bestimmten Basisvektorfelder in U,

$$\partial_i(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[x^{-1}(x^1(y), \dots, x^i(y) + t, \dots, x^n(y)) \right].$$

In jedem Punkt $y \in U$ bilden die $\partial_i(y)$ eine Basis des Tangentialraumes T_yM. Die dazu duale Basis des Kotangentialraumes $T_y^*M = (T_yM)^*$ besteht aus den Differentialen $dx^i(y)$ der Koordinatenfunktionen x^i; also

$$dx^i(\partial_j) = \delta^i_j .$$

Für einen Punkt $y \in U$ und einen Tangentialvektor $X \in T_yM$, gilt

$$X = \sum_i X^i \partial_i(y)$$

für gewisse (eindeutig bestimmte) reelle Zahlen $X^1, \dots, X^n$, die die <u>Komponenten von X bezüglich (x^i)</u> genannt werden. Wir werden kurz schreiben

$$X = X^i \partial_i$$

wobei wir den Punkt y auslassen und die folgende <u>Einsteinsche Summenkonvention</u> anwenden: Wenn in einem Term ein Index zweimal, einmal oben und einmal unten, auftritt, soll über diesen Index summiert werden.

Andere Ausdrücke für die X^i:

a) $X^i = Xx^i = dx^i(X)$

b) $X^i = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} x^i(c(t))$, wobei c eine beliebige C^1 Kurve ist mit $c(t_0) = y$, $\frac{d}{dt} c(t)\Big|_{t=t_0} = \dot{c}(t_0) = X$.

Ist nun X ein Vektorfeld auf M, d.h. eine Abbildung, die jedem $y \in M$ einen Tangentialvektor

$X(y) \in T_y M$ zuordnet, so betrachtet man die Komponenten von X bezüglich eines beliebigen Koordinatensystems $(\mathcal{U}, x)$, $x : \mathcal{U} \to x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$, d. h. die Funktionen X^i auf der Koordinatenumgebung $\mathcal{U}$, die folgendermaßen definiert werden:

$$X^i(y) = (X(y))^i,$$

also, $X = X^i \partial_i$ und $X^i = Xx^i = dx^i(X)$. Das Vektorfeld X ist genau dann stetig (bzw., C^∞ differenzierbar), wenn seine Komponenten bezüglich jedes Koordinatensystems es sind.

Betrachten wir zwei Koordinatensysteme $(\mathcal{U}, x)$, $(\mathcal{U}', x')$ mit einem nichtleeren Durchschnitt der Definitionsbereiche: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$. Die entsprechenden Koordinatenfunktionen werden wir durch x^i und

$x^{i'}$ bezeichnen (also nicht $(x')^i$), wobei wir annehmen, daß die verschiedenen Koordinatensystemen entsprechenden Indizes disjunkte Mengen durchlaufen (was z. B. folgendermaßen formalisiert werden kann: $i = (i, x)$, $i' = (i, x')$, usw.). Der Vorteil dieser Konvention liegt in einer wesentlichen Vereinfachung vieler Bezeichnungen. In $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ definieren wir <u>die</u> <u>Matrix</u> <u>der</u> <u>Übergangsfunktionen</u>

$$A_i^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dx^i}$$

durch

$$A_i^{i'}(y) = \frac{\partial(x^{i'} \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(y)).$$

Es gilt also

$$A_j^i = \delta_j^i$$

und, für drei Koordinatensysteme mit einem nichtleeren Durchschnitt der Definitionsbereiche,

$$A^{i''}_{i'} A^{i'}_{i} = A^{i''}_{i}.$$

Insbesondere

$$A^{i'}_{i} A^{i}_{j'} = \delta^{i'}_{j'}$$

so daß die Inverse Matrix von $A^{i'}_{i}$ ist (und nicht etwa die Transponierte). Hier und im folgenden wird die Konvention angewandt, daß in jedem Term eines Ausdruckes, ein beliebiger Index nur ein- oder zweimal auftreten kann; tritt er einmal auf, oben (bzw. unten), so muß er in jedem anderen Term des Ausdruckes auch einmal, jeweils oben (bzw. unten) auftreten. Zweimal darf ein Index nur oben und unten auftreten, und dann wird über ihn summiert. Die obigen "Kettenregel" sind in ihrer Struktur

eindeutig durch diese Konvention bestimmt. Diese (und viele andere) Formeln werden also durch die Konvention selbst "in Gedächtnis behalten".

Für jede C^1 Funktion f, definiert man ihre partiellen Ableitungen $\partial_i f : U \to \mathbb{R}$ bezüglich des Koordinatensystems $(U, (x^i))$ durch

$$\partial_i f(y) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(y)).$$

Also, diese Bezeichnung stimmt mit der Operation des Vektorfeldes ∂_i auf f überein:

$$\partial_i f = df(\partial_i)$$

woher

$$df = \partial_i f \cdot dx^i$$

und

$$Xf = X^i \partial_i f$$

für jeden Vektor X. Ferner gilt

$$A_i^{i'} = \partial_i x^{i'}$$

also

$$dx^{i'} = A_i^{i'} dx^i$$

und, wegen der Dualität zwischen $dx^{i'}$ und $\partial_{i'}$,

$$\partial_{i'} = A_{i'}^{i} \partial_i ,$$

so daß

$$X^{i'} = A_i^{i'} X^i$$

für jeden Vektor (bzw. jedes Vektorfeld) X. Definiert man die Komponenten eines kovarianten Vektors (d.h., eines Kotangentialvektors, einer 1-form) ξ, bzw., eines kovarianten Vektorfeldes ξ durch

$$\xi_i = \xi(\partial_i),$$

d. h.,

$$\xi = \xi_i \, dx^i ,$$

so hat man die Transformationsregel

$$\xi_{i'} = A_{i'}^{i} \xi_i .$$

Also, für $X \in T_y M$, $\xi \in T_y^* M$,

$$\xi(X) = \xi_i X^i$$

und, für jede C^1 Funktion f,

$$(df)_i = \partial_i f .$$

Der Begriff des C^∞ differenzierbaren Vektorfeldes ist also <u>geometrisch</u> im folgenden Sinne: Um so ein Vektorfeld zu definieren, genügt es seine Komponenten bezüglich der Koordinatensysteme <u>eines</u> festen Atlasses als C^∞ Funktionen vorzuschreiben, so daß die Transformationsregel erfüllt ist. Dann sind seine Komponenten bezüglich <u>jedes</u> möglichen Koordinatensystems auch C^∞ differenzierbar, man braucht also nicht die Differenzierbarkeit in allen

Koordinatensystemen zu testen. Das gleiche gilt auch für kovariante Vektorfelder.

Unter einem Tensor vom Typ (p,q) im Punkt $y \in M$ verstehen wir eine $(p+q)$-lineare Abbildung

$$H : \underbrace{T_yM \times \ldots \times T_yM}_{q\text{-fach}} \times \underbrace{T_y^*M \times \ldots \times T_y^*M}_{p\text{-fach}} \to \mathbb{R}.$$

Beispiele:

a) Tensoren vom Typ $(0,0)$ = reelle Zahlen (Skalare)

b) Tensoren vom Typ $(0,1)$ = = kovariante Vektoren (1-Formen)

c) Tensoren vom Typ $(1,0)$ = = Tangentialvektoren

d) Tensoren vom Typ $(1,1)$ = Endomorphismen von T_yM = Endomorphismen von T_y^*M

e) Tensoren vom Typ $(0,2)$ = = Bilinearformen auf T_yM = = Homomorphismen $(T_yM \to T_y^*M)$

f) Tensoren vom Typ $(2,0)$ = = Bilinearformen auf T_y^*M = = Homomorphismen $(T_y^*M \to T_yM)$

Die Komponenten $H_{i_1 \ldots i_q}{}^{j_1 \ldots j_p}$ eines Tensors (Tensorfeldes) H vom Typ (p,q), bezüglich (x^i), definiert man durch

$$H_{i_1 \ldots i_q}{}^{j_1 \ldots j_p} = H(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_q}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_p}).$$

Es gilt also die Transformationsregel

$$H_{i_1' \ldots i_q'}{}^{j_1' \ldots j_p'} = A_{i_1'}^{i_1} \ldots A_{i_q'}^{i_q} A_{j_1}^{j_1'} \ldots A_{j_p}^{j_p'} H_{i_1 \ldots i_q}{}^{j_1 \ldots j_p}$$

und der Begriff des differenzierbaren Tensorfeldes ist geometrisch.

Beispiele:

a) H vom Typ $(1,1)$ in $y \in M$,

$$H_i{}^j = H(\partial_i, dx^j)$$

also,

$$H(\partial_i) = H_i{}^j \partial_j$$

$$(H(X))^i = H_j{}^i X^j$$

$$H(dx^i) = H_j{}^i dx^j$$

$$(H(\xi))_i = H_i{}^j \xi_j$$

für $\xi \in T_y^* M$, $X \in T_y M$

b) H vom Typ $(0,2)$,

$$H_{ij} = H(\partial_i, \partial_j)$$

$$H(X)_i = H_{ji} X^j$$

$$H(X) = H_{ij} X^j dx^i$$

c) H vom Typ $(2,0)$,

$$H^{ij} = H(\partial_i, \partial_j)$$

$$(H(\xi))^i = H^{ji} \xi_j$$

Für einen Tensor H vom Typ $(1,1)$, ist die Spur $Sp(H)$ und die Determinante $\det(H)$ wohldefiniert. Für einen Tensor H vom Typ $(0,2)$ hat man dagegen

$$\det(H_{i'j'}) = (\det(A_{i'}^{i}))^2 \cdot \det(H_{ij}),$$

es ist aber noch immer sinnvoll vom Nichtverschwinden und vom Vorzeichen der Determinante zu sprechen. Für einen $(0,2)$-Tensor H der nichtausgeartet ist $(\det H \neq 0)$ kann man das Inverse definieren, das ein $(2,0)$-Tensor ist. Die Komponenten $\bar{H}^{ij}$ des Inversen sind durch

$$\bar{H}^{ik} H_{kj} = \delta_j^i \quad (= H_{jk} \bar{H}^{ki})$$

(invariant) definiert, was dem Inversen von H im Sinne der Abbildungen zwischen $T_y M$ und $T_y^* M$ entspricht.

Wenn man Tensoren in einzelnen Punkten von M, oder Tensorfelder auf M betrachtet, gibt es oft Möglichkeiten, durch verschiedene Operationen neue Tensoren (Tensorfelder) zu bilden, wobei die "Operationen" mit Hilfe von Komponenten der Tensoren bezüglich lokaler Koordinatensysteme definiert sind. Es entsteht dann immer die Frage, ob bei einer solchen Operation wirklich ein Tensor(feld) entsteht, d.h., ob die Komponenten des neuen Objekts bezüglich verschiedener Koordinatensysteme der tensoriellen Transformationsregel genügen.

Beispiele.

a) Für jede C^∞ Funktion f, die partiellen Ableitungen

$$\partial_i f$$

definieren ein Tensorfeld vom Typ $(0,1)$ (ein kovariantes Vektorfeld), weil $\partial_{i'} f = A^i_{i'} \partial_i f$. Dieses ko-

variante Vektorfeld ist nichts anderes als das Differential df von f.

b) Es sei X ein Vektorfeld auf M. Die partiellen Ableitungen

$$\partial_j X^i$$

definieren <u>kein</u> Tensorfeld vom Typ $(1,1)$, weil sie die entsprechende Transformationsregel nicht erfüllen. Das gleiche gilt für die Ableitungen $\partial_j \xi_i$ eines C^∞ kovarianten Vektorfeldes ξ.

c) Sei X (bzw., ξ) ein C^∞ Vektorfeld (bzw., C^∞ kovariantes Vektorfeld) auf M und $y \in M$ ein Punkt mit $X(y) = 0$ (bzw., $\xi(y) = 0$). Die Ableitungen

$$\partial_j X^i(y) \qquad (\text{bzw.}, \partial_j \xi_i(y))$$

bilden dann einen Tensor vom Typ $(1,1)$ (bzw., $(0,2)$) <u>im</u> <u>Punkt</u> y, den wir durch $\partial X(y)$ (bzw., $\partial \xi(y)$) bezeichnen können. Diese Tensoren können folgendermaßen interpretiert werden:

(i) $\partial X(y)$ kann als ein Endomorphismus von $T_y M$ betrachtet werden. Ist $Y \in T_y M$ ein beliebiger Vektor, so operiert $Z = (\partial X(y))(Y)$ auf jeder C^∞ Funktion f durch

$$Zf = Y(Xf).$$

Ferner sei φ_t der lokale Fluß von X (in einer Umgebung von y, für kleine $|t|$ definiert). Dann $\varphi_t(y) = y$ für alle t, so daß die Differentiale $(d\varphi_t)_y$ lineare Automorphismen von $T_y M$ sind, und

$$\partial X(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (d\varphi_t)_y .$$

(ii) Für beliebige Vektoren $Y, Z \in T_y M$, gilt

$$(\partial \xi(y))(Y,Z) = Y(\xi(\tilde{Z}))$$

wobei $\tilde{Z}$ ein beliebiges C^∞ Vektorfeld in einer Umgebung von y ist mit $\tilde{Z}(y) = Z$. Ist $\xi = df$ das

Differential einer Funktion f die in y einen kritischen Punkt hat ($df(y) = 0$), so nennt man $\partial \xi(y)$ die Hesse-Form von f im (kritischen) Punkt y (Bezeichnung: $\partial \xi(y) = \mathrm{Hess}_y f$, mit $(\mathrm{Hess}_y f)_{ij} = \partial_i \partial_j f(y)$).

d) Es sei ξ ein C^∞ kovariantes Vektorfeld auf M. Dann sind

$$(d\xi)_{ij} = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i$$

die Komponenten eines $(0,2)$-Tensorfeldes auf M, das man durch $d\xi$ bezeichnet und <u>das äußere Differential</u> von ξ nennt. Für jede Funktion f gilt $d(df) = 0$.

e) Für beliebige C^∞ Vektorfelder X, Y auf M bilden die Größen

$$Z^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i$$

die Komponenten eines C^∞ Vektorfeldes Z auf M, das auf C^∞ Funktionen f folgendermaßen operiert: $Zf = X(Yf) - Y(Xf)$. Z ist also nichts anderes als die Lie-Klammer $[X,Y]$.

f) Die Tensoren vom Typ (p,q) im Punkt $y \in M$ bilden offensichtlich einen Vektorraum. Die Vektorraumoperationen kann man komponentenweise so beschreiben:

$$(H+G)_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} = H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} + G_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p},$$

$$(\lambda H)_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} = \lambda H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

g) Ein natürliches C^∞-Tensorfeld I vom Typ $(1,1)$ kann durch

$$I_j{}^i = \delta_j^i$$

definiert werden. Als Endomorphismus des Tangentialraumes, entspricht es in jedem Punkt der Identität.

h) <u>Das Tensorprodukt</u>. Sei H ein Tensor vom Typ (p,q), G ein Tensor vom Typ (p',q') in einem Punkt $y \in M$. Dann sind

$$(H \otimes G)_{i_1 \dots i_{q+q'}}{}^{j_1 \dots j_{p+p'}} =$$

$$= H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} \cdot G_{i_{q+1} \dots i_{q+q'}}{}^{j_{p+1} \dots j_{p+p'}}$$

die Komponenten eines Tensors vom Typ $(p+p', q+q')$ in y, den man durch $H \otimes G$ bezeichnet und das Tensorprodukt von H und G nennt. Die Zuordnung $H, G \to H \otimes G$ ist eine bilineare Abbildung. Die Tensorproduktoperation ist assoziativ, man kann also $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$ usw. ohne Klammern schreiben. Es gilt, für jeden Tensor H vom Typ (p,q) in y,

$$H = H_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_p},$$

die Tensorprodukte aus beliebigen q von den dx^i und aus beliebigen p von den ∂_j (wobei jeder Index mehrmals auftreten darf) bilden also, in jedem Punkt, eine Basis des Vektorraumes der Tensoren vom Typ (p,q). Deshalb hat dieser Raum die Dimension n^{p+q}, $n = \dim M$. Als $(p+p'+q+q')$-lineare Abbildung ist $H \otimes G$ durch

$$(H \otimes G)(\underset{1}{X}, \dots, \underset{q+q'}{X}, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{p+p'}{\xi}) =$$

$$= H(\underset{1}{X}, \dots, \underset{q}{X}, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{p}{\xi}) \cdot H(\underset{q+1}{X}, \dots, \underset{q+q'}{X}, \overset{p+1}{\xi}, \dots, \overset{p+p'}{\xi})$$

gekennzeichnet.

i) Es sei H ein Tensor vom Typ $(0,2)$. Ein neuer $(0,2)$-Tensor $\tilde{H}$ kann durch

$$\tilde{H}_{ij} = H_{ji},$$

d.h., $\tilde{H}(X,Y) = H(Y,X)$, definiert werden. Ähnlicherweise, für einen $(3,0)$ Tensor H, sind

$$\tilde{H}^{ijk} = H^{kji}$$

sowie auch

$$\tilde{\tilde{H}}^{ijk} = H^{jki}$$

neue Tensoren von demselben Typ, und, allgemeinen, kann man aus einem (p,q)-Tensor neue (p,q)-Tensoren erhalten, indem man seine unteren und oberen Indizes (d.h., Vektor- und Kovektorargumente) mit beliebigen festen Permutationen behandelt. Deshalb sind Bedingungen wie z. B., $H_{ij} = H_{ji}$, $H_{ij} = -H_{ji}$, $H_{ijk} + H_{jki} + H_{kij} = 0$, $H_{ijk} = 2H_{ikj}$ sinnvoll, d.h., von dem Koordinatensystem unabhängig. Nicht alle solche Bedingungen sind jedoch interessant: wenn z. B. $H_{ij} = 2H_{ji}$, so $H_{ij} = 2H_{ji} = 4H_{ij}$, woher $H=0$.

j) <u>Kontraktionen</u>. Es sei H ein Tensor vom Typ (p,q), $p \geq 1$, $q \geq 1$. Für feste natürliche Zahlen $k \leq q$, $l \leq p$, sind

$$G_{i_1 \dots i_{q-1}}{}^{j_1 \dots j_{p-1}} =$$

$$= H_{i_1 \dots i_{k-1} s\, i_k \dots i_{q-1}}{}^{j_1 \dots j_{l-1} s\, j_l \dots j_p}$$

die Komponenten eines Tensors vom Typ $(p-1, q-1)$, von dem man sagt, daß er aus H durch Kontraktion (Verjüngung) über den l-ten oberen und den k-ten unteren Index entstanden ist. Man hat

$$G(\underset{1}{X}, \dots, \underset{q-1}{X}, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{p-1}{\xi}) =$$

$$= H(\underset{1}{X}, \dots, \underset{k-1}{X}, \partial_i, \underset{k}{X}, \dots, \underset{q-1}{X}, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{l-1}{\xi}, dx^i, \overset{l}{\xi}, \dots, \overset{p-1}{\xi})$$

in beliebigen lokalen Koordinaten. Ist

$$H = \overset{1}{\xi} \otimes \dots \otimes \overset{q}{\xi} \otimes \underset{1}{X} \otimes \dots \otimes \underset{p}{X}, \quad \text{so}$$

$$G = \overset{k}{\xi}(\underset{l}{X}) \cdot \overset{1}{\xi} \otimes \dots \otimes \widehat{\overset{k}{\xi}} \otimes \dots \otimes \overset{q}{\xi} \otimes \underset{1}{X} \otimes \dots \otimes \widehat{\underset{l}{X}} \otimes \dots \otimes \underset{p}{X},$$

wobei $\wedge$ bedeutet, daß der betreffende Faktor auszulassen ist. Insbesondere, für $k=l=p=q=1$, haben wir

$$G = H_i{}^i$$

so daß die Kontraktion von $(1,1)$ Tensoren mit der Spur-Operation für Endomorphismen übereinstimmt.

k) Für einen $(0,2)$-Tensor H, der nichtausgeartet ist, kann man den Inversen $(2,0)$-Tensor $\bar{H}$ durch

$$\bar{H}^{ik} H_{kj} = \delta^i_j \quad (= H_{jk} \bar{H}^{ki})$$

definieren. Es gilt

$$\bar{H}^{ij} H_{ij} = n.$$

20.10.1983

Die unter f) bis k) erwähnten Operationen sind für Tensoren in einzelnen Punkten definiert. Wendet man sie auf C^∞ Tensorfelder auf, so erhält man wieder C^∞ Tensorfelder.

Zusammenhänge

Es sei auf der n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ein Zusammenhang ∇ gegeben, d.h. eine Operation, die je zwei C^∞-Vektorfeldern X, Y auf M ein C^∞-Vektorfeld $\nabla_X Y$ zuordnet, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $\nabla_X Y$ ist bezüglich X und Y bilinear und $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$, $\nabla_X (fY) =$

$= f\nabla_X Y + (Xf)\cdot Y$ für beliebige X, Y und jede C^∞ Funktion f auf M. Zu einem lokalen Koordinatensystem (x^i) kann man die Komponenten Γ_{ij}^k des Zusammenhanges ∇ durch

$$\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i} \partial_j),$$

d.h. durch

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

definieren. Dann gilt die Transformationsregel

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = A_{i'}^i A_{j'}^j A_k^{k'} \Gamma_{ij}^k + A_s^{k'} \partial_{i'} A_{j'}^s .$$

Ein Zusammenhang kann also nicht mit einem Tensorfeld identifiziert werden.

Für beliebige Vektorfelder X, Y haben wir

$$(\nabla_X Y)^i = X^s(\partial_s Y^i + \Gamma_{sj}^i Y^j).$$

Umgekehrt, es sei jedem Koordinatensystem $(U,(x^i))$ in M ein System von C^∞ Funktionen Γ_{ij}^k zugeordnet, so daß bei jedem Koordinatenwechsel die obige Transformationsregel gilt. Die Formel $(\nabla_X Y)^i = X^s(\partial_s Y^i + \Gamma_{sj}^i Y^j)$ definiert dann, für beliebige C^∞-Vektorfelder X, Y, ein Vektorfeld (d. h., $(\nabla_X Y)^{i'} = A_i^{i'}(\nabla_X Y)^i$), das man durch $\nabla_X Y$ bezeichnen kann, und die Zuordnung $X, Y \to \nabla_X Y$ ist ein Zusammenhang im ursprünglichen Sinne, dessen Komponenten bezüglich beliebigen Koordinatensystems (x^i) mit unseren Γ_{ij}^k übereinstimmen.

Der Begriffs des Zusammenhangs ist geometrisch in dem Sinne, daß es genügt die die Transformationsregel erfüllenden Komponenten Γ_{ij}^k in allen Koordinatensystemen <u>eines</u>

festen Atlasses vorzuschreiben, um einen Zusammenhang eindeutig zu definieren.

Beispiele.

a) Sei E ein n-dimensionaler affiner Raum (d. h. eine Menge, auf der die additive Gruppe eines n-dimensionalen reellen Vektorraumes einfach transitiv operiert). In jedem Koordinatensystem (E, x) <u>des affinen Atlasses</u> von E, der aus allen affinen Isomorphismen $x: E \to \mathbb{R}^n$ besteht, setze man $\Gamma_{ij}^k = 0$. Die Transformationsregel gilt, weil für affine Koordinatensysteme die Übergangsmatrix $A_i^{i'}$ aus konstanten Funktionen besteht. Den in dieser Weise entstandenen Zusammenhang ∇ auf E nennt man <u>den natürlichen affinen Zusammenhang</u> des affinen Raumes E. In affinen Koordinaten stimmen die kovarianten Ableitungen mit den partiellen überein: $(\nabla_X Y)^i = X^s \partial_s Y^i$.

b) Sei ∇ ein Zusammenhang auf M und U eine offene zusammenhängende Teilmenge (offene Untermannigfaltigkeit) von M. Die <u>Einschränkung von ∇ auf U</u> ist der Zusammenhang auf U, der auf beliebigen Vektorfeldern genauso wie ∇ operiert. In jedem Koordinatensystem für U hat diese Einschränkung dieselben Komponenten wie ∇.

c) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende Teilmenge. Im Koordinatensystem (x^i) auf U, das aus der Identitätsabbildung $U \to U \subset \mathbb{R}^n$ besteht, kann man einen Zusammenhang ∇ durch <u>ganz beliebige</u> Funktionen Γ_{ij}^k definieren. Die Transformationsregel braucht man nicht zu prüfen, weil unser Atlas nur ein einziges Koordinatensystem enthält.

d) Sei $\Phi: M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen den Mannigfaltigkeiten M, N. Für jeden Zusammenhang ∇ auf N kann man <u>den zurückgeholten Zusammenhang</u> $\Phi^*\nabla$ auf M durch

$$(\Phi^*\nabla)_X Y = \Phi_*^{-1}(\nabla_{\Phi_* X}(\Phi_* Y))$$

definieren, wobei

$$(\Phi_* X)(x) = d\Phi_{\Phi^{-1}(x)}\left(X(\Phi^{-1}(x))\right).$$

e) Sei ∇ ein Zusammenhang auf M mit lokalen Komponenten Γ_{ij}^k. Dann erfüllen die Funktionen

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

ebenso die Transformationsregel für Zusammenhangskomponenten. Deshalb sind sie die lokalen Komponenten eines Zusammenhanges $\overset{*}{\nabla}$.

f) Seien $\overset{1}{\nabla}, \dots, \overset{m}{\nabla}$ Zusammenhänge auf M und $f_1, \dots, f_m$ C^∞-Funktionen mit $f_1 + \dots + f_m = 1$. Dann kann man einen Zusammenhang ∇ auf M durch

$$\nabla_X Y = f_1 \cdot \overset{1}{\nabla}_X Y + \ldots + f_m \cdot \overset{m}{\nabla}_X Y$$

definieren. Für die lokalen Komponenten gilt

$$\Gamma_{ij}^{k} = f_1 \cdot \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \ldots + f_m \cdot \overset{m}{\Gamma}{}_{ij}^{k}.$$

Sind $f_1, \ldots, f_m$ nicht-negativ, so kann man ∇ eine <u>konvexe</u> <u>Kombination</u> von $\overset{1}{\nabla}, \ldots, \overset{m}{\nabla}$ nennen.

g) Die <u>Differenz</u> zweier Zusammenhänge $\overline{\nabla}, \nabla$ auf M ist ein Tensorfeld H vom Typ $(1,2)$ mit lokalen Komponenten

$$H_{ij}{}^{k} = \overline{\Gamma}{}_{ij}^{k} - \Gamma_{ij}^{k},$$

so daß für beliebige C^∞-Vektorfelder X, Y auf M gilt $H(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$. Umgekehrt ist die Summe eines Zusammenhanges ∇ und eines $(1,2)$ Tensorfeldes H wieder ein Zusammenhang $\overline{\nabla}$ mit $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + H(X,Y)$ und mit lokalen Komponenten $\overline{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + H_{ij}{}^{k}$. Die Zusammenhänge auf M bilden also einen (unendlich dimensionalen) affinen Raum, dessen ensprechende Vektorraum aus allen C^∞-Tensorfeldern vom Typ $(1,2)$ besteht. Insbesondere (vgl. Beispiel e)) kann man <u>den</u> <u>Torsionstensor</u> (genauer, das Torsionstensorfeld) T vom Typ $(1,2)$ für jeden Zusammenhang ∇ definieren durch die Formel

$$T_{ij}{}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}$$

d.h., $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ für beliebige C^∞-Vektorfelder X, Y. Der Zusammenhang ∇ heißt <u>symmetrisch</u> (torsionsfrei), wenn sein Torsionstensor identisch verschwindet, d.h. wenn $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$. Der Zusammenhang $\overline{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2} T$ ist immer symmetrisch.

Sei nun ∇ ein Zusammenhang auf M. Aus der Transformationsregel für die Γ_{ij}^k folgt, daß die Funktionen

$$(\nabla Y)_j{}^i = \partial_j Y^i + \Gamma_{js}^i Y^s$$

die Komponenten eines $(1,1)$-Tensorfeldes sind, das man durch ∇Y bezeichnet. Betrachtet man ∇Y, in jedem Punkt y, als einen Endomorphismus von $T_y M$, so gilt, für jedes Vektorfeld X,

$$(\nabla Y)(X) = \nabla_X Y.$$

Es ist bequem, die Komponenten von ∇Y statt durch $(\nabla Y)_j{}^i$, eher durch $\nabla_j Y^i$ oder gar $Y^i{}_{,j}$ zu bezeichnen. Also

$$Y^i{}_{,j} = \nabla_j Y^i = \partial_j Y^i + \Gamma_{js}^i Y^s$$

wobei man bedenken muß, das $Y^i{}_{,j} = \nabla_j Y^i$ <u>nicht</u> durch Anwendung eines Operators ∇_j auf die i-te Komponentenfunktion Y^i entsteht, sondern von allen Komponenten $Y^1, \ldots, Y^n$ ab-

hängt. Dagegen bezeichnet $\partial_j Y^i$ ausgerechnet die partielle Ableitung der Komponente Y^i in der j-ten Koordinatenrichtung. Das Tensorfeld ∇Y ist ein Objekt, das lokal so viel Information wie die $\partial_j Y^i$ und die Y^i enthält (es kann jedoch passieren, daß, in einem Punkt y, $\Gamma_{ij}^k(y) = 0$, so daß $Y^i{}_{,j} = \partial_j Y^i$ in y !), hat aber den Vorteil, daß es – im Gegensatz zu den $\partial_j Y^i$ – als ein Tensorfeld auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert ist, ist also, bis auf die tensorielle Transformationsregel, koordinatenunabhängig.

Bemerkung. Zum Begriff des Zusammenhanges kann man auch folgenderweise gelangen. Da die partiellen Ableitungen $\partial_j Y^i$ der Komponenten eines Vektorfeldes Y der tensoriellen Transformationsregel im allgemeinen nicht genügen, kann man versuchen, sie zu modifizieren, indem man setzt

$$Y^i_{,j} = \partial_j Y^i + \Gamma^i_{js} Y^s,$$

wobei Γ^i_{js} gewisse Funktionen sind, die vom Koordinatensystem abhängen. Verlangt man nun daß, für jedes Vektorfeld Y, die so definierten $Y^i_{,j}$ die Komponenten eines (1,1)-Tensorfeldes sind, so bedeutet dies genau, das die Γ^i_{js} die Transformationsregel für Zusammenhangskomponenten erfüllen.

Für einen Zusammenhang ∇ auf der Mannigfaltigkeit M ordnet die Operation der "kovarianten Ableitung" jedem C^∞-Tensorfeld Y vom Typ $(1,0)$ ein Tensorfeld ∇Y vom Typ $(1,1)$ zu. Wir werden jetzt

diese Operation, für ein festes ∇, so ausdehnen, daß sie jedem Tensorfeld H vom Typ (p,q) ein C^∞-Tensorfeld ∇H vom Typ $(p,q+1)$ zuordnen wird.

Zunächst sei $p=q=0$, $H=f$ eine C^∞-Funktion. Wir setzen

$$\nabla f = df,$$

so daß $(\nabla f)_i = \partial_i f$. Wir werden statt $\partial_i f$ oft $f_{,i}$ schreiben. Die kovariante Ableitung einer Funktion hängt also vom Zusammenhang <u>nicht</u> ab.

Es sei nun $p=0$, $q=1$, $H=\xi$ ein C^∞ kovariantes Vektorfeld. Für ein Vektorfeld X, gibt es verschiedene Möglichkeiten, das kovariante Vektorfeld $\nabla_X \xi$ zu definieren. Eine dieser Möglichkeiten ist jedoch in natürlicher Weise optimal. Verlangen wir nämlich, daß für jedes Vektorfeld Y die "Leibniz-Regel" gelten sollte

$$X(\xi(Y)) = \nabla_X(\xi(Y)) = (\nabla_X\xi)(Y) + \xi(\nabla_X Y)$$

was, in lokalen Koordinaten (x^i) so aussieht

$$X^s\partial_s(\xi_i Y^i) = (\nabla_X\xi)_i Y^i + \xi_i Y^i_{,s} X^s =$$

$$= (\nabla_X\xi)_i Y^i + \xi_i X^s \partial_s Y^i + \xi_i X^s \Gamma^i_{sj} Y^j,$$

also muß man

$$(\nabla_X\xi)_i = X^s(\partial_s\xi_i - \Gamma^j_{si}\xi_j)$$

setzen, weil Y beliebig war. Aus der Transformationsregel für Γ^k_{ij} folgt, daß

$$(\nabla\xi)_{ji} = \partial_j\xi_i - \Gamma^s_{ji}\xi_s$$

die lokalen Komponenten eines $(0,2)$ Tensorfeldes sind, das man durch $\nabla\xi$ bezeichnet, und das $(\nabla_X\xi)_i =$

$= X^s(\nabla\xi)_{si}$. Wir verwenden die vereinfachte Bezeichnung $\nabla_j\xi_i = \xi_{i,j}$ anstelle von $(\nabla\xi)_{ji}$, so daß

$$\xi_{i,j} = \nabla_j\xi_i = \partial_j\xi_i - \Gamma^s_{ji}\xi_s,$$

wobei wieder zu betonen ist, daß, im Gegensatz zu $\partial_j\xi_i$, $\nabla_j\xi_i = \xi_{i,j}$ keine "j-te Ableitung von der Komponente ξ_i" ist, sondern von allen $\xi_1, \dots, \xi_n$ abhängen kann.

SATZ 1. Es sei ∇ ein Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es genau eine Operation, die jedem C^∞-Tensorfeld H vom beliebigen Typ (p,q) ein C^∞-Tensorfeld ∇H vom Typ $(p, q+1)$ zuordnet, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind

(a) $\nabla f = df$ für jede C^∞-Funktion f.

(b) Ist $H = X$ ein C^∞-Vektorfeld, so stimmt ∇H mit der oben definierten "kovarianten Ableitung" ∇X überein.

(c) Die Zuordnung $H \to \nabla H$ ist linear.

(d) Es gilt die Leibniz-Regel für Tensorprodukte:

$$\nabla_X (H \otimes G) = (\nabla_X H) \otimes G + H \otimes \nabla_X G$$

für C^∞-Tensorfelder H, G von beliebigen Typen und für jeden Tangentialvektor X, wobei

$$\nabla_X H = \nabla H(X, \cdot, \dots, \cdot).$$

(e) Die Abbildung $H \longrightarrow \nabla H$ kommutiert mit allen Kontraktionen.

Die einzige Operation $H \to \nabla H$ die die genannten Bedingungen erfüllt ist durch die Gleichung

$$(\nabla_X H)(X_1, \dots, X_q, \xi^1, \dots, \xi^p) = (\nabla H)(X, X_1, \dots, X_q, \xi^1, \dots, \xi^p) =$$

$$= X(H(X_1, \dots, X_q, \xi^1, \dots, \xi^p)) - \sum_{\alpha=1}^{q} H(X_1, \dots, \nabla_X X_\alpha, \dots, X_q, \xi^1, \dots, \xi^p) -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{p} H(X_1, \dots, X_q, \xi^1, \dots, \nabla_X \xi^\beta, \dots, \xi^q)$$

gekennzeichnet; in lokalen Koordinaten,

$$(\nabla H)_{k i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} = \partial_k H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} +$$

$$+ \Gamma_{ks}^{j_1} H_{i_1 \dots i_q}{}^{s j_2 \dots j_p} + \Gamma_{ks}^{j_2} H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 s j_3 \dots j_p} + \dots +$$

$$+ \Gamma_{ks}^{j_p} H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_{k-1} s} - \Gamma_{k i_1}^{s} H_{s i_2 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} -$$

$$- \Gamma_{k i_2}^{s} H_{i_1 s i_3 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} - \dots - \Gamma_{k i_q}^{s} H_{i_1 \dots i_{q-1} s}{}^{j_1 \dots j_p}.$$

Beweis. Da $H(X_1, \dots, \xi^p)$ aus $H \otimes X_1 \otimes \dots \otimes \xi^p$ durch Kontraktionen entsteht, folgen die Formeln für $(\nabla_X H)(X_1, \dots, \xi^p)$ und $(\nabla H)_{k i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}$ aus (a) – (e), was auch die Eindeutigkeit der Operation $H \to \nabla H$ beweist; für C^∞-kovariante Vektorfelder ξ muß nämlich $\nabla \xi$ wegen (d) und (e) wie oben beschrieben aussehen. Es ist nun leicht zu prüfen, daß unsere Koordinatenformel für ∇H tatsächlich ein C^∞-Tensorfeld definiert und daß (a) – (e) gelten.

q.e.d.

Statt $(\nabla H)_{k i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}$ werden wir, wie bei Vektorfeldern, $\nabla_k H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}$ oder $H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}{}_{,k}$ schreiben. Es gilt, z. B.

$$H_i{}^j{}_{,k} = \partial_k H_i{}^j + \Gamma_{ks}^j H_i{}^s - \Gamma_{ki}^s H_s{}^j ,$$

$$H_{ij,k} = \partial_k H_{ij} - \Gamma_{ki}^s H_{sj} - \Gamma_{kj}^s H_{is} ,$$

$$H^{ij}{}_{,k} = \partial_k H^{ij} + \Gamma_{ks}^i H^{sj} + \Gamma_{ks}^j H^{is}.$$

Die Leibniz-Regel ergibt, insbesondere

$$(X^i \xi_j)_{,k} = X^i{}_{,k} \xi_j + X^i \xi_{j,k}$$

$$(X^i H_{ij})_{,k} = X^i{}_{,k} H_{ij} + X^i H_{ij,k} \text{, usw.}$$

Bemerkung. Die Operation der kovarianten Ableitung $H \to \nabla H$ kommutiert mit allen Permutationen der Indizes. Dies ist aus der Koordinatenformel für ∇H klar, wenn die Permutation in der Vertauschung zweier oberen (bzw. unteren) Indizes besteht; durch endlich viele solche Vertauschungen kann man jede Permutation erhalten.

Gilt insbesondere $H_{ij} = H_{ji}$ (bzw., $H_{ij} = -H_{ji}$), so ist auch $H_{ij,k} = H_{ji,k}$ (bzw. $H_{ij,k} = -H_{ji,k}$).

Man kann auch kovariante Ableitungen höherer Ordnungen betrachten, indem man $\nabla^2 H = \nabla(\nabla H)$, $\nabla^3 H = \nabla(\nabla^2 H)$ und, allgemeiner, $\nabla^{m+1} H = \nabla(\nabla^m H)$ setzt. Für H vom Typ (p,q) ist $\nabla^m H$ vom Typ $(p, q+m)$. Statt $H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}{}_{,k_1,k_2,\dots,k_m}$ werden wir $H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}{}_{,k_1 \dots k_m}$ schreiben. Insbesondere, für jede C^∞-Funktion f können die kovarianten Ableitungen $\nabla f = df$, $\nabla^2 f = \nabla df$, $\nabla^3 f$, $\nabla^4 f, \dots$ gebildet werden, mit lokalen Komponenten $f_{,i}$, $f_{,ij}$, $f_{,ijk}$, $f_{,ijkl}$ usw.

Sei nur E ein n-dimensionaler affiner Raum mit dem natürlichen affinen Zusammenhang ∇. In affinen Koordinaten hat man dann $H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}{}_{,k} = \partial_k H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}$. Deshalb gilt, für jedes C^∞-kovariante Vektorfeld ξ auf E, $\xi_{k,ji} = \xi_{k,ij}$ (die letzte Bedingung ist koordinatenunabhängig!). Für einen beliebigen Zusammenhang ∇ auf der Mannigfaltigkeit M und ein C^∞-kovariantes Vektorfeld ξ erhält man dagegen

$$\xi_{k,ji} - \xi_{k,ij} = R_{ijk}{}^s \xi_s - T_{ij}{}^s \xi_{k,s},$$

wobei

$$R_{ijk}{}^s = \partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{il}^s \Gamma_{jk}^l$$

und T der Torsionstensor von ∇ ist. Man sieht leicht, daß die $R_{ijk}{}^s$ die Komponenten eines $(1,3)$-Tensorfeldes sind, und, für beliebige C^∞-Vektorfelder X, Y, Z ist das Vektor-

feld $R(X,Y,Z)$ (das man eher durch $R(X,Y)Z$ bezeichnet) durch

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

gegeben. Man nennt R <u>den Krümmungstensor</u> (genauer, das Krümmungstensorfeld) <u>von</u> ∇. Der Zusammenhang ∇ heißt <u>flach</u>, wenn sein Krümmungstensor und sein Torsionstensor identisch verschwinden. So ist z. B. der natürliche affine Zusammenhang im affinen Raum flach. Nach Beispiel c), Seite 27, gibt es sehr viele nicht-flache Zusammenhänge (auch mit $T=0$).

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang ∇, $\gamma : [a,b] \to M$ eine C^1-Kurve in M und X (bzw. ξ) ein C^∞-Vektorfeld (bzw. C^∞-kovariantes Vektorfeld) auf M. Für jedes $t \in [a,b]$ haben wir den

Tangentialvektor $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$; in jedem Koordinatensystem (x^i) um $\gamma(t)$ ist $(\dot\gamma(t))^i$ durch

$$(\dot\gamma(t))^i = \dot\gamma^i(t)$$

gegeben, wobei $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$ und $\dot\gamma^i(t) = \frac{d}{ds}\gamma^i(s)\big|_{s=t}$. Man hat

$$(\nabla_{\dot\gamma(t)}X)^i = \dot\gamma^j(t)\,\partial_j X^i(\gamma(t)) + $$
$$+ \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\,X^k(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t) =$$
$$= \frac{d}{dt}X^i(\gamma(t)) + \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\,X^k(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t)$$

und, ähnlicherweise

$$(\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi)_i = \frac{d}{dt}\xi_i(\gamma(t)) - \Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\,\xi_k(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t).$$

Deshalb ist $\nabla_{\dot\gamma(t)}X$ (bzw. $\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi$) durch die Abbildung $t \to X(\gamma(t))$ (bzw., $t \to \xi(\gamma(t))$) eindeutig bestimmt, d. h., es hängt nur von der Werte ab, die X (bzw. ξ) <u>in den Punkten der Kurve</u> γ annimmt.

Definieren wir ein C^∞-Vektorfeld X (bzw. ein C^∞-kovariantes Vektorfeld ξ) längs der C^∞-Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ als eine Abbildung, die jedem $t \in [a,b]$ ein $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ (bzw. $\xi(t) \in T^*_{\gamma(t)}M$) zuordnet, so daß, in jedem Koordinatensystem (x^i) das das Abbild von γ schneidet, die Komponenten $X^i(t)$ von $X(t)$ (bzw. $\xi_i(t)$ von $\xi(t)$) C^∞-Funktionen von t sind (diese Definition ist geometrisch!). Ist nun ∇ ein beliebiger Zusammenhang auf M, so sind, für jedes t,

$$(\nabla_{\dot\gamma(t)}X)^i = \frac{d}{dt}X^i(t) + \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\,X^k(t)\,\dot\gamma^j(t),$$

bzw.

$$(\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi)_i = \frac{d}{dt}\xi_i(t) - \Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\,\xi_k(t)\,\dot\gamma(t),$$

die Komponenten eines Vektors $\nabla_{\dot\gamma(t)}X \in T_{\gamma(t)}M$ (bzw., eines kovarianten Vektors $\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi \in T^*_{\gamma(t)}M$) und die Zuordnung $t \to \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X$ (bzw. $t \to \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \xi$) ist wieder ein (bzw., kovariantes) C^∞-Vektorfeld längs γ, das man mit $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ (bzw. $\nabla_{\dot{\gamma}} \xi$) bezeichnet. Das Feld X (bzw. ξ) heißt *längs* γ *parallel*, wenn $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ (bzw. $\nabla_{\dot{\gamma}} \xi$) identisch verschwindet.

Beispiele.

a) Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang ∇ und X (bzw. ξ) ein C^∞-Vektorfeld (bzw. ein kovariantes C^∞-Vektorfeld) auf M, das *auf* M *parallel* ist, worunter man versteht, daß $\nabla X = 0$ (bzw., $\nabla \xi = 0$). Für jede C^∞-Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ ist die Einschränkung $X \circ \gamma$ (bzw. $\xi \circ \gamma$) ein (bzw. kovariantes) C^∞-Vektorfeld längs γ. Wegen der allgemein gültigen Relation

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} (X \circ \gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X$$

(bzw., $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} (\xi \circ \gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \xi$) muß dann $X \circ \gamma$ (bzw. $\xi \circ \gamma$) längs γ parallel sein.

b) Es sei E ein n-dimensionaler affiner Raum und ∇ der natürliche affine Zusammenhang auf E. Es gibt dann auf E einen n-dimensionalen Raum von parallelen Vektorfeldern (bzw., von parallelen kovarianten Vektorfeldern), die dadurch gekennzeichnet sind, daß sie in affinen Koordinaten konstante Komponentenfunktionen haben. Nach a) sind solche Felder auch längs jeder C^∞-Kurve parallel.

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang ∇, $\gamma : [a,b] \to M$ eine C^∞-Kurve.

Wir behaupten, daß es für jeden Vektor $X_0 \in T_{\gamma(a)}M$ genau ein paralleles Vektorfeld X längs γ gibt mit $X(a) = X_0$. Um dies zu beweisen, darf man voraussetzen, daß das Bild $\gamma([a,b])$ von γ in <u>einer</u> Koordinatenumgebung enthalten ist. Man kann nämlich, wegen der Kompaktheit von $\gamma([a,b])$, immer solche $a_0 = a, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k = b$ finden, daß $a_{i-1} < a_i$ und $\gamma([a_{i-1}, a_i])$ ganz in einem Koordinatenbereich liegt, für $i = 1, \ldots, k$. Ist es nun möglich längs solcher Kurven $\gamma: [a_{i-1}, a_i] \to M$ parallele Vektorfelder $\overset{i}{X}$ mit beliebigen Anfangsbedingungen $\overset{i}{X}(a_{i-1})$ zu finden, so kann man induktiv $\overset{1}{X}, \ldots, \overset{k}{X}$ definieren, indem man für $\overset{i+1}{X}$ die

Anfangsbedingung $\overset{i+1}{X}(a_i) = \overset{i}{X}(a_i)$ nimmt. Das aus $\overset{1}{X}, \ldots, \overset{k}{X}$ zusammengesetzte Feld X längs γ ist dann von der Klasse C^1 und hat $\nabla_{\dot\gamma} X = 0$; wegen der lokalen Koordinatenform der letzteren Bedingung muß X von der Klasse C^∞ sein (weil aus $X \in C^m$ sofort $X \in C^{m+1}$ folgt).

Liegt nun $\gamma([a,b])$ in einer Koordinatenumgebung $(U, (x^i))$, so muß man C^∞-Funktionen $X^i: [a,b] \to \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{d}{dt} X^i(t) = -\Gamma^i_{jk}(\gamma(t)) X^k(t) \dot\gamma^j(t),$$

$$X^i(a) = X_0^i.$$

Solche X^i muß es auf dem ganzen $[a,b]$ geben, wegen der Existenz von <u>globalen</u> <u>Lösungen</u> für <u>lineare</u> Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe Anhang unten).

Das parallele Vektorfeld X längs γ ist durch $X(a)$ eindeutig bestimmt wegen des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wir definieren jetzt die <u>Parallelverschiebung</u> längs der Kurve $\gamma : [a,b] \to M$. Dies ist die Abbildung $\tau_\gamma : T_{\gamma(a)} M \longrightarrow T_{\gamma(b)} M$, die jedem $X_0 \in T_{\gamma(a)} M$ den Vektor $X(b)$ zuordnet, wobei X das parallele Vektorfeld längs γ ist mit $X(a) = X_0$. Die Abbildung τ_γ ist linear, da X linear von $X(a)$ abhängt (wegen der Eindeutigkeit). Ist $\tau_\gamma(X_0) = 0$, d. h. $X(b) = 0$, so verschwindet X identisch (wieder

wegen der Eindeutigkeit) und, insbesondere, $X_0 = X(a) = 0$. Deshalb ist die Parallelverschiebung τ_γ ein linearer Isomorphismus der entsprechenden Tangentialräume.

<u>Anhang</u> : Existenz von globalen Lösungen der linearen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.

1. Sei F eine C^1-Funktion auf dem beschränkten Intervall (a, b). Gilt in (a, b)

$$|\dot{F}| \leq C|F|$$

mit einer Konstanten C (wobei $\dot{F}$ die Ableitung von F ist), so ist F auf (a, b) beschränkt (und entweder $F = 0$ identisch, oder $F \neq 0$ überall).

<u>Beweis</u>. Sei $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ ein maximales Intervall wo $F \neq 0$ (vorausgesetzt, daß $F \neq 0$ irgendwo).

Dann, für beliebige $t, t_0 \in (a_1, b_1)$,

$$|\log|F(t)| - \log|F(t_0)|| =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} (\log|F|)^{\cdot}\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |(\log|F|)^{\cdot}|\right| =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} \frac{|\dot F|}{|F|}\right| \leq C|t-t_0| \leq C(b-a).$$

Ist t_0 fest, so folgt daraus, daß in (a_1, b_1), $C_1 \leq \log|F| \leq C_2$ für gewisse reelle C_1, C_2, und $e^{C_1} \leq |F| \leq e^{C_2}$ in (a_1, b_1), also F ist beschränkt in (a_1, b_1). Wäre $(a_1, b_1) \neq (a, b)$, z. B., $a_1 > a$, so würden wir $F(a_1) = 0$ haben (weil (a_1, b_1) maximal ist), was der Ungleichung $|F| \geq e^{C_1}$ in (a_1, b_1) widerspricht. Deshalb ist $(a_1, b_1) = (a, b)$.

2. Eine C^1-Funktion F auf einem beschränkten Intervall (a, b), deren Ableitung beschränkt ist:

$$|\dot F| \leq C,$$

muß Grenzwerte in a und b haben.

<u>Beweis</u>. Sei t_m eine Folge mit $a < t_m < b$, $\lim_m t_m = b$. Dann ist $|F(t_m) - F(t_p)| \leq \leq C|t_m - t_p|$, so daß $F(t_m)$ eine Cauchy-Folge ist. Der Grenzwert von $F(t_m)$ ist offenbar von der Folge t_m unabhängig (man kann zwei solche Folgen zu einer neuen Folge vereinigen). So ist $\lim_m F(t_m) = \lim_{t \to b(-)} F(t)$ und, genauso, gibt es auch $\lim_{t \to a(+)} F(t)$.

3. Seien a_{ij} C^∞-Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Die Lösungen f_i des Systems

$$\dot f_i(t) = \sum_j a_{ij}(t) f_j(t)$$

mit beliebigen Anfangsbedingungen können auf dem ganzen $[a, b]$ definiert werden.

Beweis. Für eine solche Lösung, sei $(a_1, b_1) \subset [a, b]$ das maximale offene Intervall, wo die Lösung noch definierbar ist. Aus der Gleichung folgt, daß

$$\left(\sum_i f_i^2\right)^\cdot = 2\sum_i f_i \dot{f}_i =$$

$$= 2\sum_{i,j} a_{ij}(t) f_i(t) f_j(t).$$

Da die a_{ij} beschränkt sind und $2|f_i f_j| \le f_i^2 + f_j^2$, hat man $|\dot{F}| \le C|F|$ für $F = \sum_i f_i^2$ und eine Konstante C. Nach 1. ist F, und somit alle f_i, auf (a_1, b_1) beschränkt. Wegen unseres Systems von Gleichungen sind nun auch die $\dot{f}_i$ auf (a_1, b_1) beschränkt, so daß es nach 2. Grenzwerte $f_i(a_1)$, $f_i(b_1)$ gibt. Mit diesen

Grenzwerten als neuen Anfangsbedingungen könnte man die f_i über (a_1, b_1) hinaus definieren, was der Maximalität von (a_1, b_1) widersprechen würde, wenn nicht $a_1 = a$, $b_1 = b$ wäre.

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ heißt stückweise C^∞-differenzierbar, wenn sie stetig ist und es $a_0 = a, a_1, \dots, a_k = b$ gibt mit $a_0 < a_1 < \dots < a_k$, für die die Einschränkung von γ auf jedes der Intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ eine C^∞-Kurve ist. Ein Vektorfeld X längs dieser Kurve γ heißt parallel, wenn es stetig ist (d. h. seine lokalen Komponenten stetig vom Parameter der Kurve abhängen) und die Einschränkung von X auf jedes der obengenannten Intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ ein C^∞-differenzierbares paralleles Vektorfeld längs der entsprechenden Einschränkung von γ ist.

Es ist klar, daß es für jede stückweise C^∞-Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ in der Mannigfaltigkeit M, die mit einem Zusammenhang ∇ versehen ist, und für jeden Vektor $X_0 \in T_{\gamma(a)} M$, genau ein paralleles Vektorfeld X längs γ gibt mit $X(a) = X_0$.

Zwei stückweise C^∞-Kurven $\gamma, \gamma' : [a,b] \to M$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten ($\gamma(a) = \gamma'(a)$, $\gamma(b) = \gamma'(b)$) heißen C^∞-<u>homotop</u>, wenn es eine <u>Homotopie</u> F zwischen γ und γ' gibt im folgenden Sinne: $F : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow M$ ist stetig, und wenn man die Kurven $F^s : [a,b] \to M$ für $s \in [0,1]$ durch $F^s(t) = F(t,s)$ definiert, so ist $F^0 = \gamma$, $F^1 = \gamma'$, $F^s(a) = \gamma(a)$, $F^s(b) = \gamma(b)$ für alle $s \in [0,1]$. Außerdem verlangen wir,

daß es $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_k = b$ geben soll, für die jede der Einschränkungen von F auf $[a_{i-1}, a_i] \times [0,1]$, $i = 1, \ldots, k$, C^∞-differenzierbar ist.

Unter einem <u>Vektorfeld</u> X <u>längs</u> dieser <u>Homotopie</u> F versteht man eine Zuordnung $[a,b] \times [0,1] \ni (t,s) \longmapsto$ $\longmapsto X(t,s) \in T_{F(t,s)} M$, deren Einschränkungen auf jedes Produkt $[a_{i-1}, a_i] \times [0,1]$ (a_i wie oben) C^∞-differenzierbar sind (im Sinne der lokalen Komponenten). X selbst braucht nicht auf dem ganzen $[a,b] \times [0,1]$ stetig zu sein.

Beispiele.

a) Sei $\mathcal{U}$ eine offene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $\gamma, \gamma' : [a,b] \to \mathcal{U}$ zwei stückweise C^∞-Kurven mit $\gamma(a) =$

$= \gamma'(a)$, $\gamma(b) = \gamma'(b)$. Die Formel

$$F(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma'(t),$$

$(t,s) \in [a,b] \times [0,1]$, definiert dann eine Homotopie zwischen γ und γ'.

b) Sei F eine Homotopie in der Mannigfaltigkeit M. Die natürlichen "tangentiellen" Vektorfelder ∂_s, ∂_t längs F kann man durch

$$\partial_s(t,s) = \frac{d}{ds} F(t,s)$$

$$\partial_t(t,s) = \frac{d}{dt} F(t,s) = \dot{F}^s(t),$$

definieren, wobei $\frac{d}{ds} F(t,s)$ usw. den Tangentialvektor der Kurve $s \to F(t,s)$ (mit festem t) im Parameter s bezeichnet. ∂_s ist stetig, ∂_t im allgemeinen nicht.

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit mit dem Zusammenhang ∇, F eine Homotopie in M, X ein Vektorfeld längs M. Die "kovarianten Ableitungen von X in den s- und t-Richtungen" sind Vektorfelder $\nabla_{\partial_s} X$, $\nabla_{\partial_t} X$ längs F, die man folgendermaßen definiert:

$$(\nabla_{\partial_s} X)(t,s) = \nabla_{\dot{F}_t(s)} X$$

$$(\nabla_{\partial_t} X)(t,s) = \nabla_{\dot{F}^s(t)} X,$$

wobei $F_t(s) = F(t,s)$ und X jeweils auf die Kurve F_t, bzw. F^s, eingeschränkt wird. Also, in lokalen Koordinaten,

$$(\nabla_{\partial_s} X)^i(t,s) = \frac{\partial X^i}{\partial s}(t,s) + \Gamma^i_{jk}(F(t,s)) X^k(t,s) \frac{\partial F^j}{\partial s}(t,s)$$

$$(\nabla_{\partial_t} X)^i(t,s) = \frac{\partial X^i}{\partial t}(t,s) + \Gamma^i_{jk}(F(t,s)) X^k(t,s) \frac{\partial F^j}{\partial t}(t,s),$$

wobei $F^j = x^j \circ F$ die Komponenten von F sind. Es gilt die Formel

$$\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} X - \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} X = R(\partial_s, \partial_t) X$$

die man leicht beweist, indem man die lokalen Komponenten der linken Seite explizit ausrechnet.

SATZ 2. Sei ∇ ein Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M. Ist ∇ symmetrisch (torsionsfrei), so sind die folgenden 5 Bedingungen äquivalent:

(i) Der Krümmungstensor R von ∇ verschwindet identisch.

(ii) Für beliebige zwei stückweise C^∞-Kurven $\gamma, \gamma' : [a, b] \to M$, die C^∞-homotop sind, stimmen die Parallelverschiebungen $\tau_\gamma, \tau_{\gamma'} : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$ überein.

(iii) Jeder Punkt $y \in M$ hat eine Umgebung $\mathcal{U}$ mit der folgenden Eigenschaft: jeder Vektor $X_0 \in T_y M$ läßt sich zu einem C^∞-Vektorfeld X auf $\mathcal{U}$ fortsetzen ($X(y) = X_0$), das parallel ist ($\nabla X = 0$).

(iv) Jeder Punkt $y \in M$ hat eine Umgebung, wo sich jeder kovariante Vektor $\xi_0 \in T_y^* M$ zu einem parallelen kovarianten Vektorfeld fortsetzen läßt.

(v) Für jeden Punkt $y \in M$ gibt es ein Koordinatensystem $(\mathcal{U}, (x^i))$ um y, so daß die entsprechenden Komponenten des Zusammenhanges ∇ identisch in $\mathcal{U}$ verschwinden:

$$\Gamma_{ij}^k = 0 .$$

Beweis. (i) $\to$ (ii): Sei F eine Homotopie zwischen γ und γ', $X_0 \in T_{\gamma(a)}M$ ein beliebiger Vektor. Wir erweitern X_0 zu einem Vektorfeld X längs F, indem wir X_0 längs jeder der Kurven F^s parallel verschieben. Die Differenzierbarkeit von X (außer den Werten $a_1, \dots, a_{k-1}$ von t, wo F nicht differenzierbar sein muß) folgt aus der regulären Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangsbedingungen und Parametern. Da $R=0$ und $\nabla_{\partial_t} X = 0$, gibt die obige Formel

$$\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} X = \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} X - \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} X = 0,$$

so daß $\nabla_{\partial_s} X$ längs jeder der Kurven F^s parallel ist. Da, für $t=a$, $\nabla_{\partial_s} X = \frac{d}{ds} X_0 = 0$, haben wir auch

$$\nabla_{\partial_s} X \big|_{t=b} = 0, \text{ d.h. } \frac{d}{ds} \tau_{F^s}(X_0) = 0,$$

und somit $\tau_{\gamma'}(X_0) = \tau_{F^1}(X_0) = \tau_{F^0}(X_0) =$

$= \tau_\gamma(X_0)$.

(ii) $\to$ (iii): Eine Umgebung U von y läßt sich mit einem Ball im $\mathbb{R}^n$ gleichsetzen. Für $X_0 \in T_y M$, definieren wir das Vektorfeld X auf U indem wir X_0 zu jedem Punkt aus dem Mittelpunkt y des Balls parallel verschieben, längs des (euklidischen) radialen Abschnittes. X ist differenzierbar wegen der regulären Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Parametern. Um zu beweisen, daß $\nabla X = 0$, genügt es zu zeigen, daß X längs jeder Kurve γ in U parallel ist. Seien t_1, t_2 zwei Parameter von γ mit $t_1 < t_2$ und sei $\tilde{\gamma}$ die Einschränkung von γ auf $[t_1, t_2]$. Der radiale Abschnitt $\overline{y\,\gamma(t_2)}$ von y nach $\gamma(t_2)$ ist homotop mit der aus $\overline{y\,\gamma(t_1)}$ und $\tilde{\gamma}$ zusammengesetzten Kurve $\tilde{\tilde{\gamma}}$ (siehe Beispiel a), Seite 56), wenn man die beiden mit dem gleichen Intervall parametrisiert, was die Parallelverschiebungen nicht beeinträchtigt (vgl. Aufgabe III.3). Deshalb stimmt $X(\gamma(t_2))$ mit dem Vektor $\tau_{\tilde{\tilde{\gamma}}}(X_0)$ überein, d. h., mit $\tau_{\tilde{\gamma}}(\tau_{\overline{y\,\gamma(t_1)}}(X_0)) = \tau_{\tilde{\gamma}}(X(\gamma(t_1)))$.(*)

Da t_1, t_2 beliebig waren, muß X längs γ parallel sein.

(iii) $\to$ (iv): Nach (iii) gibt es auf U, $n = \dim M$ parallele Vektorfelder $\underset{i}{X}$, die in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes bilden. Sind $\overset{i}{\xi}$ die dazu dualen kovarianten Vektorfelder auf U, so daß $\overset{i}{\xi}(\underset{j}{X}) = \delta^i_j$, so müssen die $\overset{i}{\xi}$ differenzierbar sein und, für jeden

(*) Siehe Aufgabe III.4.

Vektor Y, $0 = \nabla_Y \delta^i_j = (\nabla_Y \overset{i}{\xi})(\underset{j}{X})$, für alle j. Deshalb $\nabla \overset{i}{\xi} = 0$, und eine geeignete Kombination von den $\overset{i}{\xi}$, mit konstanten Koeffizienten, nimmt in y jeden vorgeschriebenen Wert an.

(iv) $\to$ (v): Sei U eine zu einem euklidischen Ball diffeomorphe Koordinatenumgebung von y, wo parallele, in jedem Punkt linear unabhängige kovariante Vektorfelder $\overset{1}{\xi}, \ldots, \overset{n}{\xi}$ existieren, $n = \dim M$. Da $\nabla \overset{i}{\xi} = 0$, gilt $d\overset{i}{\xi} = 0$ (Beispiel d), Seite 16), woher $\overset{i}{\xi} = dx^i$ für geeignete Funktionen x^i in U (Aufgabe III.6). In einer (vielleicht kleineren) Umgebung von y bilden die x^i ein Koordinatensystem (Aufgabe III.7). Da $\nabla(dx^i) = 0$ und $\nabla_{\partial_i} dx^j = -\Gamma^j_{ik}\, dx^k$ (Aufgabe II.9), schließen wir, daß $\Gamma^k_{ij} = 0$.

(v) → (i): trivial.

FOLGERUNG 1. Für einen Zusammenhang ∇ auf der Mannigfaltigkeit M sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $R = 0$ und $T = 0$ identisch.

(ii) Für jeden Punkt $y \in M$ gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von y und einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathcal{U} \to \Phi(\mathcal{U})$, $\Phi(\mathcal{U})$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$), so daß, in $\mathcal{U}$,

$\nabla = \Phi^* \overset{\circ}{\nabla}$, wobei $\overset{\circ}{\nabla}$ die Einschränkung des natürlichen affinen Zusammenhangs des affinen Raumes $\mathbb{R}^n$ auf $\Phi(\mathcal{U})$ ist.

Beweis. (i) → (ii): Das in der Behauptung (v) von Satz 2 auftretende Koordinatensystem (x^i) bildet den gesuchten Diffeomorphismus Φ (vgl.

Aufgabe II. 4).

(ii) → (i): Siehe Aufgaben II. 10 und III. 1.

Sei nun ∇ ein Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M, der symmetrisch ist ($T = 0$). Für jedes C^∞-kovariante Vektorfeld ξ, haben wir die Ricci-Identität

$$\xi_{k,ji} - \xi_{k,ij} = R_{ijk}{}^s \xi_s .$$

Außerdem gilt, wegen $T = 0$, für jede Funktion f der Klasse C^2,

$$f_{,ij} = f_{,ji} .$$

Insbesondere, für $\xi = df$,

$$f_{,kji} - f_{,kij} = R_{ijk}{}^s f_{,s} .$$

Daraus folgt die erste Bianchi-Identität für symmetrische Zusammenhänge:

$$R_{ijk}{}^s + R_{jki}{}^s + R_{kij}{}^s = 0 .$$

Es genügt nämlich zu zeigen, das, in jedem Punkt y und für jedes $\xi \in T_y^* M$, $(R_{ijk}{}^s + R_{jki}{}^s + R_{kij}{}^s)\xi_s = 0$ (Aufgabe II. 1).

Man hat $\xi_s = f_{,s}(y)$ für eine in einer Umgebung von y definierte C^∞-Funktion f (z. B. $f = \xi(\partial_i(y))x^i$, wobei (x^i) ein Koordinatensystem um y ist). Nach der Ricci-Identität und der Symmetrie $f_{,ijk} = f_{,jik}$, ist $R_{ijk}{}^s f_{,s} + R_{jki}{}^s f_{,s} + R_{kij}{}^s f_{,s} = 0$.

Ferner haben wir <u>die zweite Bianchi-Identität</u> für symmetrische Zusammenhänge:

$$R_{ijk}{}^s{}_{,l} + R_{lik}{}^s{}_{,j} + R_{jlk}{}^s{}_{,i} = 0.$$

Um sie zu beweisen, leiten wir zunächst die <u>Ricci-Identität</u> <u>für</u> <u>Vektorfelder</u> X der Klasse C^∞ (immer unter der Voraussetzung $T=0$):

$$X^k{}_{,ji} - X^k{}_{,ij} = -R_{ijs}{}^k X^s.$$

Es gilt nämlich, für jedes C^∞-kovariante Vektorfeld ξ, $(X^k\xi_k)_{,ji} = X^k{}_{,ji}\xi_k + X^k\xi_{k,ji} + X^k{}_{,j}\xi_{k,i} + X^k{}_{,i}\xi_{k,j}$, also

$$0 = (X^k\xi_k)_{,ji} - (X^k\xi_k)_{,ij} =$$
$$= \xi_k(X^k{}_{,ji} - X^k{}_{,ij}) + X^s(\xi_{s,ji} - \xi_{s,ij}) =$$
$$= \xi_k(X^k{}_{,ji} - X^k{}_{,ij} + R_{ijs}{}^k X^s).$$

Da ξ beliebig war, folgt daraus die Ricci-Identität für X.

Man hat auch die Ricci-Identität für C^∞-Tensorfelder H vom Typ $(0,2)$:

$$H_{kl,ji} - H_{kl,ij} = R_{ijk}{}^s H_{sl} + R_{ijl}{}^s H_{ks},$$

die man ähnlich beweisen kann, indem man für beliebige C^∞-Vektorfelder X, Y $(H_{kl}X^kY^l)_{,ij}$ ausrechnet und bedenkt, daß $(H_{kl}X^kY^l)_{,ji} - (H_{kl}X^kY^l)_{,ij} = 0$ und X sowie Y der Ricci-Identität für Vektorfelder genügen.

Wir können jetzt die zweite Bianchi-Identität beweisen, indem wir zeigen, daß in jedem Punkt y und für jeden kovarianten Vektor $\xi \in T_y^* M$,

$$\xi_s (R_{ijk}{}^s{}_{,l} + R_{lik}{}^s{}_{,j} + R_{jlk}{}^s{}_{,i}) = 0.$$

Dazu finden wir eine Funktion f in einer Umgebung von y mit $f_{,i}(y) = \xi_i$ und $f_{,ij}(y) = 0$ (z. B. $f = \xi_i x^i + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(y) \xi_k x^i x^j$, wobei (x^i) ein beliebiges Koordinatensystem um y bilden mit $x^i(y) = 0$). Durch Differentiation der Ricci-Identität für $f_{,i}$, erhalten wir, im Punkt y,

$$f_{,kjil} - f_{,kijl} = R_{ijk}{}^s{}_{,l} f_{,s}.$$

Wenn man dies zyklisch bezüglich i, j, l summiert und bedenkt, daß $f_{,ijkl}(y) = f_{,ijlk}(y)$ (wegen der Ricci-Identität für $f_{,ij}$ mit $f_{,ij}(y) = 0$, bekommt man die 2. Bianchi-Identität.

Eine andere algebraische Eigenschaft des Krümmungstensors R folgt unmittelbar aus seiner Definition:

$$R_{ijk}{}^s = -R_{jik}{}^s.$$

<u>Bemerkung.</u> Die Bianchi- und Ricci-Identitäten können auch direkt bewiesen werden, indem man die Koordinatendefinition von R verwendet. Die dabei vorkommenden Berechnungen sind nicht komplizierter, jedoch wesentlich länger als die oben angeführten.

Riemannsche Geometrie

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Unter einer <u>Riemannschen Metrik</u> auf M verstehen wir ein C^∞-Tensorfeld g vom Typ $(0,2)$ auf M, das in jedem Punkt <u>symmetrisch</u> und <u>positiv definit</u> ist, also $g(X,Y) = g(Y,X)$ und $g(Z,Z) > 0$ für jedes $y \in M$ und beliebige $X, Y, Z \in T_y M$ mit $Z \neq 0$. Das Paar (M, g) nennt man dann eine <u>Riemannsche Mannigfaltigkeit</u>.

Sei nun y ein fester Punkt der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), $X \in T_yM$ ein Tangentialvektor. Mit Hilfe von g kann man X einen kovarianten Vektor $\xi \in T_y^*M$ zuordnen, indem man setzt $\xi(Y) = g(X,Y)$, d. h., $\xi_i Y^i = g_{ij}X^jY^i$ für jeden Vektor $Y \in T_yM$. Wir haben also $\xi_i = g_{ij}X^j$. Von nun an werden wir, statt ξ_i, X_i schreiben; der Vektor X kann also als kovarianter Vektor betrachtet werden, indem wir seinen oberen Index "herunterziehen", d. h. X^j mit g_{ij} überschieben:

$$X_i = g_{ij}X^j.$$

Der inverse $(2,0)$-Tensor von g in y ist ebenso symmetrisch und positiv definit*; wenn wir seine Komponenten mit g^{ij} (statt $\bar{g}^{ij}$) bezeichnen, so haben wir $g^{ij}\xi_i\xi_j > 0$ für jedes $\xi \in T_y^*M$, $\xi \neq 0$. Für jeden kovarianten Vektor $\xi \in T_y^*M$ kann man ξ als einen Vektor $X \in T_yM$

* Aufgabe I.13.

betrachten, wobei

$$X^i = g^{ij}\xi_j,$$

d. h., für jedes $\eta \in T_y^*M$, $\eta(X) = g^{ij}\xi_j\eta_i = \bar{g}(\xi,\eta)$; man sagt, daß X aus ξ durch das "heraufziehen" des Index entsteht und schreibt ξ^i statt X^i, also

$$\xi^i = g^{ij}\xi_j.$$

Die Operationen des herauf- und herunterziehen des Index sind zueinander invers, d. h.,

$$g^{ij}X_j = X^i, \quad g_{ij}\xi^j = \xi_i$$

für alle $X \in T_yM$, $\xi \in T_y^*M$, weil $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, $g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$. Man hat auch

$$g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j = X_iY^i = X^iY_i$$

$$g^{ij}\xi_i\eta_j = \xi^j\eta_j = \xi_i\eta^i$$

für beliebige $X, Y \in T_yM$, $\xi, \eta \in T_y^*M$. Insbesondere gilt $g(X,X) = X^iX_i$, $g^{ij}\xi_i\xi_j = \xi^i\xi_i$; statt X^iX_i, bzw.

$\xi^i \xi_i$ werden wir auch $|X|^2$ (bzw. $|\xi|^2$) schreiben. Wir werden auch die Bezeichnung $g(\xi, \eta) = g^{ij} \xi_i \eta_j$ (statt $\bar{g}(\xi, \eta)$) für $\xi, \eta \in T_y^*M$ verwenden. So ist die Zuordnung $X \to |X| = (X^i X_i)^{1/2}$, $\xi \to |\xi| = (\xi^i \xi_i)^{1/2}$ eine Norm in T_yM (bzw. in T_y^*M). Das herauf- oder herunterziehen des Index erhält die Norm, bildet also eine lineare Isometrie zwischen T_yM und T_y^*M.

Beispiel. Für eine Funktion f der Klasse C^1 auf M kann $df(y)$ als ein Vektor betrachtet werden, den man den Gradient von f nennt und mit grad f oder ∇f bezeichnet (genauer: $\text{grad}_y f$ oder $\nabla f(y)$). In lokalen Koordinaten hat er die Komponenten

$$f,^i(y) = \nabla^i f(y) = g^{ij} f,_j(y).$$

Sei nun H ein $(0,2)$-Tensor in y. Man kann H einen $(1,1)$-Tensor $\tilde{H}$ in y zuordnen, indem man setzt

$$\tilde{H}_i{}^j = g^{jk} H_{ik}.$$

Als Endomorphismus von T_yM, operiert $\tilde{H}$ auf einem Vektor X durch

$$\tilde{H}(X) = H(X, \cdot)$$

wobei der kovariante Vektor auf der rechten Seite durch heraufziehen des Index als ein Vektor betrachtet wird. Ebenso erhält man einen $(1,1)$-Tensor $\tilde{\tilde{H}}$ in y, wenn man setzt

$$\tilde{\tilde{H}}{}^i{}_j = g^{ik} H_{kj},$$

d. h.

$$\tilde{\tilde{H}}(X) = H(\cdot, X)$$

für $X \in T_yM$. Wir werden statt $\tilde{H}_i{}^j$ (bzw. $\tilde{\tilde{H}}{}^i{}_j$) $H_i{}^j$ und $H^i{}_j$ schreiben, so daß

$$H_i{}^j = g^{jk} H_{ik}$$

$$H^i{}_j = g^{ik} H_{kj}.$$

Durch diese Schreibweise werden die zwei verschiedenen (1,1)-Tensoren $\tilde{H}, \tilde{\tilde{H}}$ nicht verwechselt, weil ihre Indices anders placiert sind. Man sagt, daß diese Tensoren aus H durch das heraufziehen des zweiten (bzw. des ersten) Index entstehen.

Ist nun H ein (1,1)-Tensor, so definiert er einen (0,2)-Tensor durch das herunterziehen des oberen Index

$$H_{ij} = H_i{}^k g_{kj}$$

sowie einen (2,0)-Tensor durch das heraufziehen des unteren Index:

$$H^{ij} = g^{ik} H_k{}^j .$$

Wir haben hier $g^{kj} H_{ij} = H_i{}^k$, so daß die erstere Operation zu einer der oben erwähnten invers ist. Allgemeiner, kann man aus einem (p,q)-Tensor H einen $(p-1, q+1)$-Tensor durch

$$H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_{s-1}}{}_{j_s}{}^{j_{s+1} \dots j_p} =$$

$$= g_{j_s i} H_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_{s-1} i j_{s+1} \dots j_p}$$

sowie einen $(p+1, q-1)$-Tensor durch

$$H_{i_1 \dots i_{m-1}}{}^{i_m}{}_{i_{m+1} \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} =$$

$$= g^{i_m s} H_{i_1 \dots i_{m-1} s i_{m+1} \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p}$$

bilden. Man sagt, das diese Tensoren aus H durch das herunterziehen des s-ten oberen (bzw., das heraufziehen des m-ten unteren) Index entstehen. Man bezeichnet sie wieder mit dem gleichen Buchstaben H; wenn wir die verschobenen Indices in derselben "Spalte" stehen lassen, ist keine Verwechslung möglich. Die Operationen des herauf- und herunterziehen sind auch für beliebige Tensoren im offenbaren Sinne zueinander invers.

Für zwei Tensoren H, G vom Typ (p,q) im Punkt y, definiert man ihr <u>Skalarprodukt</u> $g(H,G)$ durch

$$g(H,G) = H^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_p}\, G_{i_1\cdots i_q}{}^{j_1\cdots j_p} =$$

$$= g^{i_1k_1}\cdots g^{i_qk_q}\, g_{j_1l_1}\cdots g_{j_pl_p} \times$$

$$\times H_{k_1\cdots k_q}{}^{l_1\cdots l_p}\, G_{i_1\cdots i_q}{}^{j_1\cdots j_p}.$$

Dieses Skalarprodukt im Raum der (p,q)-Tensoren in y ist offenbar symmetrisch. Außerdem ist es positiv definit. Finden wir nämlich* ein Koordinatensystem (x^i) um y mit $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$, so ist auch $g^{ij}(y) = \delta^{ij}$ und somit

$$g(H,H) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_q\\ j_1,\dots,j_p}} \left(H_{i_1\cdots i_q}{}^{j_1\cdots j_p}\right)^2.$$

Die Norm $|H|$ von H wird durch $|H| = (g(H,H))^{1/2}$ definiert. Sind H, G Tensoren vom Typ (p,q), H', G' Tensoren vom Typ (p',q') in y, so

*Aufgabe III.9

gilt $g((H\otimes H'),(G\otimes G')) =$
$= g(H,G)\cdot g(H',G')$. Deshalb

$$\frac{1}{2}\,|H\otimes G - G\otimes H|^2 = |H|^2|G|^2 - [g(H,G)]^2,$$

für beliebige Tensoren H, G vom Typ (p,q). Daraus folgt die <u>Schwarzsche Ungleichung</u>

$$[g(H,G)]^2 \leq |H|^2|G|^2$$

wobei die Gleichung genau dann gilt, wenn $H\otimes G = G\otimes H$, d.h., wenn H und G proportional sind (vgl. Aufgaben III.8, III.2).

<u>Bemerkung</u>. Die Schwarzsche Ungleichung kann – nach Bedarf – unterschiedlich angewandt werden, auch für Abschätzungen des gleichen Ausdrucks.

Sei H ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor, X ein beliebiger Vektor.

1. $|H(X,X)| \leq |H|\cdot|X|^2$, d.h.,

$$|H(X,X)| \leq (\mathrm{Sp}(H^2))^{1/2}|X|^2,$$

wenn man H durch das heraufziehen eines Index als einen $(1,1)$-Tensor, d.h., einen Endomorphismus von T_yM betrachtet. Es gilt nämlich, mit $G = X\otimes X$,

$$(H(X,X))^2 = (H_{ij}G^{ij})^2 \leq |H|^2|G|^2 =$$
$$= |H|^2|X|^4$$

Andrerseits hat man

$$|H(X,X)| \leq (\mathrm{Sp}(H^4))^{1/4}\cdot|X|^2.$$

Wenn man nämlich $Y_i = H_{ij}X^j$ setzt, so $Y_iY^i = H_{ij}X^jH^{ik}X_k = G_{jk}X^jX^k$, wobei $G_{jk} = H_{js}H^s_k$ (so daß, als Endomorphismus, $G = H\circ H$). Nach der obigen Abschätzung,

$$|Y|^2 \leq (\mathrm{Sp}\,H^4)^{1/2}|X|^2$$

also

$$|H(X,X)|^2 = [g(Y,X)]^2 \leq (\mathrm{Sp}\,H^4)^{1/2}|X|^4.$$

Um die Analysis auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten sinnvoll zu betreiben, brauchen wir noch eine Möglichkeit, Ableitungen von Tensorfeldern als globale Objekte zu betrachten – d.h., einen Zusammenhang. Wir werden für (M,g) einen Zusammenhang ∇ suchen, für den g parallel ist, d.h. $\nabla g = 0$, was nichts anderes als die "Leibniz-Regel" bedeutet:

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_XY,Z) + g(Y,\nabla_XZ).$$

SATZ 3. Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gibt es genau einen Zusammenhang ∇, der symmetrisch ist und der Bedingung $\nabla g = 0$ genügt. Dieser <u>Riemannsche Zusammenhang</u> von (M,g) (auch <u>Levi-Civita</u>-Zusammenhang genannt) hat als lokale Komponenten die folgenden <u>Christoffel-Symbole</u>:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}).$$

<u>Beweis</u>. Seien Γ_{ij}^k die Komponenten eines symmetrischen Zusammenhanges für den $0 = g_{jk,i} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^s g_{sk} - \Gamma_{ik}^s g_{js}$. Setzt man $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^s g_{sk}$, so bedeutet dies

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}$$
$$\partial_j g_{ik} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{jki}$$
$$-\partial_k g_{ij} = -\Gamma_{kij} - \Gamma_{kji}$$

und $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$. Summiert man diese drei Gleichungen, so folgt, daß $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$. Die Christoffel-Symbole sind also, in beliebigen Koordinaten, die Komponenten des <u>einzigen</u> symmetrischen Zusammenhanges für den g parallel ist. In der Durchschnittsmenge zweier Koordinatensysteme definieren die Christoffel-Symbole deshalb <u>denselben</u> Zusammenhang, also die entsprechende Transformationsregel muß gelten. q.e.d.

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) werden wir mit ∇ immer den Riemannschen Zusammenhang von (M,g) bezeichnen. Die Operation der kovarianten Ableitung kommutiert dann mit dem herauf- oder herunterziehen von Indices, z.B.

$$(g^{js}H_{isk})_{,l} = g^{js}(H_{isk,l})$$

so daß wir statt dessen immer $H_i{}^j{}_{k,l}$ schreiben dürfen. Das gleiche gilt für die Kontraktionen $H_{ij}{}^j = g^{jk}H_{ijk}$, also $(H_{ij}{}^j)_{,l} = g^{jk}(H_{ijk,l})$; wir werden hier einfach $H_{ij}{}^j{}_{,l}$ schreiben.

Durch daß herunterziehen des oberen Index kann man den Krümmungstensor R von ∇ immer als ein $(0,4)$-Tensorfeld betrachten:

$$R_{ijkl} = R_{ijk}{}^s g_{sl}.$$

Die Ricci-Identität

$$g_{kl,ji} - g_{kl,ij} = R_{ijk}{}^s g_{sl} + R_{ijl}{}^s g_{ks}$$

zusammen mit $g_{kl,i} = 0$ ergibt dann

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}.$$

Außerdem gilt

$$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

Man hat nämlich, wegen der 1. Bianchi-Identität,

$$R_{ijkl} = -R_{jkil} - R_{kijl} = R_{jkli} + R_{kilj},$$

sowie

$$R_{jkli} = -R_{klji} - R_{ljki},$$

$$R_{kilj} = -R_{lkij} - R_{ilkj},$$

also $R_{ijkl} = 2R_{klij} + R_{ljik} + R_{iljk}$,

woher $2R_{ijkl} = 2R_{klij}$, wieder wegen der 1. Bianchi-Identität.

Der Ricci-Tensor der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist das $(0,2)$-Tensorfeld r auf M mit den Komponenten

$$r_{ij} = R_{isj}{}^{s} = g^{kl}R_{ikjl}.$$

Also $r_{ij} = g^{kl}R_{ikjl} = g^{lk}R_{jlik} = r_{ji}$,

d.h., r ist symmetrisch. Außerdem,

$$r_{ij} = R_{isj}{}^{s} = R_{si}{}^{s}{}_{j} = -R_{is}{}^{s}{}_{j} = -R^{s}{}_{\cdot ijs}$$

(aber $R^{s}{}_{sij} = R_{ijs}{}^{s} = 0$, weil R bezüglich der ersten, bzw. letzten zwei Indices schiefsymmetrisch ist).

Die Skalarkrümmung von (M,g) ist die Funktion u auf M, die man folgendermaßen definiert:

$$u = g^{ij}r_{ij} = r_{i}{}^{i}.$$

Aus der 2. Bianchi-Identität

$$R_{ijkl,s} + R_{sikl,j} + R_{jskl,i} = 0$$

folgt, durch das Überschieben mit g^{ik},

$$r_{jl,s} - r_{sl,j} + R_{jskl,}{}^{k} = 0$$

und ferner, durch das Überschieben mit g^{sl}, $r_{js,}{}^{s} - u_{,j} + r_{jk,}{}^{k} = 0$, d.h.

$$r_{is,}{}^{s} = \frac{1}{2}u_{,i}.$$

LEMMA 1. Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$r_{ij} = f g_{ij}$$

wobei f eine Funktion ist. Dann ist $f = \frac{u}{n}$. Außerdem, wenn $n \geqslant 3$, muß u (und somit f) konstant sein.

<u>Beweis</u>. Da $g^{ij} g_{ij} = n$, folgt $f = \frac{u}{n}$ durch das Überschieben mit g^{ij}. Nun haben wir

$$\frac{1}{2} u_{,i} = r_{ij,}{}^{j} = \frac{1}{n} u_{,}{}^{j} g_{ij} = \frac{1}{n} u_{,i}.$$

Ist $n > 2$, so $u_{,i} = 0$, d. h. u ist konstant. q.e.d.

Eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt ein <u>Einstein-Raum</u> wenn $r = \frac{u}{n} g$ und u konstant ist (falls $n > 2$, folgt die zweite Bedingung automatisch aus der ersten, vgl. Lemma 1).

Sei nun y ein Punkt der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), H ein $(0,4)$-Tensor in y, der die algebraischen Symmetrien des Riemannschen Krümmungs-

tensors besitzt: $H_{ijkl} = -H_{jikl} = -H_{ijlk} = H_{klij}$, $H_{ijkl} + H_{jkil} + H_{kijl} = 0$.

Für jede Ebene P in y (einen zweidimensionalen Unterraum P von $T_y M$) kann man eine reelle Zahl $K_H(P)$ definieren, indem man $K_H(P) = H(X,Y,X,Y)$ setzt, wobei X, Y eine beliebige Orthonormalbasis von P ist. Es ist bekannt, daß H durch die Zuordnung $P \to K_H(P)$ eindeutig bestimmt ist. Ist $H_{ijkl} = a(g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il})$, so ist $K_H(P)$ von P unabhängig: $K_H(P) = a$ für alle P. Ist umgekehrt $K_H(P) = a$ für alle P, so gilt $H_{ijkl} = a(g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il})$, wegen der obenerwähnten Eindeutigkeit. Für $H = R$ nennt man $K(P) = K_R(P)$ die (Riemannsche) <u>Schnittkrümmung der Tangentialebene</u> P. Ist insbesondere $\dim M = 2$, so gibt es in jedem Punkt nur eine Tangentialebene. Also

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}),$$

woher

$$r_{ij} = K g_{ij}, \quad K = \frac{u}{2}$$

für jede <u>zwei-dimensionale</u> Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g), wobei K eine Funktion auf M ist, die man die <u>Gaußsche</u> <u>Krümmung</u> von (M,g) nennt.

LEMMA 2 (Satz von F. Schur, 1886). Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, mit der folgenden Eigenschaft: Die Schnittkrümmung einer Tangentialebene P im Punkt $y \in M$ hängt nur von y ab. Dann ist diese Schnittkrümmung auch von y unabhängig, d. h.

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}),$$

wobei K <u>konstant</u> ist (man sagt dann, daß (M,g) ein <u>Raum</u> <u>konstanter</u> <u>Krümmung</u> ist).

<u>Beweis</u>. Nach Voraussetzung, gilt $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})$ mit einer <u>Funktion</u> K. Daher $r_{ij} = (n-1)Kg_{ij}$. Unsere Behauptung folgt nun aus Lemma 1.

q. e. d.

Seien nun M, N Mannigfaltigkeiten, g eine Riemannsche Metrik auf N, $\Phi: M \to N$ eine C^∞-differenzierbare Abbildung. Das <u>zurückgeholte</u> Tensorfeld Φ^*g auf M wird folgendermaßen definiert:

$$(\Phi^*g)(X,Y) = g(\Phi_* X, \Phi_* Y).$$

Deshalb ist Φ^*g in jedem Punkt symmetrisch und positiv-semidefinit. Ist Φ außerdem eine <u>Immersion</u> (d. h., ist das Differential von Φ in jedem Punkt injektiv), so ist Φ^*g eine Riemannsche Metrik auf M. Ein Diffeomorphismus $\Phi: M \to N$ ist eine <u>Isometrie</u> der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M,h), (N,g), wenn $\Phi^*g = h$; dies bedeutet, daß das Differential von Φ in jedem

Punkt eine lineare Isometrie der betreffenden Tangentialräume mit entsprechenden Skalarprodukten ist.

LEMMA 3. Ist $\Phi : M \to N$ ein Diffeomorphismus, g eine Riemannsche Metrik auf N und $\bar{g} = \Phi^* g$, so sind auch die Riemannschen Zusammenhänge $\nabla, \bar{\nabla}$ und die $(0,4)$-Krümmungstensoren $R, \bar{R}$ von g, bzw. $\bar{g}$, <u>Φ-verknüpft</u> im Sinne, daß $\Phi^* \nabla = \bar{\nabla}$ und $\Phi^* R = \bar{R}$ (d.h. $\bar{R}(X,Y,Z,W) = \bar{R}(\Phi_* X, \Phi_* Y, \Phi_* Z, \Phi_* W)$ für beliebige Tangentialvektoren X, Y, Z, W in M).

<u>Beweis</u>. Seien (x^i) lokale Koordinaten in N und $(x^{\bar{i}})$ die entsprechenden Φ-verknüpften Koordinaten in M, d.h., $x^{\bar{i}} = x^i \circ \Phi$. Dann sind die g_{ij} durch dieselben Funktionen der x^i dargestellt wie die $\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}}$ als Funktionen der $x^{\bar{i}}$. Deshalb muß das gleiche für die entsprechenden Komponenten der Zusammenhänge und der Krümmungstensoren gelten.

q.e.d.

Wir werden jetzt die Integration auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten definieren.

Zunächst sei M eine Mannigfaltigkeit (ohne feste Metrik), <u>die</u> <u>einen</u> <u>abzählbaren</u> <u>Atlas</u> <u>zuläßt</u>. Die letzte Voraussetzung ist durch alle interessante Mannigfaltigkeiten erfüllt (bei kompakten Mannigfaltigkeiten gibt es sogar einen <u>endlichen</u> Atlas, sonst ist diese Bedingung mit der Parakompaktheit, also mit der Existenz einer Riemannschen Metrik auf M, gleichbedeutend, was wir jedoch nicht brauchen werden). Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt

(i) <u>meßbar</u>, wenn für jedes Koordinatensystem $(\mathcal{U}, x)$, die Menge $x(\mathcal{U} \cap A) \subset x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$, $n = \dim M$, Lebesgue-meßbar ist.

(ii) eine <u>Nullmenge</u> (Menge vom Maß Null), wenn für jedes Koordinatensystem $(\mathcal{U}, x)$, die Menge $x(\mathcal{U} \cap A) \subset x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ das Lebesgue-Maß Null hat.

Die Begriffe der meßbaren Menge und der Nullmenge sind <u>geometrisch</u>: Sei A eine Menge, die eine der obigen Definitionsbedingungen für alle Koordinatensysteme (U,x) <u>eines</u> festen Atlasses erfüllt, und sei $(\underset{0}{U},\underset{0}{x})$ ein beliebiges Koordinatensystem. Dann ist $(\underset{0}{U},\underset{0}{x})$ durch abzählbar viele Koordinatensysteme $(\underset{i}{U},\underset{i}{x})$ unseres Atlasses überdeckt*, so daß $\underset{0}{U}\cap A = \bigcup_i(\underset{i}{U}\cap A)$, $\underset{0}{x}(\underset{0}{U}\cap A)=\bigcup_i(\underset{0}{x}\circ\underset{i}{x}^{-1})(\underset{i}{x}(\underset{i}{U}\cap A))$. Da die Klassen der meßbaren Mengen und der Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ unter Diffeomorphismen, sowie unter abzählbaren Vereinigungen erhalten bleiben, folgt daraus, das A der Bedingung (i) (bzw. (ii)) bezüglich $(\underset{0}{U},\underset{0}{x})$ genügt. Um zu prüfen, das eine Menge A meßbar (bzw., eine Nullmenge ist), genügt also, nach diesem Argument, zu zeigen, daß (i) (bzw. (ii)) für <u>eine</u> Menge von Koordinatensystemen gilt, die A überdecken. Die Klasse der meßbaren Teilmengen von M,

---
* Aufgabe $\underline{\text{IV}}$. 1

sowie die der Nullmengen, bildet einen σ-Ring (d.h. sie ist nichtleer und unter abzählbaren Vereinigungen, sowie unter der Mengentheoretischen Differenzoperation abgeschlossen). Außerdem bilden die meßbaren Mengen eine σ-Algebra (d.h. die ganze Mannigfaltigkeit M ist meßbar). Alle offenen sowie abgeschlossenen Teilmengen von M sind meßbar.

Eine Funktion $f: M\to\mathbb{R}$ heißt <u>meßbar</u>, wenn für jede meßbare Teilmenge B von $\mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(B)$ in M meßbar ist (d.h. genau dann, wenn für jedes Koordinatensystem (U,x), $f\circ x^{-1}: x(U)\to\mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar ist). Alle stetigen Funktionen sind meßbar.

Ein Koordinatensystem (U,x) in M heißt <u>relativ kompakt</u>, wenn die Abschließung $\overline{U}$ kompakt ist und es ein Koordinatensystem $(\underset{1}{U},\underset{1}{x})$ gibt mit $\overline{U}\subset\underset{1}{U}$ und $\underset{1}{x}=x$ auf U.

Sei nun $V\subset\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $\Phi: V\to\Phi(V)\subset\mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, wobei $\Phi(V)$ offen ist, $\bar{V}$ kompakt und es einen Diffeomorphismus $\underset{1}{\Phi} : \underset{1}{V} \to \underset{1}{\Phi}(\underset{1}{V})$ zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\bar{V} \subset \underset{1}{V}$ und $\underset{1}{\Phi} = \Phi$ auf V. Für jede meßbare Menge $B \subset V$ und jede Lebesgue-integrierbare (bzw., Lebesgue-meßbare und nichtnegative) Funktion $F : \Phi(B) \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $F \circ \Phi : B \to \mathbb{R}$ wieder Lebesgue-integrierbar (bzw. meßbar und nichtnegativ) und

$$\int_{\Phi(B)} F = \int_B (F \circ \Phi) \cdot \left| \det \left[\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right] \right|$$

wobei die beiden Integrale Lebesgue-Integrale sind, die auch den Wert $+\infty$ annehmen können (falls $F \geqslant 0$, F nicht integrierbar).

Betrachten wir jetzt eine Mannigfaltigkeit M, ein relativ kompaktes Koordinatensystem $(\mathcal{U}, x)$ in M, eine meßbare Menge $A \subset \mathcal{U}$ und eine meßbare Funktion $\psi : A \to \mathbb{R}$ (d. h. die Ein-

schränkung auf A von einer meßbaren Funktion auf M, die man außerhalb von A auch gleich Null setzen kann). Das Integral

$$\int_A \psi \, dx^1 \ldots dx^n = \int_{x(A)} (\psi \circ x^{-1})$$

hat Sinn wenn das Lebesgue-Integral auf der rechten Seite existiert, also z. B. wenn $\psi \circ x^{-1}$ Lebesgue-integrierbar oder $\psi \geqslant 0$ ist (im letzten Fall kann das Integral unendlich sein). Unter jeder dieser Voraussetzungen, gilt die entsprechende Voraussetzung auch für jedes andere relativ kompakte Koordinatensystem $(\mathcal{U}', x')$ mit $A \subset \mathcal{U}'$ und

$$\int_A \psi \, dx^{1'} \ldots dx^{n'} =$$

$$= \int_A \psi \cdot \left| \det [A^{i'}_i] \right| dx^1 \ldots dx^n$$

(man nehme die Formel von S. 93 mit $B = x(A)$, $\Phi = x' \circ x^{-1}$, $F = \psi \circ (x')^{-1}$).

Sei nun M mit einer Riemannschen

Metrik g versehen. Da $g_{ij} = A_i^{i'} A_j^{j'} g_{i'j'}$, gilt $\sqrt{\det[g_{ij}]} = |\det[A_i^{i'}]| \sqrt{\det[g_{i'j'}]}$. Für eine meßbare Menge A die in einem relativ kompakten Koordinatensystem (U, x) enthalten ist und für eine meßbare Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ sagt man, daß f <u>integrierbar</u> ist, wenn $f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist; diese Eigenschaft hängt von (U, x) nicht ab. Ist f integrierbar oder $f \geq 0$, so setzt man

$$\int_A f \cdot V_g = \int_A f \cdot \sqrt{\det[g_{ij}]}\, dx^1 \dots dx^n.$$

Dieser Wert (der auch $+\infty$ sein kann) ist offenbar vom Koordinatensystem (U, x) unabhängig. Das Symbol V_g steht hier für das "Riemannsche Maß" von (M, g); wenn wir nur <u>eine</u> Metrik betrachten, werden wir meist $\int_A f$ statt $\int_A f \cdot V_g$ schreiben.

Wir können schon also, in jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), meßbare Funktionen $f \geq 0$ über "kleine" meßbare Mengen A (d.h. solche, die in einem relativ kompakten Koordinatensystem liegen) integrieren. Dieses Integral $\int_A f \in [0, \infty]$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\int_A (f_1 + f_2) = \int_A f_1 + \int_A f_2$

falls f_1, f_2 meßbar und nicht-negativ sind

(ii) $\int_A (af) = a \int_A f$ für $a \in [0, \infty)$ *

(iii) $\int_A f = 0$ nur wenn $f = 0$ fast überall (d.h. außerhalb einer in A enthaltenen Nullmenge)

(iv) $\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$,

falls A eine abzählbare <u>disjunkte</u> Vereinigung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ von meßbaren Mengen A_i ist.

---

* wobei $0 \cdot \infty = 0$

Es sei nun $f \geq 0$ eine meßbare Funktion auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wir müssen jetzt das Integral $\int_A f \in [0, \infty]$ für <u>beliebige</u> meßbare Mengen A definieren. Zunächst bemerken wir, daß, weil M einen abzählbaren Atlas hat, gibt es auch einen abzählbaren Atlas von relativ kompakten Koordinatensystemen (da, für jedes Koordinatensystem $(\mathcal{U}, x)$ unseres Atlasses, $x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ durch in $x(\mathcal{U})$ enthaltene abgeschlossene Bälle überdeckt ist, deren Radien rational sind und deren Mittelpunkte rationale Koordinaten haben). Für einen solchen Atlas $\{(\mathcal{U}_i, x_i)\}_{i=1}^{\infty}$, bilden die Mengen $A_i = (A \cap \mathcal{U}_i) \setminus \bigcup_{j<i} (A \cap \mathcal{U}_j)$ eine abzählbare Zerlegung von A in disjunkte, "kleine", meßbare Mengen. Man setze

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f .$$

Diese Definition ist von der Zerlegung $\{A_i\}$ unabhängig: Ist $A = \bigcup_i A_i'$ mit A_i' meßbar, "klein", paarweise disjunkt, so ist $A_i = \bigcup_j A_i \cap A_j'$ eine disjunkte Zerlegung, ebenso wie $A_j' = \bigcup_i A_j' \cap A_i$. Nach (iv), Seite 96, gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_i \cap A_j'} f \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_j' \cap A_i} f \Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j'} f .$$

In dieser Weise haben wir $\int_A f$ für nicht-negative meßbare Funktionen f und für beliebige meßbare Mengen A definiert, und <u>die</u> <u>Eigenschaften</u> (i) – (iv) von Seite 96 <u>gelten</u> <u>auch</u> <u>in</u> <u>diesem</u> <u>Fall</u>.

Insbesondere kann man jeder meßbaren Menge $A \subset M$ das <u>Maß</u> (Inhalt, Volumen)

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A 1 \in [0, \infty]$$

zuordnen. Die Zuordnung $A \to Vol(A)$ ist ein Maß im gewöhnlichen Sinne (σ-Additivität). Offenbar ist $Vol(A)=0$ genau dann, wenn A eine Nullmenge ist. Außerdem gilt $Vol(A)>0$ falls A offen und nichtleer ist und $Vol(A)<0$ falls A kompakt (da, in diesem Fall, A durch endlich viele relativ kompakte Koordinatensysteme überdeckt werden kann).

Sei nun (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f: M \to \mathbb{R}$ eine beliebige meßbare Funktion. Die Funktionen $f_+ = \max(f,0)$ und $f_- = \max(-f,0)$ sind meßbar, nicht-negativ und $f = f_+ - f_-$. Wir sagen, daß f <u>integrierbar</u> ist, wenn $\int_M f_+ < \infty$ und $\int_M f_- < \infty$, und, in diesem Fall, setzen wir

$$\int_M f = \int_M f_+ - \int_M f_- .$$

Dieses Integral hat die folgenden Eigenschaften:

(i) f ist integrierbar genau dann, wenn $\int_M |f| < \infty$; dann ist $\left|\int_M f\right| \leq \int_M |f|$ (weil $|f| = f_+ + f_-$).

(ii) Integrierbare Funktionen bilden einen Vektorraum, den man mit $L^1(M,g)$ bezeichnet. Die Zuordnung $f \to \int_M f$ ist auf $L^1(M,g)$ linear. Alle stetige Funktionen mit kompaktem Träger (d. h., die außerhalb einer kompakten Menge identisch verschwinden) sind integrierbar.

(iii) Sind f_1, f_2 integrierbar, $f_1 \leq f_2$, so ist $\int_M f_1 \leq \int_M f_2$; sind die Integrale gleich, so ist $f_1 = f_2$ fast überall.

(iv) Ist $f \in L^1(M,g)$, $A \subset M$ meßbar und $\chi_A : M \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von A ($\chi_A = 1$ auf A, $\chi_A = 0$ außerhalb A) so ist $f\chi_A \in L^1(M,g)$; man schreibt dann

$$\int_A f = \int_M f\chi_A .$$

Falls $f \geq 0$, stimmt diese Definition von $\int_A f$ mit jener auf Seite 97. Ist A "klein", so stimmt sie auch mit der Definition auf Seite 95 überein (wobei f nicht unbedingt nicht-negativ ist).

(v) Die Eigenschaft (iv), Seite 96, gilt für beliebige integrierbare Funktionen.

(vi) Ist $\Phi: M \to N$ ein Diffeomorphismus, g eine Riemannsche Metrik auf N, $f \in L^1(N,g)$, so ist auch $f \circ \Phi \in L^1(M, \Phi^* g)$ und

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} (f \circ \Phi) \cdot V_{\Phi^* g} = \int_A f \cdot V_g$$

für jede meßbare Menge $A \subset N$ (dies gilt sofort für "kleine" Mengen A, wenn man Φ-verknüpfte Koordinaten in M und N betrachtet, vgl. den Beweis von Lemma 3).

7.11.1983

Sei nun X ein C^∞-Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit M. Für jeden Punkt $y \in M$ gibt es die Integralkurve $\gamma_y: (-\varepsilon_y, \varepsilon_y) \to M$ von X durch den Punkt y mit $\gamma(0) = y$ und $\dot\gamma_y(t) = X(\gamma(t))$ (da, in lokalen Koordinaten, $\dot\gamma_y^i(t) = X^i(\gamma(t))$, folgt dies aus der Existenz von Lösungen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen). Die Zahl $\varepsilon_y > 0$ hängt von y ab, es gilt aber $\varepsilon_z \geq \varepsilon_0 > 0$ für alle z die dicht bei y liegen. Hat X kompakten Träger, so kann man ein gemeinsames $\varepsilon_0 = \varepsilon_y$ für alle $y \in M$ finden. Der (lokale) Fluß Φ von X ist die C^∞-Abbildung $(t,y) \mapsto \Phi(t,y) = \Phi_t(y) = \gamma_y(t)$; Φ bildet also eine Umgebung von $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ in die Mannigfaltigkeit M ab. Bekanntlich ist $\Phi_0(y) = y$ und $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$ in allen Punkten, wo dies Sinn hat. Jedes Φ_t (t dicht bei 0) ist ein Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge von M auf eine offene Teilmenge. Ist nun g eine Riemannsche Metrik auf M, so ist im allgemeinen $\Phi_t^* g$ nicht überall auf M definiert. Für jeden Punkt $y \in M$

gibt es aber eine Umgebung U von y und $\varepsilon > 0$, so daß für $|t| < \varepsilon$, Φ_t und somit $\Phi_t^* g$ auf ganz U definiert ist. In jedem Punkt $y \in M$ hat man also die Kurve $(\Phi_t^* g)(y)$ von $(0,2)$-Tensoren in y, und man kann die Ableitung $\frac{d}{dt}(\Phi_t^* g)(y)\big|_{t=0}$ betrachten, die wieder ein $(0,2)$-Tensor in y ist.

In einem "kleinen" Koordinatensystem $(U, (x^i))$ hat die Abbildung $(t,y) \to \Phi(t,y)$ die Komponenten $\Phi^i = x^i(\Phi(t,y))$ mit

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial t}(t,y) = X^i(\Phi(t,y)), \quad \text{und}$$

$$\Phi^i(0,y) = x^i(y), \text{ also } \partial_j \Phi^i(0,y) = \delta^i_j.$$

Da $\partial_i(y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} x^{-1}(x^1(y), \dots, x^i(y)+s, \dots, x^n(y))$, gilt $\left[(d\Phi_t)_y(\partial_i(y))\right]^j = \partial_i \Phi^j(t,y)$. Also

$$(\Phi_t^* g)_{ij}(y) = (\Phi_t^* g)(\partial_i(y), \partial_j(y)) =$$

$$= g(\Phi(t,y))\left((d\Phi_t)_y(\partial_i(y)), (d\Phi_t)_y(\partial_j(y))\right) =$$

$$= g_{kl}(\Phi(t,y))\, \partial_i \Phi^k(t,y) \cdot \partial_j \Phi^l(t,y).$$

Deshalb

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* g)_{ij}(y)\Big|_{t=0} =$$

$$= \partial_s g_{kl}(y) \cdot X^s(y) \cdot \delta_i^k \delta_j^l +$$

$$+ g_{kl}(y)\, \partial_i X^k(y)\, \delta_j^l + g_{kl}(y)\, \delta_i^k\, \partial_j X^l(y).$$

Wir haben also, in jedem y,

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* g)_{ij}\Big|_{t=0} = X^s \partial_s g_{ij} + g_{kj}\, \partial_i X^k +$$

$$+ g_{il}\, \partial_j X^l = g_{kj} X^k_{\ ,i} + g_{il} X^l_{\ ,j} =$$

$$= X_{i,j} + X_{j,i}, \text{ weil } \partial_s g_{ij} =$$

$$= \Gamma^l_{si} g_{lj} + \Gamma^l_{sj} g_{il}.$$

Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* g)_{ij}\Big|_{t=0} = X_{i,j} + X_{j,i}$$

hat die folgende Konsequenz:

SATZ 4. Ein C^∞-Vektorfeld X auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist ein <u>Killing-Feld</u> (d. h. $X_{i,j} + X_{j,i} = 0$) genau dann, wenn der lokale Fluß Φ_t von X aus g-Isometrien besteht ($\Phi_t^* g = g$).

<u>Beweis</u>. Ist $\Phi_t^* g = g$, so $X_{i;j} + X_{j;i} = 0$ nach der obigen Formel. Ist umgekehrt X ein Killing-Feld und somit $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^* g = 0$, so hat man $\Phi_{t_0+s}^* g = \Phi_{t_0}^*(\Phi_s^* g)$ (vgl. Aufgabe IV.2), und somit

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \Phi_t^* g = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi_{t_0+s}^* g = \Phi_{t_0}^* \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi_s^* g = 0.$$

Also, $\Phi_t^* g$ ist von t unabhängig, d.h. $\Phi_t^* g = \Phi_0^* g = g$. q.e.d.

LEMMA 4. Für ein C^∞-Vektorfeld X mit lokalem Fluß Φ_t auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gilt, in beliebigen lokalen Koordinaten (x^i),

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{\det[(\Phi_t^* g)_{ij}]} = X^k{}_{,k} \cdot \sqrt{\det[g_{ij}]}.$$

<u>Beweis</u>. Für jede C^1-Kurve $t \to g(t)$ von positiv definiten symmetrischen (0,2)-Tensoren im Punkt y gilt

$$g^{ij}(t) \frac{d}{dt} g_{ij}(t) = \frac{d}{dt}\left(\log \det[g_{ij}(t)]\right).$$

Betrachtet man nämlich $\det[g_{ij}]$ als eine Funktion der Komponenten $(g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{nn})$, so ist

$$\frac{\partial \det[g_{ij}]}{\partial g_{ij}} = G^{ij}$$

wobei $G^{ij} = (-1)^{i+j} \det_{\substack{k\neq i\\ l\neq j}} [g_{kl}]$. Wir wissen aber, daß $g^{ij} = \frac{1}{\det[g_{kl}]} G^{ij}$.

Deshalb $\frac{d}{dt}(\log \det[g_{ij}]) = \frac{1}{\det[g_{kl}]} \frac{d}{dt} \det[g_{ij}] =$

$$= \frac{1}{\det[g_{ij}]} \sum_{k,l} \frac{\partial \det[g_{ij}]}{\partial g_{kl}} \cdot \frac{d}{dt} g_{kl} = g^{kl} \frac{d}{dt} g_{kl}.$$

Für die Kurve $g_{ij}(t) = (\Phi_t^* g)_{ij}$ haben wir bekanntlich

$$\frac{d}{dt} g_{ij}\Big|_{t=0} = X_{i;j} + X_{j;i} ,$$

also

$$2X^k_{;k} = g^{ij} \frac{d}{dt} g_{ij}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \log \det [g_{ij}(t)] = \frac{2}{\sqrt{\det[g_{ij}]}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{\det[g_{ij}(t)]} ,$$

woher unsere Behauptung.

q.e.d.

SATZ 5 (Die Greensche Formel).
Für jedes C^∞-Vektorfeld X mit kompaktem Träger auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gilt

$$\int_M \delta X = 0 ,$$

wobei $\delta X = -X^i_{;i}$. Die Funktion δX nennt man die <u>Divergenz</u> von X.

<u>Beweis</u>*. Der Träger von X ist in einer offenen zusammenhängenden Menge $\mathcal{U} \subset M$ enthalten, deren Abschließung $\overline{\mathcal{U}}$ kompakt ist (weil man ihn durch endlich viele kompakte "Bälle" überdecken kann, die man notfalls untereinander durch Kurven verbindet, um den Zusammenhang zu erreichen). Was wir beweisen müssen, ist $\int_{\mathcal{U}} \delta X = 0$. Der Fluß Φ_t von X ist, für kleine Werte von $|t|$, auf ganz $\mathcal{U}$ definiert und man hat, wegen (vi) auf Seite 101 (mit $A = \mathcal{U}$, $f = 1$)

$$\int_{\mathcal{U}} 1 \cdot V_{\Phi_t^* g} = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot V_g .$$

Andrerseits, da $\overline{\mathcal{U}}$ kompakt ist, kann man $\mathcal{U}$ in endlich viele, disjunkte, "kleine" meßbare Mengen $A_1, \ldots, A_m$ zerlegen, wobei jedes A_s im relativ kompakten Koordinatensystem $(\mathcal{U}_s, x^i_s)$ enthalten ist. Nun hat man

---

*Für einen einfacheren Beweis, siehe Aufgabe $\underline{VI}$.3

$$\int_U 1\cdot V_{\Phi_t^* g} = \sum_{s=1}^{m} \int_{A_s} \sqrt{\det[(\Phi_t^* g)_{i_s j_s}]}\, dx^{1_s} \dots dx^{n_s}$$

woher, da die zu integrierenden Funktionen auf der rechten Seite beschränkte t-Ableitungen haben, vgl. Lemma 4,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_U 1\cdot V_{\Phi_t^* g} = -\sum_{s=1}^{m} \int_{A_s} \delta X \cdot \sqrt{\det[g_{i_s j_s}]}\, dx^{1_s} \dots$$

$$\dots dx^{n_s} = -\sum_{s=1}^{m} \int_{A_s} \delta X = -\int_U \delta X .$$

Da aber $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_U 1\cdot V_{\Phi_t^* g} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int 1\cdot V_g =$ $= 0$, folgt unsere Behauptung. q. e. d.

Die Greensche Formel erlaubt es, auf Riemannschen Mannigfaltigkeit <u>partielle Integration</u> durchzuführen. Sind z. B. H, G C^∞-Tensorfelder auf (M,g), deren

eines kompakten Träger hat und deren Typen $(3,0)$ und $(0,2)$ sind, so

$$\int_M G^{ijk} H_{ij,k} = \int_M (G^{ijk} H_{ij})_{,k} -$$

$$-\int_M G^{ijk}{}_{,k} H_{ij} = -\int_M G^{ijk}{}_{,k} H_{ij} .$$

<u>Weitere Beispiele</u>.

a) Der Laplace-Operator Δ ordnet jeder C^∞-Funktion f auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit die Funktion $\Delta f =$ $= -f_{,i}{}^{i} = -g^{ij} f_{,ij} = \delta(\nabla f)$ zu. Hat f kompakten Träger (ist z. B. die Mannigfaltigkeit M kompakt), so gilt

$$\int_M \Delta f = 0$$

Man hat auch

$$\int_M f \Delta f = -\int_M f f_{,i}{}^{i} = \int_M f_{,}{}^{i} f_{i} \geq 0$$

mit Gleichung nur wenn f konstant ist.

Also:

i) Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit (M,g) ist jede <u>harmonische</u> <u>Funktion</u> f $(\Delta f = 0)$ konstant.

ii) Ist (M,g) kompakt und $\Delta f \geq 0$ (bzw. $\Delta f \leq 0$), so ist f konstant (weil $\int_M \Delta f = 0$ schließen läßt, das $\Delta f = 0$). Dies ist das sogenannte Bochnersche Lemma.

b) Die Ricci-Identität

$$X^k{}_{,ji} - X^k{}_{,ij} = -R_{ijs}{}^k X^s$$

für C^∞-Vektorfelder X gibt, durch Kontraktion mit δ^k_j,

$$r_{is} X^s = X^s{}_{,is} - X^s{}_{,si}.$$

Deshalb gilt, für C^∞-Vektorfelder X, Y mit kompakten Trägern,

$$\int_M r(X,Y) = \int_M \delta X \cdot \delta Y - \int_M X_{i,j} Y^{j,i}$$

SATZ 6. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Ist der Ricci-Tensor in jedem Punkt negativ-definit, so ist $X = 0$ das einzige Killing-Feld auf (M,g).

(ii) Ist der Ricci-Tensor in jedem Punkt negativ-semidefinit, so ist jedes Killing-Feld auf (M,g) parallel.

<u>Beweis.</u> Für ein Killing-Feld X gibt die obige Formel mit $Y = X$

$$\int_M r(X,X) = \int_M X_{i,j} X^{i,j}$$

(da $\delta X = 0$ und $X^{j,i} = -X^{i,j}$), woher unsere Behauptung.

Beispiele von Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

(i) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen flachen Metrik g, deren Komponenten bezüglich des Koordinatensystems $(\mathbb{R}^n, Id)$ $g_{ij} = \delta_{ij}$ sind. Also, $\Gamma_{ij}^k = 0$ und $R = 0$, $r = 0$, $u = 0$. Deshalb ist $(\mathbb{R}^n, g)$ ein Raum konstanter Krümmung 0. Da $\det[g_{ij}] = 1$ (in diesen Koordinaten), stimmt das Maß und das Integral in $(\mathbb{R}^n, g)$ mit dem Lebesgueschen Maß und Integral überein. Die Greensche Formel bedeutet, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i X^i = 0$ für beliebige C^∞-Funktionen $X^1, \ldots, X^n$ mit kompakten Trägern, was offenbar damit gleichbedeutend ist, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i f = 0$ für jedes i und jede C^∞-Funktion f mit kompaktem Träger; die letzte Bedingung folgt auch direkt aus dem Satz von Fubini, da $\int_{\mathbb{R}} \partial_i f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i = 0$ (hier soll über i <u>nicht</u> summiert werden!).

(ii) Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mit den induzierten Metriken. Insbesondere die Sphären $S^{n-1}(c)$ um den Nullpunkt mit beliebigem Radius $c > 0$.

(iii) Riemannsche Produkte $(M \times N, g \times h)$ von beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g), (N, h). Für $(y, z) \in M \times N$ ist $T_{(y,z)}(M \times N)$ kanonisch mit $T_y M \oplus T_z N$ isomorph. Bei dieser Identifizierung entspricht $(g \times h)(y, z)$ der direkten Summe von $g(y)$ und $h(z)$. Beliebige Koordinatensysteme $(U, (x^i))$ in M und $(V, (x^\alpha))$ in N bilden das sog. Produkt-Koordinatensystem $(U \times V, (x^i, x^\alpha))$ in $M \times N$. In den Produkt-Koordinaten ist $(g \times h)_{ij} = g_{ij}$, $(g \times h)_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ und $(g \times h)_{i\alpha} = 0$. Ebenso verschwinden die <u>gemischten</u> Komponenten (d.h. die, die i- und α-Indizes enthalten) der inversen Metrik, des Riemannschen Zusammenhanges, des Krümmungstensors, des Ricci-Tensors, sowie der kovarianten Ableitungen der letzten Tensoren, und die Komponenten von diesen Größen, die nur eine Art von Indizes enthalten, stimmen mit denen für g, bzw. h, überein. Das Riemannsche Produkt zweier flachen Mannigfaltigkeiten (mit $R=0$) ist also flach. Haben (M,g), (N,h) jedoch konstante Schnittkrümmungen, die nicht beide verschwinden, so ist ihr Produkt nicht mehr ein Raum konstanter Krümmung, weil $(g\times h)_{ij}(g\times h)_{\alpha\beta} = g_{ij}h_{\alpha\beta} \neq 0$ für gewisse i,j,α,β, obwohl die gemischten Krümmungskomponenten verschwinden.

(iv) Seien $S^1(c_1),\dots,S^1(c_n)$ Kreise mit beliebigen Radien $c_1,\dots,c_n>0$, mit den aus $\mathbb{R}^2$ induzierten Metriken. Da eindimensionale Mannigfaltigkeiten flach sind (weil R in den ersten Indices schief-symmetrisch ist), muß das Produkt $S^1(c_1)\times\dots\times S^1(c_n)$ mit der entsprechenden "n-fachen" Produktmetrik $R=0$ haben. Das ist ein sog. n-dimensionaler flacher Riemannscher Torus.

Sei $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, daß mit dem Inneren seiner Abschließung übereinstimmt. Betrachtet man $\overline{\mathcal{U}}$ als eine Membrane und fragt nach deren möglichen Schwingungen mit festem Rand, so folgt, aus physikalischen Überlegungen, daß diese Schwingungen den Funktionen $f:\overline{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ entsprechen die auf $\partial\mathcal{U}$ verschwinden und in $\mathcal{U}$ $\Delta f=\lambda f$ haben, wobei $\lambda\in\mathbb{R}$ und Δ der Laplace-Operator der flachen Metrik von $\mathbb{R}^2$ ist. Betrachtet ~~man~~ statt $\mathcal{U}$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^3$, so entsprechen ihre freien Schwingungen den Funktionen $f: M\to\mathbb{R}$ mit $\Delta f=\lambda f$, wobei $\lambda\in\mathbb{R}$* und Δ der Laplace-Operator der induzierten Metrik auf M ist. Deshalb ist es sinnvoll (und interessant) die folgenden Begriffe einzuführen und zu untersuchen.

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$ heißt ein <u>Eigenwert</u> des Laplace-Operators Δ von (M,g),

---

* die Werte von λ, die vorkommen, hängen mit den Frequenzen der möglichen Schwingungen zusammen.

wenn es eine C^∞-Funktion f auf M gibt, die nicht überall verschwindet und $\Delta f = \lambda f$ hat. Die C^∞-Funktionen f mit $\Delta f = \lambda f$ bilden dann einen Vektorraum, den man den λ-Eigenraum von Δ nennt; solche f heißen Eigenfunktionen.

Was man in diesem Zusammenhang untersucht, ist die Existenz der Eigenwerte von Δ, die Struktur des Spektrums (d.h. der Menge aller Eigenwerte), sowie die Struktur der Eigenfunktionen und Eigenräume, für beliebige kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M,g).

Unter der Ricci-Krümmung der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) versteht man die Funktion, die jedem Tangentialvektor X der Länge 1 ($|X|=1$) in irgendeinem Punkt von M die Zahl $r(X,X)$ zuordnet. Diese Funktion bestimmt den Ricci-Tensor r eindeutig; sie ist positiv (bzw. negativ) genau dann, wenn r in jedem Punkt positiv (bzw. negativ) definit ist. Ist M kompakt, so muß die Ricci-Krümmung

ihr Minimum annehmen (insbesondere, ist sie von unten beschränkt). Dieses Minimum ρ_0 ist die größte Zahl mit

$$\rho_0 |X|^2 \leq r(X,X)$$

für alle Tangentialvektoren X. Die Existenz von ρ_0 folgt daraus, daß die Einheitstangentialvektoren einen kompakten (falls M kompakt) topologischen Raum bilden, auf dem die Ricci-Krümmung eine stetige Funktion ist. Ein einfacher direkter Beweis ist auch möglich.

Bemerken wir noch, daß für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g), $\lambda = 0$ ein Eigenwert von Δ ist, dem z.B. die Konstanten als Eigenfunktionen entsprechen. Ist M kompakt, so sind auch die Konstanten die einzigen 0-Eigenfunktionen (i), Seite 111), so daß der entsprechende Eigenraum eindimensional ist. Ist (M,g) weiter kompakt, so sind alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von Δ positiv, weil, für f mit $\Delta f = \lambda f$,

$$\lambda \int_M f^2 = \int_M f \Delta f = -\int_M f f_{,i}{}^{i} = \int_M f_{,}{}^{i} f_{,i} \geq 0.$$

SATZ 7 (A. Lichnerowicz, 1958). Sei (M,g) eine kompakte n-dimensionale $(n \geqslant 2)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Ricci-Krümmung. Dann gilt, für jeden Eigenwert $\lambda \neq 0$ von Δ,

$$\lambda \geqslant \frac{n}{n-1}\rho_0,$$

wobei $\rho_0 > 0$ das Minimum der Ricci-Krümmung von (M,g) ist.

SATZ **8**. Sei $S^n(c)$, $n \geqslant 2$, die Sphäre vom Radius $c>0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Metrik g. Dann ist $(S^n(c),g)$ ein Raum konstanter Krümmung $K = \frac{1}{c^2} > 0$, und hat konstante positive Ricci-Krümmung $\rho_0 = (n-1)K$. Die Zahl $\lambda_1 = nK = \frac{n}{n-1}\rho_0$ ist der kleinste positive Eigenwert des entsprechenden Laplace-Operators Δ.

Die λ_1-Eigenfunktionen von Δ sind

genau die Einschränkungen auf $S^n(c)$ von allen (homogenen) linearen Funktionen auf $\mathbb{R}^{n+1}$; der λ_1-Eigenraum von Δ ist also $(n+1)$-dimensional.

<u>Beweis</u> von beiden Sätzen. Ist $\rho_0 > 0$ das Minimum der Ricci-Krümmung von (M,g), $\lambda > 0$ ein Eigenwert und f eine nicht-triviale λ-Eigenfunktion von Δ, so gilt, wegen der Formel auf Seite 112 mit $X = Y = \nabla f$, $\delta X = \Delta f$, $f_{,ij} = f_{,ji}$,

$$\rho_0 \lambda \int_M f^2 = \rho_0 \int_M f \Delta f = \rho_0 \int_M |\nabla f|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_M r(\nabla f, \nabla f) = \int_M (\Delta f)^2 - \int_M f_{,ij} f^{,ij},$$

was, mit der Schwarzschen Ungleichung

$$(\Delta f)^2 = (g^{ij} f_{,ij})^2 \leqslant n\, f_{,ij} f^{,ij},$$

d. h., $-f_{,ij} f^{,ij} \leqslant -\frac{1}{n}(\Delta f)^2$,

gibt

$$\rho_0 \lambda \int_M f^2 \leq \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta f)^2 = \frac{n-1}{n} \lambda^2 \int_M f^2 .$$

Da $\lambda \int f^2 > 0$, folgt daraus die Behauptung von Satz 7.

Sei nun $F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine homogene lineare Funktion, d.h. $F(X) = A_i X^i$ für $X \in \mathbb{R}^{n+1}$, wobei die A_i konstant sind. Für beliebige $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|X_0| = |Y_0| = 1$, $X_0 \perp Y_0$, betrachten wir die Kurve $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\gamma(t) = c(\cos t \cdot X_0 + \sin t \cdot Y_0)$$

deren Bild in $S^n(c)$ liegt. Als eine Kurve in $S^n(c)$ betrachtet, ist γ eine Geodätische von $(S^n(c), g)$, weil sie $|\dot\gamma| = c$ hat und ihr Bild genau die Fixpunktmenge einer Isometrie von $(S^n(c), g)$ ist. Diese Isometrie entsteht, indem man auf $S^n(c)$ die Spiegelung von $\mathbb{R}^{n+1}$ um die durch X_0, Y_0 aufgespannte Ebene einschränkt. Die Geodätische $\tilde\gamma$ mit Anfangsbedingungen $\gamma(0), \dot\gamma(0)$ muß mit γ übereinstimmen, weil ihr Bild unter unseren Isometrie

dieselben Anfangsbedingungen hat und somit $\tilde\gamma$ selbst ist; d.h. $\tilde\gamma$ besteht aus Fixpunkten, liegt also auf γ. Jede Geodätische $\tilde\gamma$ von $(S^n(c), g)$ mit $|\dot{\tilde\gamma}| = c$ entsteht in dieser Weise, mit geeigneten X_0, Y_0, weil dadurch alle Anfangsbedingungen realisierbar sind.

In $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet, erfüllen F und γ die Bedingungen

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \partial_i F(\gamma(t)) \dot\gamma^i(t) = A_i \dot\gamma^i(t),$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F(\gamma(t)) = A_i \ddot\gamma^i(t) = -A_i \gamma^i(t) = = -F(\gamma(t))$$

weil, offenbar, $\ddot\gamma = -\gamma$.

Sei nun f die Einschränkung von F auf $S^n(c)$. Da γ eine Geodätische ist, haben wir (vgl. Aufgabe IV. 5. iv)), in $(S^n(c), g)$,

$$f_{,ij}(\gamma(t)) \dot\gamma^i(t) \dot\gamma^j(t) = \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) =$$

$$= -f(\gamma(t)) = -\frac{1}{c^2} f(\gamma(t)) g_{ij} \dot\gamma^i(t) \dot\gamma^j(t).$$

Da $f_{,ij}$ und g_{ij} symmetrisch ist und jeder Tangentialvektor der Länge c in $(S^n(c), g)$ als $\dot{\gamma}(t)$ darstellbar ist (bei geeigneten X_0, Y_0), folgt daraus, daß

$$f_{,ij} = -\frac{1}{c^2} f g_{ij}$$

überall in $(S^n(c), g)$. Durch Kontraktion erhält man

$$\Delta f = \frac{n}{c^2} f .$$

Die Zahl $\lambda_1 = n/c^2$ ist also ein positiver Eigenwert von Δ auf $(S^n(c), g)$, dessen Eigenraum alle Einschränkungen linearer Funktionen enthält, d.h. mindestens $(n+1)$-dimensional ist.

Die Gruppe der linearen Isometrien von $\mathbb{R}^{n+1}$ operiert auf $S^n(c)$ durch g-Isometrien, und dazu transitiv auf Tangentialebenen in $S^n(c)$. Da die Schnittkrümmung unter Isometrien erhalten bleibt, muß $(S^n(c), g)$ deshalb konstante Schnittkrümmung $K \in \mathbb{R}$ haben. Insbesondere ist es ein

Einstein-Raum mit $r_{ij} = (n-1) K g_{ij}$. Also, für unser f gilt (vgl. b), Seite 111), wegen $f_{,ij} = -\frac{1}{c^2} f g_{ij}$,

$$(n-1) K f_{,i} = r_{ij} f_{,}{}^{j} = f_{,}{}^{j}{}_{ij} - f_{,}{}^{j}{}_{ji} = \\ = \frac{n-1}{c^2} f_{,i} ,$$

d.h. $K = \frac{1}{c^2}$, $\Delta f = \lambda_1 f$ mit $\lambda_1 = n K$ und $(S^n(c), g)$ hat konstante Ricci-Krümmung $\rho_0 = (n-1) K$. Insbesondere, $\lambda_1 = \frac{n}{n-1} \rho_0$; nach Satz 7 ist λ_1 der kleinste positive Eigenwert von Δ.

Sei nun f eine <u>beliebige</u> λ_1-Eigenfunktion von Δ auf $(S^n(c), g)$. In der Kette der Ungleichungen die zum Beweis von Satz 7 führten hat man nun, mit $\lambda = \lambda_1$, lauter Gleichungen. Insbesondere, in der Schwarzschen Ungleichung, $(g^{ij} f_{,ij})^2 = n f_{,ij} f_{,}{}^{ij}$, woher, in jedem Punkt y, $f_{,ij} = a(y) g_{ij}$, $a(y) \in \mathbb{R}$.

Durch Kontraktion erhält man

$$a(y) = -\frac{1}{n}(\Delta f)(y) = -\frac{1}{n}\lambda_1 f(y),$$

also

$$f_{,ij} = -\frac{1}{c^2} f g_{ij}.$$

Die Lösungen f dieser Gleichung bilden einen Vektorraum E. Bei jedem festen Punkt $y \in S^n(c)$, ist so eine Lösung eindeutig durch $f(y)$ und $df(y)$ bestimmt. Man hat nämlich, längs jeder Geodätischen γ mit $\gamma(0) = y$, $|\dot\gamma| = 1$,

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) = f_{,ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = -\frac{1}{c^2} f(\gamma(t)),$$

$$f(\gamma(0)) = f(y), \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = f_{,i}(y)\dot\gamma^i(0),$$

und man kann die Eindeutigkeit der Lösungen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzen. Also ist $\dim E \leq n+1$. Da E die Einschränkungen aller linearen Funktionen enthält, kann es nichts sonst enthalten, woraus unsere Behauptung folgt.

q.e.d.

Bemerkungen.

1. Wegen Satz 8 sind die Sphären $(S^n(c), g)$ Mannigfaltigkeiten positiver Ricci-Krümmung für die die untere Schranke von Lichnerowicz (Satz 7) durch einen Eigenwert λ erreicht wird. Nach einem Satz von Obata (1962) sind es die einzigen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft (bis auf Isometrien).

2. Für den Kreis $S^1(c)$ mit der aus R^2 induzierten Metrik ist $\lambda_1 = \frac{1}{c^2}$ ebenfalls der kleinste positive Eigenwert von Δ, was man sieht, wenn man die Gleichung $\Delta f = \lambda f$ direkt (für periodische Funktionen f auf R) löst. Der 2-dimensionale λ_1-Eigenraum besteht auch hier aus Einschränkungen aller linearen Funktionen (Aufgabe).

Differentialoperatoren.

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $C^\infty(M)$ der Vektorraum aller C^∞-Funktionen auf M.

Ein (linearer) <u>Differentialoperator</u> der Ordnung k auf M ist eine lineare Abbildung $P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mit der Eigenschaft, daß in jedem Koordinatensystem $(\mathcal{U},(x^i))$ Systeme von C^∞-Funktionen $\underset{0}{\alpha}, \underset{1}{\alpha}^i, \underset{2}{\alpha}^{ij}, \dots, \underset{k}{\alpha}^{i_1\dots i_k}$ auf $\mathcal{U}$ existieren mit

$$Pf = \underset{k}{\alpha}^{i_1\dots i_k}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k}f + \\ + \underset{k-1}{\alpha}^{i_1\dots i_{k-1}}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_{k-1}}f + \dots + \underset{2}{\alpha}^{ij}\partial_i\partial_j f + \\ + \underset{1}{\alpha}^i\partial_i f + \underset{0}{\alpha} f$$

in $\mathcal{U}$, für jedes $f \in C^\infty(M)$.

Beispiele.

a) Für eine feste Funktion $\alpha \in C^\infty(M)$ ist $Pf = \alpha f$ ein Differentialgoerator der Ordnung 0.

b) Ist X ein C^∞-Vektorfeld auf M, $\alpha \in C^\infty(M)$, so ist $Pf = Xf + \alpha f$ ein Differentialoperator der Ordnung 1. In lokalen Koordinaten, $Pf = X^i\partial_i f + \alpha f$.

c) Für ein C^∞-Tensorfeld H vom Typ $(2,0)$ auf der Mannigfaltigkeit M, die mit einem Zusammenhang ∇ versehen ist, definiert die Formel $Pf = H^{ij}f_{,ij}$ einen Differentialoperator der Ordnung 2 (in lokalen Koordinaten: $Pf = H^{ij}\partial_i\partial_j f - H^{kl}\Gamma_{kl}^{\;i}\partial_i f$. Ist insbesondere ∇ der Riemannsche Zusammenhang von (M,g) und $H^{ij} = -g^{ij}$, so sehen wir, daß $P = \Delta$ ein Differentialoperator 2. Ordnung ist.

d) Allgemeiner, sei ∇ ein Zusammenhang auf M, H ein C^∞-Tensorfeld vom Typ $(k,0)$. Dann ist $Pf =$
$= H^{i_1 \dots i_k} f_{,i_1 \dots i_k}$ ein Differentialoperator k-ter Ordnung (vgl. Aufgabe II.11). Wir werden kurz $P = (H, \nabla^k)$ schreiben.

e) Die Differentialoperatoren k-ter Ordnung auf M bilden einen Vektorraum ($(P_1 + P_2)f = P_1 f + P_2 f$ usw.). Jeder Differentialoperator k-ter Ordnung ist auch ein Differentialoperator (D.O.) der Ordnung $k+1$, $k+2$, ... usw. Die D.O. aller Ordnungen bilden deshalb auch einen Vektorraum.

f) Die Komposition $P_1 \circ P_2$ zweier Differentialoperatoren der Ordnungen k_1, bzw. k_2, ist ein D.O. der Ordnung $k_1 + k_2$. Mit dieser "Multiplikation" bilden die Differentialoperatoren aller Ordnungen eine assoziative, nicht-kommutative Algebra.

Die Differentialoperatoren sind <u>lokal</u>, d.h., für jede offene Menge $U \subset M$ und jedes $f \in C^\infty(M)$ hängt die Einschränkung von Pf auf U nur von der Einschränkung von f auf U ab. Deshalb definiert jeder D.O. $P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, für jede offene Teilmenge $U \subset M$, einen Operator $P_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ im Raum aller auf U definierten C^∞-Funktionen. Für $f \in C^\infty(U)$ und $y \in U$ findet man nämlich eine Umgebung $V \subset U$ von y und $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ mit $\tilde{f} = f$ auf V. Dann ist die Einschränkung von $P\tilde{f}$ auf V von der Auswahl von $\tilde{f}$ unabhängig, man kann also $Pf = P\tilde{f}$ in V setzen, was insgesamt Pf in U definiert. Ist U zusammenhängend, so ist P_U ein D.O. auf der offenen Untermannigfaltigkeit U.

Sei $C_0^\infty(M) \subset C^\infty(M)$ der Unterraum aller C^∞-Funktionen <u>mit kompakten Trä</u>-

gern. Ein D.O. P ist eindeutig durch seine Einschränkung $P_0: C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$ bestimmt (das gleiche Argument wie oben).

Der Begriff des D.O. k-ter Ordnung ist geometrisch: Erfüllt $P: C^\infty(M) \underset{\text{linear}}{\to} C^\infty(M)$ die Definition nur bezüglich aller Koordinatensysteme eines festen Atlasses, so muß er für beliebige Koordinatensysteme es tun. Die Transformationsregeln für die "lokalen Komponenten" $\underset{k}{\alpha}^{i_1 \dots i_k}, \dots, \underset{1}{\alpha}^{i}, \underset{0}{\alpha}$ bei Koordinatenwechsel sind ziemlich kompliziert (und wir brauchen sie nicht), mit zwei Ausnahmen:

1) $\underset{0}{\alpha} \in C^\infty(M)$ ist koordinatenunabhängig (kein Wunder, weil $\underset{0}{\alpha} = P(1)$).

2) In der lokalen Koordinatendarstellung von P darf man immer voraussetzen, daß, für $s = 1, \dots, k$, $\underset{s}{\alpha}^{i_1 \dots i_s}$ bezüglich aller Indices $i_1, \dots, i_s$ symmetrisch ist (Aufgabe V.1), wonach die $\underset{s}{\alpha}^{i_1 \dots i_s}$ durch das Koordinatensystem eindeutig bestimmt

werden (weil man, für festes $y \in M$, ein festes Koordinatensystem (x^i) um y und feste Indices $i_1, \dots, i_s$ immer eine in einer Umgebung von y definierte Funktion f findet, für die $\partial_{j_1 \dots j_m} f(y) = 0$, $0 \leq m \leq k$, mit der Ausnahme für $m = s$ und $\{j_1, \dots, j_m\} = \{i_1, \dots, i_s\}$, einschließlich der Vielfachheiten, wo $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f(y) = 1$; dann $(Pf)(y) = \underset{s}{\alpha}^{i_1 \dots i_s}(y)$). Dann sieht man leicht, daß

$$\underset{k}{\alpha}^{i_1' \dots i_k'} = A^{i_1'}_{i_1} \dots A^{i_k'}_{i_k} \underset{k}{\alpha}^{i_1 \dots i_k}.$$

Anders ausgedrückt, definieren die Koeffizienten der höchsten Ordnung k in der Koordinatendarstellung von P ein total symmetrisches C^∞-Tensorfeld vom Typ $(k, 0)$ auf M. Man nennt es das Symbol (der Ordnung k) von P und bezeichnet mit $\sigma_{P,k}$. Es kann passieren, daß $\sigma_{P,k} = 0$ identisch. Dann hat P die Ordnung $k-1$, und man kann $\sigma_{P,k-1}$ bilden. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis wir $m \leq k$ finden mit $\sigma_{P,k} = \dots$ $= \sigma_{P,m+1} = 0$ überall, aber $\sigma_{P,m} \neq 0$ irgendwo (was immer möglich ist, falls $P \neq 0$). Dann nennt man m die wesentliche (minimale) Ordnung von P, und $\sigma_P = \sigma_{P,m}$ das Hauptsymbol von P. Für $P=0$ setzt man $\sigma_P = 0$ und ordnet ihm jede Ordnung zu. Die Zahl m ist die höchste von denen, für die es irgendwo in M lokale Koordinaten gibt mit $\underset{m}{\alpha}^{i_1 \dots i_m} \neq 0$ in einem Punkt, bei gewissen Indizes $i_1, \dots, i_m$.

Die Struktur des Hauptsymbols ist von grundsätzlicher Bedeutung für die Eigenschaften des Differentialoperators.

Ein Differentialoperator $P \neq 0$ auf der Mannigfaltigkeit M heißt elliptisch, wenn sein Hauptsymbol σ_P definit ist, d.h. wenn

$$\sigma_P^{i_1 \dots i_k} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \neq 0$$

für alle kovarianten Vektoren $\xi \neq 0$ in allen Punkten von M, wobei k die minimale Ordnung von P ist.

Bemerkungen.

a) Ein D.O. P der Ordnung 0 (d.h. $Pf = \alpha f$, $\alpha \in C^\infty(M)$) ist elliptisch genau dann, wenn $\alpha \neq 0$ überall.

b) Ein D.O. P der minimalen Ordnung 2 ist elliptisch genau dann, wenn sein Hauptsymbol σ_P^{ij} positiv (oder negativ) definit in allen Punkten ist. Der Laplace-Operator jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit ist elliptisch, weil $\sigma_\Delta^{ij} = -g^{ij}$.

c) Ist $\dim M \geq 2$, so ist die minimale Ordnung jedes elliptischen Operators gerade. Wäre sie nämlich ungerade, so würden wir haben

$$\sigma_P(-\xi,\dots,-\xi) = -\sigma_P(\xi,\dots,\xi).$$

Da $T_y^*M \setminus \{0\}$ zusammenhängend ist, könnten wir in jedem Punkt y ein $\xi \in T_y^*M$ finden mit $\xi \neq 0$ und

$$\sigma_P(\xi,\dots,\xi) = 0.$$

d) Der Wert von $\sigma_P(\xi,\dots,\xi)$ hängt nicht davon ab, ob σ_P bereits "symmetrisiert" worden ist. Deshalb sieht man leicht, das die Komposition zweier elliptischen Operatoren wieder elliptisch ist (lokal, sei $P_1 f = \alpha^{i_1\dots i_k}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k} f + \dots$, $P_2 f = \beta^{i_1\dots i_l}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_l} f$; dann

$$(P_1 \circ P_2) f = \alpha^{i_1\dots i_k}\beta^{j_1\dots j_l}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k}\partial_{j_1}\dots\partial_{j_l} f + \dots,$$

wobei ... immer die Terme "niedrigerer Ordnungen" bezeichnet)

Die in der Analysis häufig vorkommenden linearen Differentialgleichungen (für einzelne Funktionen) haben die Form $Pf = 0$, wobei $f \in C^\infty(M)$ und P ein D. O. auf der Mannigfaltigkeit M ist. Man interessiert sich u. a. für den Vektorraum der Lösungen f von $Pf = 0$, insbesondere für seine Dimensionalität. Verschiedene Fälle sind möglich:

a) Hat P die Ordnung 0, $Pf = \alpha f$ mit $\alpha \in C^\infty(M)$, so ist $Pf = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ im Träger von α. Enthält der Träger von α eine nichtleere offene Menge, so ist der Raum von Lösungen unendlich dimensional. Ist dagegen $\alpha \neq 0$ fast überall (z. B. $\alpha \neq 0$ überall, d. h. P ist elliptisch), so ist $f = 0$ die einzige Lösung.

b) Sei P ein D. O. der Ordnung 1 von der Form $Pf = Xf$, wobei X ein C^∞-Vektorfeld auf M ist. $Pf = 0$ genau dann, wenn f konstant längs jeden Integralkurve von X ist. Besitzt also X eine überall dichte Integralkurve (Beispiele u.a. auf dem Torus T^2), so muß jede Lösung f konstant sein. Lokal sieht es aber anders aus: in einer kleinen offenen Menge $U \subset T^2$ ist der Raum der Lösungen unendlich-dimensional. Für das Killing-Feld X auf S^2, das den Drehungen um die z-Achse entspricht, bilden auch die globalen Lösungen (auf ganz S^2) einen unendlich-dimensionalen Raum (beliebige Funktionen von der Form $F(z)$).

c) Der Laplace-Operator Δ von (M, g) ist elliptisch. Falls M kompakt ist, sind alle Lösungen von $\Delta f = 0$ konstant. Dagegen, für M nicht kompakt, ist der Raum der Lösungen oft unendlichdimensional ($M =$ das flache $\mathbb{R}^2$, f – der reelle Teil einer holomorphen Funktion, z.B. eines komplexen Polynoms).

Wir haben gesehen (Seite 129) daß, für jeden festen Zusammenhang ∇ auf M und für beliebige C^∞-Tensorfelder $\underset{0}{H}, \dots, \underset{k}{H}$ von Typen $(0,0), (1,0), \dots$, bzw. $(k,0)$, $P = (\underset{k}{H}, \nabla^k) + (\underset{k-1}{H}, \nabla^{k-1}) + \dots$ $\dots + (\underset{1}{H}, \nabla) + \underset{0}{H}$, (wobei $\underset{0}{H}(f) = \underset{0}{H} f$) ein D.O. der Ordnung k ist. Wir beweisen

jetzt, daß alle D.O. diese Form haben.

SATZ 9 (A. Lichnerowicz, 1964).

Sei ∇ ein Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M, P ein Differentialoperator der Ordnung k auf M. Dann ist

$$P = (\underset{k}{H}, \nabla^k) + (\underset{k-1}{H}, \nabla^{k-1}) + \dots$$

$$\dots + (\underset{1}{H}, \nabla) + \underset{0}{H},$$

wobei $\underset{k}{H}, \dots, \underset{0}{H}$ total-symmetrische C^∞-Tensorfelder der Typen $(k,0), \dots$, bzw. $(0,0)$ auf M sind, die P mit dieser Bedingung eindeutig bestimmt. $\underset{k}{H}$ ist das Symbol der Ordnung k von P.

Beweis. Induktion bezüglich k. Für $k = 0$ ist der Satz trivial. Setzen wir voraus, daß die Behauptung für ein festes k und beliebige P gilt. Sei nun P ein D.O. der Ordnung $k+1$, $\underset{k+1}{H}$ sein Symbol der Ordnung $k+1$. Der Operator $P - (\underset{k+1}{H}, \nabla^{k+1})$ hat Ordnung k, also, nach der induktiven Voraussetzung existiert die gesuchte Zerlegung von P.

Eindeutigkeit: Bei jeder solchen Zerlegung von P muß H_{k+1} offenbar das Symbol der Ordnung $k+1$ von P sein. Man kann also wieder die induktive Voraussetzung anwenden.

q.e.d.

Eine der wichtigen lokalen Eigenschaften von elliptischen Operatoren 2. Ordnung ist im folgenden Maximumprinzip von E. Hopf enthalten:

SATZ 10 (E. Hopf, 1927). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Für C^2-Funktionen f auf U betrachten wir den Operator

$$Pf = \alpha^{ij}\partial_i\partial_j f + \beta^i \partial_i f + \gamma f$$

wobei die Funktionen $\alpha^{ij}, \beta^i, \gamma$ die folgende Eigenschaft haben: jeder Punkt $y \in U$ hat eine Umgebung, wo

1) $\alpha^{ij}, \beta^i, \gamma$ beschränkt sind, $\alpha^{ij} = \alpha^{ji}$;

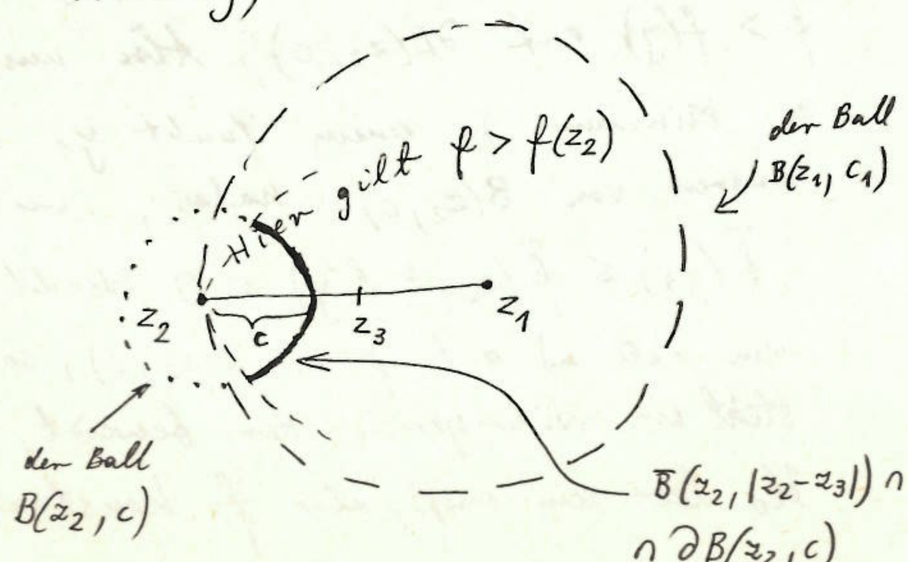
2) $\alpha^{ij}\xi_i\xi_j \geq \varepsilon |\xi|^2$ für eine Zahl $\varepsilon > 0$ und alle $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Ist $\gamma \leq 0$ und f eine C^2-Funktion auf U mit $Pf \leq 0$, die in U ein nichtpositives Minimum zuläßt, so muß f konstant sein.

Bemerkung. Wir setzen nicht mal voraus, daß die $\alpha^{ij}, \beta^i, \gamma$ meßbar sind. Ist P ein elliptischer Operator (mit C^∞-Koeffizienten), so sind 1) und 2) offenbar lokal erfüllt.

Beweis. a) Der triviale Fall: Sei zusätzlich $Pf < 0$. Nach der Behauptung des Satzes erwarten wir hier einen Widerspruch (weil $f = \text{konstant} \leq 0$ sein soll, und $\gamma \leq 0$). Im Punkt $y \in U$ wo $f(y) \leq 0$ das Minimum von f ist, gilt $\partial_i f(y) = 0$ und die Matrix $[\partial_i\partial_j f(y)]$ ist positiv semidefinit. Da $[\alpha^{ij}(y)]$ positiv definit ist, gilt $\alpha^{ij}(y)\partial_i\partial_j f(y) \geq 0$ (Aufgabe I. 16), also $0 > Pf(y) \geq \gamma(y) f(y) \geq 0$, was der erwartete Widerspruch ist.

b) Sei $Pf \le 0$ und $y \in U$ ein Punkt, wo $f(y) \le 0$ das Minimum von f ist. Nehmen wir an, daß die offene Menge $U_0 = \{z \in U : f(z) > f(y)\}$ nichtleer ist. Dann gibt es einen Ball $B(z_1, c_1) \subset \subset U_0$ mit $z_2 \in \partial B(z_1, c_1)$ und $f(z_2) = f(y)$; man kann voraussetzen, daß $|\alpha^{ij}|, |\beta^i|, |\gamma| \le A_0$ und 2) gilt in $B(z_2, c_1)$. Sei z_3 ein Punkt des Abschnitts zwischen z_1 und z_2 mit $z_1 \ne z_3 \ne z_2$, und sei $c \in (0, |z_2 - z_3|)$ fest (siehe die Abbildung)



Man definiere $\psi : \bar{B}(z_2, c) \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(z) = e^{-k|z_2 - z_3|^2} - e^{-k|z - z_3|^2}$$

($k \in \mathbb{Z}$ fest). So ist

$$\psi(z_2) = 0$$

$$\partial_i \psi(z) = 2k e^{-k|z - z_3|^2} (z^i - z_3^i)$$

$$\partial_i \partial_j \psi(z) = -4k^2 e^{-k|z - z_3|^2} (z^i - z_3^i)(z^j - z_3^j) + 2k e^{-k|z - z_3|^2} \delta_{ij} ,$$

also, für $k > 0$,

$$e^{k|z - z_3|^2} \cdot P\psi = -4k^2 \alpha(z - z_3, z - z_3) + 2k[\alpha^{ij}\delta_{ij} + \langle \beta, z - z_3 \rangle] - \gamma + \gamma e^{k|z - z_3|^2 - k|z_2 - z_3|^2} \le$$

$$\le -4k^2 \varepsilon |z - z_3|^2 + 2k(nA_0 + \sqrt{n} A_0 |z - z_3|) + A_0 , \quad \text{da } \gamma \le 0,$$

woher, wegen $|z_2 - z_3| - c \le |z - z_3| \le |z_2 - z_3| + c$ für $z \in \bar{B}(z_2, c)$,

$$e^{k|z-z_3|^2}\cdot P\psi \leq -4k^2\varepsilon(|z_2-z_3|-c) +$$

$$+2kA_0(n+\sqrt{n}(|z_2-z_3|+c)) + A_0 .$$

Auf der rechten Seite tritt ein Polynom zweiten Grades (für k), der für k groß genug negativ sein muß (da $\varepsilon > 0$ und $|z_2-z_3| - c > 0$. Wir haben also $\psi : \overline{B}(z_2, c) \to \mathbb{R}$ gefunden mit $\psi(z_2) = 0$ und $P\psi < 0$ in $\overline{B}(z_2, c)$. Da $Pf \leq 0$, haben wir, für $\eta > 0$ dicht bei 0,

$$P(f + \eta\psi) < 0$$

in $\overline{B}(z_2, c)$ und

$$f + \eta\psi > f(z_2) = f(y)$$

auf $\partial B(z_2, c)$. Tatsächlich, auf dieser Sphäre $f \geqslant f(y)$. Ist in einem Punkt z der Sphäre $\eta\psi(z) \leq 0$, so $|z - z_3| \leq |z_2 - z_3|$, d. h.

$$z \in \overline{B}(z_3, |z_2 - z_3|) \cap \partial B(z_2, c) \subset$$

$$\subset B(z_1, c_1)$$

(siehe die Abbildung). Da, in diesem kompakten Durchschnitt, $f(z) > f(y) = f(z_2)$, muß dort f von $f(y)$ wegbeschränkt sein. Nimmt man $\eta > 0$ klein genug, so gilt $f + \eta\psi > f(y)$ auf $\partial B(z_2, c)$. Andrerseits, $(f + \eta\psi)(z_2) = f(y)$. Also, für $\tilde{f} = f + \eta\psi$, η klein, gilt $P\tilde{f} < 0$ in $\overline{B}(z_2, c)$, $\tilde{f}(z_2) = f(y)$ und $\tilde{f} > f(y)$ auf $\partial B(z_2, c)$. Also muß $\tilde{f}$ ein Minimum in einem Punkt y_1 im Inneren von $B(z_2, c)$ haben, mit $\tilde{f}(y_1) \leq \tilde{f}(z_2) = f(y) \leq 0$. Wendet man den Fall a) auf $\tilde{f}$ in $B(z_2, c)$, so entsteht ein Widerspruch, der beweist, daß U_0 leer sein muß, also f konstant.

q. e. d.

FOLGERUNG 2. Seien U und P wie in Satz 10. Ist $\gamma \le 0$ und f eine C^2-Funktion auf U mit $Pf \geqslant 0$, die in U ein nicht-negatives Maximum zuläßt, so ist f konstant.

<u>Beweis</u>. Man wende Satz 10 auf die Funktion $-f$ an. q.e.d.

FOLGERUNG 3. Sei (M, g) eine (nicht unbedingt kompakte) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion die harmonisch ist ($\Delta f = 0$). Nimmt f ihr Maximum oder Minimum in M an, so ist f konstant.

<u>Beweis</u>. Sei $a = \min f$ und $y \in M$ ein beliebiger Punkt mit $f(y) = a$. Man darf $a = 0$ voraussetzen, indem man f durch $f - a$ ersetzt. In lokalen Koordinaten um y erfüllt $P = -\Delta$

die Voraussetzungen von Satz 10 (mit $\gamma = 0$). Deshalb ist $f = 0$ in einer Umgebung von y. Die Menge $f^{-1}(0)$ ist also abgeschlossen und offen, woher $f = 0$ überall in M. q.e.d.

FOLGERUNG 4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $F : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Nimmt $|F|$ ein Maximum in U an, so ist F konstant.

<u>Beweis</u>. Seien (x, y) die Kartesischen Koordinaten in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $f = \mathrm{Re}\, F$, $h = \mathrm{Im}\, F$. Nach den Cauchy-Riemann-Gleichungen, $\partial_x f = \partial_y h$, $\partial_y f = -\partial_x h$, woher $\Delta f = \Delta h = 0$ (bezüglich der flachen Metrik von $\mathbb{R}^2$). Also $\Delta(f^2) = -2|\nabla f|^2$, $\Delta(h^2) = -2|\nabla h|^2$ und deshalb, für $P = -\Delta$, $P(|F|^2) \geqslant 0$. Da P die Voraussetzungen von Folgerung 2 erfüllt mit $\gamma = 0$, impliziert die Existenz eines Minimums von $|F|$ in U, daß $|F|$ konstant sein muß. Daraus folgt bekanntlich

daß F selbst konstant ist (z. B., aus $f^2+h^2 = C \in \mathbb{R}$ erhält man $f\partial_x f + h\partial_x h = f\partial_y f + h\partial_y h = 0$ und, wegen der Cauchy-Riemann-Gleichungen, $\frac{h}{f}$ (bzw. $\frac{f}{h}$) ist konstant in jeder Komponente der Menge wo $f \neq 0$ (bzw. $h \neq 0$), woher man leicht sieht, wegen $f^2+h^2=C$, daß f und h konstant sind).

q. e. d.

FOLGERUNG 5 (Hauptsatz der Algebra). Jeder nicht-konstante komplexe Polynom $S(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ $(m \geq 1, a_m \neq 0)$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

<u>Beweis</u>. Sei $S \neq 0$ überall. Da offenbar $\lim\limits_{|z|\to\infty} |S(z)| = \infty$, gilt, für die holomorphe Funktion $F = \frac{1}{S}$, $\lim\limits_{|z|\to\infty} |F(z)| = 0$. Deshalb hat $|F|$ ein Maximum in $\mathcal{U} = \mathbb{C}$. F (und S) ist also konstant wegen Folgerung 4.

q. e. d.

FOLGERUNG 6. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $f : \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $\mathcal{U}$ C^2-differenzierbar ist und $\Delta f = \lambda f$ erfüllt, während $f = 0$ auf $\partial\mathcal{U}$ (vgl. Seite 116). Ist f nicht identisch Null, so $\lambda > 0$.

<u>Beweis</u>. Sei $\lambda \leq 0$, $P = -\Delta + \lambda$. Wegen Satz 10 (mit $\gamma = \lambda \leq 0$ und $Pf = 0$), sind die folgenden Fälle möglich:

a) f konstant, d. h. $f = 0$;

b) ein Minimum von f auf $\overline{\mathcal{U}}$ liegt in $\partial\mathcal{U}$, also $f \geq 0$ überall;

c) f ist nicht konstant und hat ihre $\overline{\mathcal{U}}$-Minima in $\mathcal{U}$; nach Satz 10 ist der Minimumwert positiv, also $f > 0$.

Insgesamt ist in jedem Fall $f \geq 0$. Da $-f$ dieselben Voraussetzungen erfüllt wie f, ist auch $f \leq 0$, woher $f = 0$.

q. e. d.

<u>Bemerkung</u>. Falls $\lambda < 0$, braucht man für Folgerung 6 nur einen trivialen Spezialfall von Satz 10 (in c), im Minimumpunkt, $\lambda f = \Delta f \leq 0$, also $\min f \geq 0$ und $f \geq 0$).

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \geq 1$ eine reelle Zahl, $f: M \to \mathbb{R}$ meßbar. Wir setzen

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_M |f|^p\right)^{1/p} \in [0,\infty]$$

Also: $\|af\|_{L^p} = |a|\,\|f\|_{L^p}$ für $a \in \mathbb{R}$ $(0\cdot\infty = 0)$; $\|f\|_{L^p} = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.

Die <u>Höldersche Ungleichung</u>: Seien $f, h: M \to \mathbb{R}$ meßbar, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $(q = \frac{p}{p-1})$. Dann

$$\int_M |fh| \leq \|f\|_{L^p}\,\|h\|_{L^q}.$$

<u>Beweis</u>. Sei $0 < \|f\|_{L^p}, \|h\|_{L^q} < \infty$ (sonst ist die Ungleichung trivial), $\tilde{f} = f/\|f\|_{L^p}$, $\tilde{h} = h/\|h\|_{L^q}$, so daß $\|\tilde{f}\|_{L^p} = \|\tilde{h}\|_{L^q} = 1$. Für $a, b \in [0,\infty)$ gilt $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ (man differenziere die Funktion $a \to \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$ und somit finde ihr Minimum in $(0,\infty)$). Also $\int_M |\tilde{f}\tilde{h}| \leq \int_M \left(\frac{1}{p}|\tilde{f}|^p + \frac{1}{q}|\tilde{h}|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, woher unsere Behauptung.

q.e.d.

<u>Die</u> <u>Minkowski – Ungleichung</u>: f, h meßbar auf (M,g), $p \geq 1$. Dann

$$\|f+h\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|h\|_{L^p}.$$

<u>Beweis</u>. Sei $p > 1$ (sonst folgt die Ungleichung aus $|f+h| \leq |f| + |h|$), $F = |f+h|^{p-1}$, $q = \frac{p}{p-1}$, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wegen der Hölder-Ungleichung, $\int |f+h|^p = \int F|f+h| \leq \int F|f| + \int F|h| \leq \left(\|f\|_{L^p} + \|h\|_{L^p}\right)\|F\|_{L^q}$ und $\|f+h\|_{L^p} = \|F\|_{L^q}^{-1} \int |f+h|^p$.

q.e.d.

Von nun an werden wir zwei meßbare Funktionen identifizieren, wenn sie fast überall übereinstimmen. Wir betrachten also den Quotientenraum des Raumes aller meßbaren Funktionen auf M modulo den Unterraum aller f mit $f = 0$ fast überall. Auf diesem Quotientenraum ist $\|\cdot\|_{L^p}$ definiert ($\|f+h\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ falls $h = 0$ fast überall). Sei $L^p(M,g)$ = die Menge aller (Äquivalenzklassen von) meßbaren Funktionen f mit $\|f\|_{L^p} < \infty$. Wegen der Minkowski-Ungleichung ist $L^p(M,g)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_{L^p}$ eine Norm in $L^p(M,g)$.

Ist $Vol(M)<\infty$ (z. B. M kompakt) und $q<p$, so $L^p(M,g)\subset L^q(M,g)$ und die Inklusionsabbildung ist stetig (bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{L^q}$). Sei nämlich $\tilde{p}=p/(p-q)$, $\tilde{q}=$ $=p/q$, also $\frac{1}{\tilde{p}}+\frac{1}{\tilde{q}}=1$. Wegen der Hölder-Ungleichung, $\|f\|^q_{L^q}=\int_M 1\cdot|f|^q \leq$ $\leq \|1\|_{L^{\tilde{p}}}\,\||f|^q\|_{L^{\tilde{q}}}=(Vol\,M)^{\frac{p-q}{p}}\cdot\|f\|^q_{L^p}$, d.h. $\|f\|_{L^q}\leq (Vol\,M)^{1/q-1/p}\cdot\|f\|_{L^p}$. Insbesondere ist, falls $Vol(M)<\infty$, $L^p(M,g)\underset{stetig}{\subset} L^1(M,g)$ für alle $p\geq 1$.

Als wir das Integral von nicht-negativen meßbaren Funktionen definierten, setzten wir voraus, daß diese Funktionen nur endliche Werte annahmen. Betrachten wir nun, allgemeiner, Funktionen $f: M\to[0,\infty]$. f heißt meßbar, wenn $f^{-1}(\infty)$ und $f^{-1}(B)$ meßbare Teilmengen von M sind, für jede meßbare Menge $B\subset[0,\infty)$. Für eine feste Riemannsche Metrik g auf M definiert man dann das

Integral $\int_M f$ als ∞, falls $Vol(f^{-1}(\infty))>0$ und als $\int_M \tilde{f}$, wenn $Vol(f^{-1}(\infty))=0$, wobei $\tilde{f}=f$ in Punkten wo $f<\infty$ und $\tilde{f}=0$ in $f^{-1}(\infty)$. Man hat also $\int_M(f+h)=\int_M f+\int_M h$, $\int_M af=$ $=a\int_M f$ für meßbare Funktionen $f,h: M\to[0,\infty]$ und $a\geq 0$ $(0\cdot\infty=0)$, sowie $\int_M f\leq\int_M h$ falls $f\leq h$ fast überall.

SATZ von der monotonen Konvergenz (B. Levi). Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f_k: M\to[0,\infty]$ eine Folge meßbarer Funktionen mit $f_k\leq f_{k+1}$ für alle k. Ist $f=\lim_{k\to\infty} f_k$ (dieses $f: M\to[0,\infty]$ existiert immer und ist meßbar), so $\int_M f=\lim_{k\to\infty}\int_M f_k$.

Beweis. Es genügt den Satz in dem Fall zu beweisen, wo M durch eine meßbare Menge $A\subset\mathbb{R}^n$ vom endlichen Lebesgue-Maß und das Integral in (M,g) durch das Lebesgue-Integral ersetzt ist.

Es ist nämlich $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (A_i sind paarweise disjunkte, kleine meßbare Mengen). Wissen wir, daß $\int_{A_i} f = \lim_k \int_{A_i} f_k$, für alle i, so $\int_{A_i} f = \sum_k \int_{A_i} h_k$, wobei $h_1 = f_1 \geqslant 0$, $h_{k+1} = f_{k+1} - f_k \geqslant 0$. Also

$$\int_M f = \sum_i \int_{A_i} f = \sum_i \sum_k \int_{A_i} h_k = \sum_k \sum_i \int_{A_i} h_k =$$

$$= \sum_k \int_M h_k = \lim_k \int_M f_k,$$ weil die Summe abzählbar vieler nicht-negativen Zahlen von der Reihenfolge der Summierung nicht abhängt.

Für die Lebesgue-Integrale haben wir bestimmt $\lim_k \int_A f_k \leqslant \int_A f$, weil $f_k \leqslant f$ für alle k. Nach Definition ist $\int_A f$ das Supremum der Integrale $\int_A \varphi$ aller meßbaren Funktionen φ mit $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, die nur endlich viele (endliche) Werte annehmen. Sei φ eine solche Funktion, $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ (endliche disjunkte Zerlegung), $\varphi = c_\alpha$ auf A_α. Für $\varepsilon > 0$ (fest) sei $A_{k,\alpha} = \{y \in A_\alpha : f_k(y) > c_\alpha - \varepsilon\}$. Also $A_{k,\alpha} \subset A_{k+1,\alpha}$, $\bigcup_k A_{k,\alpha} = A_\alpha$, woher

$$\lim_k \int_A f_k \geqslant \lim_k \int_{\bigcup_\alpha A_{k,\alpha}} f_k \geqslant \lim_k \int_{\bigcup_\alpha A_{k,\alpha}} (c_\alpha - \varepsilon) = \int_A \varphi - \varepsilon \operatorname{vol}(A).$$

Also liegt $\lim_k \int_A f_k$ beliebig dicht bei $\int_A f$.

q.e.d.

LEMMA von Fatou. Sei $f_k : M \to [0, \infty]$ eine Folge meßbarer Funktionen auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Dann ist

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k .$$

Beweis. Sei $h_k = \inf_{m \geqslant k} f_m$; also, $h_k \geqslant 0$, $h_k \leqslant h_{k+1}$, $\int_M h_k \leqslant \inf_{m \geqslant k} \int_M f_m$. Deshalb, wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz,

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} f_k = \int_M \lim_k h_k = \lim_k \int_M h_k \leqslant \lim_k \inf_{m \geqslant k} \int_M f_m =$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k .$$

q.e.d.

SATZ von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesgue). Seien f_k und f meßbare Funktionen auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) mit $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ fast überall. Existiert $F \in L^p(M,g)$ mit $|f_k| \leqslant F$ fast überall, für alle k, so ist $f \in L^p(M,g)$ und $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ in L^p, d.h. $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0$. Ist $p=1$, so gilt auch $\int_M f = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k$.

__Beweis.__ a) Sei $p=1$. Da $f_k + F \geq 0$ und $F - f_k \geq 0$, sowie $f + F = \lim_k (f_k + F)$, $F - f = \lim_k (F - f_k)$, gilt, nach dem Lemma von Fatou, $\int_M (f+F) \leq \liminf_k \int_M (f_k + F)$, $\int_M (F-f) \leq \liminf_k \int_M (F - f_k)$. Nach Voraussetzung ist $\int_M F$ endlich, also $\int_M f \leq \liminf_k \int_M f_k \leq$
$\leq \limsup_k \int_M f_k = - \liminf_k \int_M (-f_k) \leq -\int_M (-f) =$
$= \int_M f$. Deshalb ist $\int_M f = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k$.

b) p beliebig. Sei $h_k = |f_k - f|^p$. Nach Voraussetzung ist $\lim_k h_k = 0$ fast überall, sowie $|h_k| \leq 2^p F^p \in L^1(M,g)$. Wegen a) ist nun $\lim_k \int_M h_k = 0$, d.h. $f_k \to f$ in L^p.

q.e.d.

SATZ __von__ __F. Riesz.__ Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f_k \in L^p(M,g)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der L^p-Norm ($p \geq 1$). Dann gibt es $f \in L^p(M,g)$ mit

(i) $f = \lim_k f_k$ in L^p,

(ii) $f = \lim_m f_{k_m}$ punktweise, fast überall,

für eine Teilfolge f_{k_m} von f_k.

__Beweis.__ Wir wählen eine Teilfolge von f_k, die wir weiter mit f_k bezeichnen, mit der Eigenschaft, daß $\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} < 2^{-k}$ (es genügt (i) für diese Teilfolge zu beweisen). Sei $F_k = |f_k - f_{k-1}| + |f_{k-1} - f_{k-2}| + \ldots + |f_2 - f_1|$. Also $F_k \geq 0$, $F_k \leq F_{k+1}$, und $F = \lim_k F_k : M \to [0,\infty]$ existiert. Da $\|F_k\|_{L^p} \leq 2^{-(k-1)} + 2^{-(k-2)} + \ldots + 2^{-1} =$
$= 1 - 2^{-(k-1)}$, gilt, nach dem Satz von der monotonen Konvergenz, $\int_M F^p = \lim_k \int_M F_k^p \leq$
≤ 1, d.h., $F \in L^p(M,g)$, woher $F < \infty$ fast überall. Wir haben auch

$$f_k = f_1 + \sum_{s=2}^{k} (f_s - f_{s-1}) \text{ und } \sum_{s=2}^{\infty} |f_s - f_{s-1}| =$$

$= F < \infty$ fast überall. Deshalb muß es eine meßbare, endliche Funktion f geben mit $f = \lim_k f_k$ fast überall. Andererseits ist

$$|f_k| \leq |f_1| + |F_k| \leq |f_1| + F \in L^p(M,g)$$

und, nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz, $f \in L^p(M,g)$ und $f_k \to f$ in L^p.

q. e. d.

<u>Bemerkung</u>. Die L^p-Räume $L^p(M,g)$ mit den L^p-Normen sind also Banach-Räume. Der L^2-Raum $L^2(M,g)$ ist sogar ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,h \rangle_{L^2} = \int_M fh,$$

weil $\|f\|^2_{L^2} = \langle f,f \rangle_{L^2}$.

Sei $C_0^k(M)$ der Raum aller C^k-Funktionen auf der Mannigfaltigkeit M, die kompakte Träger haben. In $C_0^k(M)$ definiert man, bei einer festen Riemannschen Metrik g auf M, die C^k-Norm

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{s=0}^{k} \sup_M |\nabla^s f|,$$

wobei $\nabla^0 f = f$. Insbesondere besteht $C_0^0(M)$ aus allen stetigen Funktionen mit kompakten Trägern und $\|f\|_{C^0} = \sup_M |f|$. Für $k \leq l$ ist $C_0^l(M) \subset C_0^k(M)$ und der Inklusionsoperator ist stetig: $\|f\|_{C^k} \leq \|f\|_{C^l}$ für $f \in C_0^l(M)$. Für jede feste C^∞-Funktion φ mit kompaktem Träger ist der Operator $C_0^k(M) \ni f \to \varphi f \in C_0^k(M)$ stetig bezüglich der C^k-Norm. Es ist nämlich *

$$\|\varphi f\|_{C^k} \leq C \|\varphi\|_{C^k} \|f\|_{C^k} \text{ mit einer Konstante}$$

C, die nur von k abhängt. Im Gegensatz zu $L^p(M,g)$ sind die Räume $C_0^k(M)$ bezüglich der C^k-Norm nicht vollständig, falls M nicht kompakt ist (kompakte Träger werden bei Grenzübergängen nicht erhalten).

Sei nun (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \geq 1$ reell, $k \geq 0$ eine natürliche Zahl. Im Raum $C_0^\infty(M)$ aller C^∞-Funktionen f mit kompakten Trägern definieren wir

---

* siehe Seite 160

die <u>Sobolew-Norm</u>

$$\|f\|_{L^p_k} = \sum_{s=0}^{k} \left(\int_M |\nabla^s f|^p \right)^{1/p},$$

d.h. $\|f\|_{L^p_k} = \sum_{s=0}^{k} \| \, |\nabla^s f| \, \|_{L^p}$. Wegen der Minkowski-Ungleichung ist $\|\cdot\|_{L^p_k}$ tatsächlich eine Norm in $C_0^\infty(M)$. Falls $k < l$, gilt offenbar

$$\|f\|_{L^p_k} \leq \|f\|_{L^p_l}$$

für alle $f \in C_0^\infty(M)$. Sei $f \in C_0^\infty(M)$, A der Träger von f. Da $\left(\int_M |\nabla^s f|^p\right)^{1/p} \leq$

$\leq \mathrm{Vol}(A)^{1/p} \cdot \sup_M |\nabla^s f|$, gilt auch

$$\|f\|_{L^p_k} \leq \mathrm{Vol}(A)^{1/p} \|f\|_{C^k},$$

wobei $A = $ Träger(f). Wie bei den C^k-Normen, ist die Multiplikation $C_0^\infty(M) \ni f \longrightarrow \varphi f \in C_0^\infty(M)$ stetig* bezüglich jeder Sobolew-Norm $\|\cdot\|_{L^p_k}$. Wegen der Leibniz-Regel ist nämlich $(\varphi f)_{,i_1 \ldots i_k}$ eine endliche

* für jede feste Funktion $\varphi \in C_0^\infty(M)$.

Summe der Ausdrücke der Form

$\varphi_{,i_{\sigma_1} \ldots i_{\sigma_l}} f_{,i_{\sigma_{l+1}} \ldots i_{\sigma_k}}$, wobei $0 \leq l \leq k$ und σ eine Permutation ist. Daher ist $\nabla^s(\varphi f) =$ $= \sum_{l=0}^{s} \sum_{(\text{gewisse})\,\sigma} \sigma(\nabla^{s-l}\varphi \otimes \nabla^l f)$, wobei die Permutation σ, auf einen Tensor angewandt, die entsprechende Permutation seiner Indices bedeutet. Also, für $0 \leq s \leq k$, $|\nabla^s(\varphi f)| \leq$

$\leq C \|\varphi\|_{C^k} \sum_{l=0}^{k} |\nabla^l f|$ mit einer (nur von k abhängigen) Konstante C, und $\|\varphi f\|_{L^p_k} \leq$

$\leq C \|\varphi\|_{C^k} \|f\|_{L^p_k}$ mit einer (anderen) Konstante C.

Seien nun $g, \tilde{g}$ zwei Riemannsche Metriken auf M, ∇ und $\tilde{\nabla}$ ihre Riemannschen Zusammenhänge, $(\mathcal{U}, (x^i))$ ein relativ kompaktes Koordinatensystem. Dann ist, für jedes $k \geq 1$ und jedes $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_{i_1} \ldots \nabla_{i_k} f = f_{,i_1 \ldots i_k} =$

$= \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f + \sum_{l=1}^{k-1} a_{k,l\; i_1 \ldots i_k}^{\;j_1 \ldots j_l} \partial_{j_1} \ldots \partial_{j_l} f$

mit gewissen (von f unabhängigen) Funktionen

$\underset{k,l}{a}{}_{i_1 \ldots i_k}{}^{j_1 \ldots j_l} \in C^\infty(\mathcal{U})$ (Aufgabe II. 11).

Deshalb ist auch $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f = \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_k} f + \sum_{l=1}^{k-1} \underset{k,l}{b}{}_{i_1 \ldots i_k}{}^{j_1 \ldots j_l} \nabla_{j_1} \cdots \nabla_{j_l} f$ mit

$\underset{k,l}{b}{}_{i_1 \ldots i_k}{}^{j_1 \ldots j_l} \in C^\infty(\mathcal{U})$. Da ähnliche Relationen für $\tilde{\nabla}$ gelten, ist $\tilde{\nabla}_{i_1} \cdots \tilde{\nabla}_{i_k} f = \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_k} f + \sum_{l=1}^{k-1} \underset{k,l}{h}{}_{i_1 \ldots i_k}{}^{j_1 \ldots j_l} \nabla_{j_1} \cdots \nabla_{j_l} f$. Also gilt (da $(\mathcal{U}, (x^i))$ relativ kompakt ist und somit die $\underset{k,l}{h}$-Funktionen mit allen Ableitungen auf $\mathcal{U}$ beschränkt), wegen der Schwarzschen Ungleichung,

$$|\tilde{\nabla}^k f|_{\tilde{g}} \leq C \sum_{l=1}^{k-1} |\nabla^l f|_{\tilde{g}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(von f unabhängig), $k \geq 1$, wobei $|\cdot|_{\tilde{g}}$ die $\tilde{g}$-Länge von Tensoren ist. Wegen der Schwarzschen Ungleichung ist auch $|H|_{\tilde{g}} \leq C |H|_g$ auf $\mathcal{U}$, für alle Tensorfelder H auf M von einem festen Typ. $C \in \mathbb{R}$ ist hier eine <u>andere</u> Konstante. Insgesamt ist auf $\mathcal{U}$, für alle $f \in C^\infty(M)$,

$$|\tilde{\nabla}^k f|_{\tilde{g}} \leq C \sum_{l=1}^{k-1} |\nabla^l f|_g, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Andrerseits, $\int_{\mathcal{U}} |h| \cdot V_{\tilde{g}} \leq C \int_{\mathcal{U}} |h| \cdot V_g$ für jede meßbare Funktion h auf $\mathcal{U}$ (vgl. die Definition des Integrals). Das Symbol C steht hier für <u>verschiedene</u>, von der betrachteten Funktionen unabhängige Konstanten. Wir haben also, für alle $f \in C_0^\infty(M)$ mit Trägern in $\mathcal{U}$,

$$\|f\|_{C^k(\tilde{g})} \leq C \|f\|_{C^k(g)},$$

$$\|f\|_{L^p_k(\tilde{g})} \leq C \|f\|_{L^p_k(g)},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ von $g, \tilde{g}, \mathcal{U}, p$ und k abhängt, aber nicht von f. Wegen der Symmetrie zwischen g und $\tilde{g}$ gelten ähnliche Ungleichungen in der umgekehrten Richtung. Also: Für jedes relativ kompaktes Koordinatensystem $(\mathcal{U}, (x^i))$ hängen die C^k- und Sobolew-Normen im Raum $C_0^\infty(\mathcal{U})$ aller C^∞-Funktionen auf M mit Trägern in $\mathcal{U}$, bis auf Äquivalenz, von der Metrik g auf M nicht ab.

SATZ 11. Sei jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) der festen Dimension n eine Norm $\|\cdot\|_g$ in $C_0^\infty(M)$ zugeordnet, so daß die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $\|f\|_g = \|f\|_{g_U}$, falls $U \subset M$ eine offene Untermannigfaltigkeit ist, g_U die Einschränkung von g auf U und $f \in C_0^\infty(U) \subset C_0^\infty(M)$.

(ii) $\|f \circ \Phi\|_{\Phi^* g} = \|f\|_g$, falls $\Phi : N \to M$ ein Diffeomorphismus ist, g eine Metrik auf M und $f \in C_0^\infty(M)$.

(iii) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball, $U \subset M$ ein kleinerer Ball, so hängt die Norm $\|\cdot\|_g$ im Raum $C_0^\infty(U) \subset C_0^\infty(M)$, bis auf Äquivalenz, von der Metrik g auf M nicht ab.

(iv) Für jedes (M,g) und jedes feste $\varphi \in C_0^\infty(M)$ ist der Operator $C_0^\infty(M) \ni f \to \varphi f \in C_0^\infty(M)$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_g$.

(Bemerkung: Bedingungen (i) – (iv) gelten für alle C^k–, sowie für alle Sobolev-Normen).

Dann gilt folgendes: a) Für jede Mannigfaltigkeit M und jede relativ kompakte offene Menge $U \subset M$ ist die Norm $\|\cdot\|_g$ im Raum $C_0^\infty(U) \subset C_0^\infty(M)$, bis auf Äquivalenz, von der Metrik g auf M unabhängig.

b) Außerdem, seien $(M,g) \to \|\cdot\|_g'$, $(M,g) \to \|\cdot\|_g''$ zwei Zuordnungen, die den Bedingungen (i) – (iv) genügen. Ist, für den euklidischen Ball $M = B$ mit der euklidischen Metrik g_0 die Identitätsabbildung $(C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{g_0}') \to (C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{g_0}'')$ stetig (bzw. kompakt im Sinne, daß jede $\|\cdot\|_{g_0}'$–beschränkte Folge in $C_0^\infty(B)$ eine $\|\cdot\|_{g_0}''$–Cauchy-Folge enthält), so ist, für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) mit $\dim M = n$ und jede relativ kompakte offene Menge $U \subset M$ die Identitätsabbildung $(C_0^\infty(U), \|\cdot\|_g') \to (C_0^\infty(U), \|\cdot\|_g'')$ stetig (bzw. kompakt im obengenannten Sinne).

Beweis. a) Seien $g, \tilde g$ zwei Metriken auf M, $U \subset M$ offen, relativ kompakt. Man finde $\varphi_\alpha \in C_0^\infty(M)$, $\alpha = 1, \dots, q$, mit $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ auf U, und mit Träger $(\varphi_\alpha) \subset B_\alpha \subset B'_\alpha$, wobei es einen Diffeomorphismus $\Phi_\alpha : B'_\alpha \to B$ auf den euklidischen Ball gibt, für den $\Phi_\alpha(B'_\alpha) \subset B$ ein kleinerer Ball ist. Für $f \in C_0^\infty(U)$ ist $f = \sum_\alpha f_\alpha$ mit $f_\alpha = \varphi_\alpha f$. Also $\|f\|_g \leq \sum_\alpha \|f_\alpha\|_g$. Wegen (i), (ii), (iii), $\sum_\alpha \|f_\alpha\|_g \leq C \sum_\alpha \|f_\alpha\|_{\tilde g} = C \sum_\alpha \|\varphi_\alpha f\|_{\tilde g}$. Aus (iv) folgt, daß $\|\varphi_\alpha f\|_{\tilde g} \leq C_\alpha \|f\|_{\tilde g}$, woher, mit der Symmetrie zwischen g und $\tilde g$, a) folgt.

b) Sei (M, g) beliebig, $U \subset M$ offen, relativ kompakt, φ_α, B_α, B'_α, Φ_α wie oben, g_0 die euklidische Metrik auf B. Für $f \in C_0^\infty(U)$ gilt

$$\|f\|''_g \leq \sum_\alpha \|\varphi_\alpha f\|''_g \leq \sum_\alpha C_\alpha \|\varphi_\alpha f\|''_{\Phi_\alpha^* g_0},$$

wegen (iii), sowie

$$\|\varphi_\alpha f\|'_{\Phi_\alpha^* g_0} \leq \tilde C_\alpha \|\varphi_\alpha f\|'_g \leq C \|f\|'_g$$

wegen (iii) und (iv). Ist die Stetigkeitsvoraussetzung erfüllt, so $\|\varphi_\alpha f\|''_{\Phi_\alpha^* g_0} \leq \tilde{\tilde C}_\alpha \|\varphi_\alpha f\|'_{\Phi_\alpha^* g_0}$,

woher unsere Behauptung. Gilt dagegen die Kompaktheitsbedingung und ist $f_m \in C_0^\infty(U)$ eine $\|\cdot\|'_g$-beschränkte Folge, so enthält f_m, wegen der obigen Ungleichungen, eine $\|\cdot\|''_g$-Cauchy-Folge.

q. e. d.

FOLGERUNG 7 (Lemma von Rellich). Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$. Dann ist die Identitätsabbildung $(C^\infty(M), \|\cdot\|_{L^p_k}) \longrightarrow (C^\infty(M), \|\cdot\|_{L^p_{k-1}})$ kompakt: Jede $\|\cdot\|_{L^p_k}$-beschränkte Folge $f_m \in C^\infty(M)$ enthält eine $\|\cdot\|_{L^p_{k-1}}$-Cauchy-Folge.

Beweis. Nach Satz 11 genügt es den Fall zu betrachten, wo $M = B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball um 0 und g die euklidische Metrik ist.

Für $f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $f * h$ mit

$$(f * h)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - z) h(z) \, dz$$

(Lebesgue-Integral) eine fast überall definierte

L^1-Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $\|f*h\|_{L^1} \leq \leq \|f\|_{L^1}\|h\|_{L^1}$. Dies folgt aus dem Satz von Fubini, weil $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y-z)h(z)|\,dz\,dy = = \|f\|_{L^1}\|h\|_{L^1} < \infty$. Außerdem ist $f*h = = h*f$ (Transformationsformel für das Lebesgue-Integral mit $\Phi(z) = y-z$). Ist f beschränkt, so $\sup|f*h| \leq \sup|f|\cdot\|h\|_{L^1}$.

Sei $\varphi \in C_0^0(B)$, $f \in L^1(B)$ (d.h. f ist eine L^1-Funktion auf $\mathbb{R}^n$, die außerhalb B verschwindet). Dann ist $\varphi * f \in C_0^0(2B)$, wobei $2B$ der zweimal größere Ball um 0 ist. Es gilt nämlich, allgemein, Träger$(f*h) \subset \subset$ Träger(f) + Träger$(h) = \{y+z : y \in$ Träger(f), $z \in$ Träger$(h)\}$ für $f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, während die Stetigkeit von $\varphi * f$ aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt: $(\varphi*f)(y_m) \to \to (\varphi*f)(y)$ falls $y_m \to y$, weil $\varphi(y_m - z)f(z) \to \to \varphi(y-z)f(z)$ für alle z und $|\varphi(y_m-z)f(z)| \leq$

$\leq \|\varphi\|_{C^0}|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ist außerdem $\varphi \in C_0^1(B)$ und $f \in L^1(B)$, so $\varphi * f \in C_0^1(2B)$ und $\partial_i(\varphi * f) = (\partial_i\varphi)*f$, $i = 1, \dots, n$: $\frac{1}{t}[(\varphi*f)(y+t\partial_i) - (\varphi*f)(y)] =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y-z+t\partial_i)-\varphi(y-z)}{t} f(z)\,dz \xrightarrow[t\to 0]{}$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\varphi(y-z)f(z)\,dz = [(\partial_i\varphi)*f](y)$$ wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz (weil $\frac{1}{t}[\varphi(y-z+t\partial_i)-\varphi(y-z)]f(z) \xrightarrow[t\to 0]{} \xrightarrow[t\to 0]{} \partial_i\varphi(y-z)f(z)$ für alle z und $|\frac{1}{t}[\varphi(y-z+t\partial_i)-\varphi(y-z)]f(z)| \leq \sup|\partial_i\varphi|\cdot|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$).

Nun folgt es durch Induktion daß, für $\varphi \in C_0^\infty(B)$ und $f \in L^1(B)$, $\varphi * f \in C_0^\infty(2B)$ und $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}(\varphi * f) = (\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}\varphi)*f$ für alle k.

Deshalb ist für jede feste Funktion $\varphi \in C_0^\infty(B)$ der Operator $T_\varphi : L^1(B) \to C_0^\infty(2B)$ mit $T_\varphi(f) = \varphi * f$ stetig, bezüglich der L^1-Norm in $L^1(B)$ und der C^k-Norm in $C_0^\infty(2B)$ ($k \geq 0$ beliebig). Ist f_m eine L^1-beschränkte Folge in $L^1(B)$, so ist $T_\varphi(f_m)$, für jedes $k \geq 0$, C^{k+1}-beschränkt. Die Funktionen $T_\varphi(f_m)$ haben Träger in der gemeinsamen kompakten Menge $\text{Träger}(\varphi) + \bar{B} \subset 2B$ und, für $s \leq k$ und feste $i_1, \ldots, i_s$, $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s}(T_\varphi(f_m))$ sind mit ihren partiellen Ableitungen der ersten Ordnung gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Arzela müssen also die $T_\varphi(f_m)$ eine C^k-Cauchy-Folge enthalten, d. h.

$T_\varphi : (L^1(B), \|\cdot\|_{L^1}) \to (C_0^\infty(2B), \|\cdot\|_{C^k})$ ist kompakt (in unserem Sinn), für alle $k \geq 0$.

Die Identitätsabbildungen $(C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{L^p_k}) \to (C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{L^p}) \to (L^1(B), \|\cdot\|_{L^1})$ und $(C_0^\infty(2B), \|\cdot\|_{C^{k-1}}) \to (C_0^\infty(2B), \|\cdot\|_{L^p_{k-1}})$, $k \geq 1$, sind stetig (weil $Vol(B) < Vol(2B) < \infty$),

also, $T_\varphi : (C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{L_k}) \to (C_0^\infty(2B), \|\cdot\|_{L_{k-1}})$ ist kompakt, in unserem Sinn, für alle $k \geq 1$.

Sei $J : (C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{L_k}) \to (C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{L_{k-1}})$ der Identitätsoperator, $\varphi \in C_0^\infty(B)$ eine feste Funktion mit $\int \varphi = 1$. Für ε mit $0 < \varepsilon < 1$, setzen wir $\varphi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} \varphi(y/\varepsilon)$; also $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B)$. Wir behaupten, daß es $C = C(B, k, n) \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$(*) \qquad \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p_{k-1}} \leq C \varepsilon \|\varphi\|_{L^q} \|f\|_{L^p_k}$$

für alle $f \in C_0^\infty(B)$, wobei, für $p > 1$, q so gewählt ist, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und, für $p = 1$, $\|\varphi\|_{L^q} = \|\varphi\|_{C^0}$. Daraus wird die Kompaktheit von J folgen. Sie ist nämlich gleichbedeutend mit der Kompaktheit der Inklusion $(C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{L^p_k}) \xrightarrow{j} (C_0^\infty(2B), \|\cdot\|_{L^p_{k-1}})$ (weil $(C_0^\infty(B), \|\cdot\|_{L^p_{k-1}}) \xrightarrow{Id} (C_0^\infty(2B), \|\cdot\|_{L^p_{k-1}})$ isometrisch ist), und $(*)$ bedeutet, daß

$$\|T_{\varphi_\varepsilon} - J\|_{Op.} \leq C \varepsilon \|\varphi\|_{L^q}$$

wobei $\|\cdot\|_{Op.}$ die Operator-Norm ist, also

$$T_{\varphi_\varepsilon} \to J \text{ bezüglich } \|\cdot\|_{Op.} \text{ wenn } \varepsilon \to 0.$$

Beweis von (*): $(\varphi_\varepsilon * f)(y) - f(y) = (f*\varphi_\varepsilon)(y) - f(y) = \int_B [f(y-\varepsilon z) - f(y)]\varphi(z)dz$ (wegen der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral mit $\Phi(z) = z/\varepsilon$), und $f(y-\varepsilon z) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(y - t\varepsilon z)dt = -\varepsilon z^i \int_0^1 \partial_i f(y-t\varepsilon z)dt$.

Da $|z^i| \leq C_1$, haben wir, wegen der Hölderschen Ungleichung,

$$|(\varphi_\varepsilon * f)(y) - f(y)| \leq C_1 \varepsilon \sum_i \int_B \int_0^1 |\partial_i f(y-t\varepsilon z)\varphi(z)| dt\,dz \leq$$

$$\leq C_1 \varepsilon \cdot \|\varphi\|_{L^q} \sum_i \left(\int_B \int_0^1 |\partial_i f(y-t\varepsilon z)|^p dt\,dz\right)^{1/p}.$$

Daher ist $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|^p_{L^p} \leq$

$$\leq C_2 \varepsilon^p \|\varphi\|^p_{L^q} \sum_i \int_{2B}\int_B\int_0^1 |\partial_i f(y-t\varepsilon z)|^p dt\,dz\,dy.$$

Integrieren wir zunächst über dy, so

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \leq C_3 \varepsilon \|\varphi\|_{L^q} \sum_i \|\partial_i f\|_{L^p}.$$

Für $0 \leq j < k$ ist also

$$\|\partial_{\ell_1}\cdots\partial_{\ell_j}(\varphi_\varepsilon * f - f)\|_{L^p} = \|\varphi_\varepsilon * \partial_{\ell_1}\cdots\partial_{\ell_j} f - \partial_{\ell_1}\cdots\partial_{\ell_j} f\|_{L^p} \leq$$

$$\leq C_3 \varepsilon \|\varphi\|_{L^q} \sum_i \|\partial_i \partial_{\ell_1}\cdots\partial_{\ell_j} f\|_{L^p},$$ woher (*) folgt.

q. e. d.

FOLGERUNG 8. Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, Δ ihr Laplace-Operator.

(i) Für jeden Eigenwert λ von Δ ist der λ-Eigenraum $\{f \in C^\infty(M) : \Delta f = \lambda f\}$ endlich dimensional.

(ii) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es nur endlich viele Eigenwerte λ von Δ mit $\lambda \leq a$.

<u>Beweis</u>. Da $\int_M f\Delta h = \int_M f_{,i} h_,{}^{i} = \int_M h\Delta f$, sind die verschiedenen Eigenräume von Δ paarweise L^2-orthogonal. Wäre unsere Behauptung falsch, so könnten wir eine L^2-orthonormale Folge $f_m \in C^\infty(M)$ finden mit $\Delta f_m = \lambda_m f_m$, $0 \leq \lambda_m \leq a$. Für jedes $f \in C^\infty(M)$ gilt aber

$$\int_M |\nabla f|^2 = \int_M f\Delta f \leq \|f\|_{L^2}\|\Delta f\|_{L^2},$$

also

$$\|f\|_{L^2_1} \leqslant \|f\|_{L^2} + \sqrt{\|f\|_{L^2}\|\Delta f\|_{L^2}}\,.$$

Deshalb ist

$$\|f_m\|_{L^2_1} \leqslant 1 + \sqrt{\lambda_m} \leqslant 1 + \sqrt{a}\,.$$

Nach dem Lemma von Rellich besitzt f_m eine Teilfolge, die eine L^2-Cauchy-Folge ist. Das ist aber unmöglich, weil $\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_{L^2} = \sqrt{2}$, für $m_1 \neq m_2$, wegen der Orthonormalität. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

FOLGERUNG 9. Sei P ein elliptischer Operator der (wesentlichen) Ordnung 2 auf der kompakten Mannigfaltigkeit M. Dann ist der Vektorraum

$$\mathrm{Kern}\; P = \{f \in C^\infty(M) : Pf = 0\}$$

endlich dimensional.

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß das Symbol σ_P von P negativ definit ist (indem wir notfalls P durch $-P$ ersetzen). Dann gibt es genau eine Riemannsche Metrik g auf M mit $\sigma_P^{ij} = -g^{ij}$. Wegen Satz 9 hat P, bezüg-

lich des Riemannschen Zusammenhanges von g, die Zerlegung $Pf = \Delta f + X^i f_{,i} + \alpha f$, wobei X ein C^∞-Vektorfeld und α eine C^∞-Funktion auf M ist. Wir haben, für $f \in C^\infty(M)$,

$$\int_M |\nabla f|^2 = \int_M f\Delta f = \int_M (f \cdot Pf - fX^i f_{,i} - \alpha f^2).$$

Die partielle Integration ergibt $\int_M fX^i f_{,i} = -\int_M f_{,i} X^i f - \int_M f^2 X^i_{\ ;i}$, d. h. $\int_M fX^i f_{,i} = \frac{1}{2}\int_M f^2 \delta X$. Deshalb ist $\int_M |\nabla f|^2 = \int_M f \cdot Pf - \int_M f^2(\frac{1}{2}\delta X + \alpha)$ und

$$\int_M |\nabla f|^2 \leqslant C\|f\|^2_{L^2} + \int_M f \cdot Pf\,.$$

(Bemerkung: Wegen dieser Ungleichung gibt es eine untere Schranke für die Eigenwerte λ von P: $\lambda \geqslant -C$), wobei $C = \sup_M |\frac{1}{2}\delta X + \alpha|$. Wäre Kern P unendlich dimensional, so würde es eine L^2-orthonormale Folge enthalten, die, wegen dieser Ungleichung, L^2_1-beschränkt sein muß und somit eine L^2-

-Cauchy-Teilfolge besitzt (Lemma von Rellich), was der Orthonormalität widerspricht.

q.e.d.

FOLGERUNG 10. Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist jede Sobolew-Norm $\|\cdot\|_{L^p_k}$, sowie jede C^k-Norm, bis auf Äquivalenz, von der Metrik unabhängig.

q.e.d.

LEMMA 5. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ eine meßbare Menge, $\varepsilon > 0$.

(i) Es gibt eine offene Menge $\mathcal{U} \subset M$ mit $A \subset \mathcal{U}$ und $\mathrm{Vol}(\mathcal{U} \setminus A) < \varepsilon$.

(ii) Falls $\mathrm{Vol}(A) < \infty$, gibt es eine kompakte Menge $B \subset A$ mit $\mathrm{Vol}(A \setminus B) < \varepsilon$.

<u>Beweis</u>. (i) Die Behauptung gilt, wenn (M,g) der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ist und $\mathrm{Vol}(A) < \infty$. Dann ist nämlich $\mathrm{Vol}(A)$ das Infimum aller Summen $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(\mathcal{U}_i)$, wobei $\mathcal{U}_i$ offene Würfel mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ sind; für $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ ist also $\mathrm{Vol}(A) \leq \mathrm{Vol}(\mathcal{U}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(\mathcal{U}_i)$. Seien

nun (M,g) und A beliebig. Es ist $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, wobei die A_j meßbar, paarweise disjunkt und "klein" sind. Jedes A_j ist also in einem relativ kompakten Koordinatensystem $(\tilde{\mathcal{U}}, (x^i))$ enthalten. Wegen des erwähnten euklidischen Falles, gibt es offene Mengen $\mathcal{U}_{j,m}$, $A \subset \mathcal{U}_{j,m} \subset \tilde{\mathcal{U}}$, mit $\mathcal{U}_{j,m+1} \subset \mathcal{U}_{j,m}$ und $\int\limits_{(\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_{j,m}) \setminus A_j} 1 \cdot dx^1 \ldots dx^n = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{U}_{j,m} \setminus A_j} dx^1 \ldots dx^n = 0$, woher $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{\mathcal{U}_{j,m} \setminus A_j} \sqrt{\det[g_{kl}]}\, dx^1 \ldots dx^n = 0$;

es gibt also $m = m_j$ mit $\mathrm{Vol}_g(\mathcal{U}_{j,m_j} \setminus A_j) < \varepsilon 2^{-j}$. Für $\mathcal{U} = \bigcup_j \mathcal{U}_{j,m_j}$ ist deshalb $\mathcal{U} \supset A$ und $\mathrm{Vol}(\mathcal{U} \setminus A) \leq \sum_j \mathrm{Vol}(\mathcal{U}_{j,m_j} \setminus A_j) < \varepsilon \sum_{j \geq 1} 2^{-j} = \varepsilon$.

(ii) Da M die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von kompakten Mengen M_j ist, haben wir $\mathrm{Vol}(A) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathrm{Vol}(A \cap M_j)$. Deshalb können wir eine meßbare Menge $A_0 \subset A$ finden mit $\mathrm{Vol}(A \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ und mit kompakter Abschließung $\bar{A}_0$ finden, indem wir $A_0 = A \cap M_j$

für ein geeignetes j setzen. Nach (i) gibt es eine offene Menge $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{U} \supset M \setminus A_0$ und $\mathrm{Vol}\,(\mathcal{U} \setminus (M \setminus A_0)) < \varepsilon/2$. Die abgeschlossene Menge $B = M \setminus \mathcal{U} \subset A_0 \subset \bar{A}_0$ ist kompakt und $A_0 \setminus B = \mathcal{U} \setminus (M \setminus A_0)$, also $\mathrm{Vol}\,(A_0 \setminus B) < \varepsilon/2$, woher $\mathrm{Vol}\,(A \setminus B) < \varepsilon$.

q.e.d.

LEMMA 6. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \geq 1$ reell. Dann ist $C_0^\infty(M)$ ein dichter Unterraum von $L^p(M,g)$ (mit der L^p-Norm).

<u>Beweis</u>. Sei $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ eine disjunkte Zerlegung von M in kleine meßbare Mengen A_i, χ_{A_i} die charakteristische Funktion von A_i. Da, für $f \in L^p(M,g)$, $\|f\|_{L^p}^p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|f\chi_{A_i}\|_{L^p}^p$, liegen endliche Summen der $f\chi_{A_i}$ beliebig dicht bei f (im Sinne der L^p-Norm). Da die L^p-Abschließung von $C_0^\infty(M)$ ein Vektorraum ist, genügt es zu beweisen, das jedes $f\chi_{A_i}$ mit $C_0^\infty(M)$-Funktionen L^p-approximiert werden kann. $f\chi_{A_i}$ hat den Träger in einem relativ kompakten Koor-

dinatensystem. Wegen der lokalen Unabhängigkeit der L^p-Norm, bis auf Äquivalenz, von der Metrik, dürfen wir also annehmen, daß $M = B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball ist und g die euklidische Metrik. Wir wollen jedes $f \in L^p(B)$ mit $C_0^\infty(B)$-Funktionen approximieren. Da $f = f_+ - f_-$, $f_+, f_- \geq 0$, $|f_\pm| \leq |f|$ (also $f_\pm \in L^p(B)$), dürfen wir $f \geq 0$ annehmen. Dann gibt es einfache Funktionen $f_m \geq 0$ mit $f_m \leq f_{m+1}$ und $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ punktweise (Aufgabe $\overline{\underline{VII}}$. 1). Wegen $|f_m| = f_m \leq f \in L^p(B)$ folgt es aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, daß $f_m \to f$ in $L^p(B)$. Es genügt also zu zeigen, daß für jede meßbare Menge $A \subset B$, χ_A mit Funktionen in $C_0^\infty(B)$ approximiert werden kann. Wählen wir offene Mengen $\mathcal{U}_m$ und kompakte Mengen B_m mit $B_m \subset A \subset \mathcal{U}_m$, $B_m \subset B_{m+1}$, $\mathcal{U}_{m+1} \subset \mathcal{U}_m$ und $\mathrm{Vol}(\mathcal{U}_m \setminus B_m) < \frac{1}{m}$ (vgl. Lemma 5) und Funktionen $f_m \in C_0^\infty(B)$ mit $0 \leq f_m \leq 1$, $f_m = 1$ auf B_m und $f_m = 0$ außerhalb $\mathcal{U}_m$ (Aufgabe $\overline{\underline{VII}}$. 2).

Also

$$\|\chi_A - f_m\|^p_{L^p} = \int_{U_m \setminus B_m} |\chi_A - f_m|^p \leq$$

$$\leq \int_{U_m \setminus B_m} 2^p = 2^p \operatorname{Vol}(U_m \setminus B_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

q. e. d.

LEMMA 7. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in L^p(M,g)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $f = 0$ fast überall

(ii) Für jedes $\varphi \in C_0^\infty(M)$, $\int_M f\varphi = 0$.

Beweis: (i) $\to$ (ii): trivial.

(ii) $\to$ (i): Sei $A \subset M$ meßbar mit $\operatorname{Vol}(A) < \infty$. Wegen Lemma 5 gibt es eine Folge B_m von kompakten Mengen und eine Folge U_m von offenen Mengen mit $B_m \subset A \subset U_m$, $B_m \subset B_{m+1}$, $U_{m+1} \subset U_m$ und $\operatorname{Vol}(U_m \setminus B_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Wählen wir $\varphi_m \in C_0^\infty(M)$ mit $0 \leq \varphi_m \leq 1$, $\varphi_m = 1$ auf B_m, $\varphi_m = 0$ außerhalb U_m (Aufgabe VII. 2). Also $\operatorname{Vol}(\bigcap_m U_m \setminus B_m) = 0$, woher $\lim_{m\to\infty} |\int_{U_m \setminus B_m} f\varphi_m| \leq$

$\leq \lim_m \int_{U_m \setminus B_m} |f| = 0$, da f auf U_m integrierbar ist ($\operatorname{Vol}(U_m) < \infty$). Deshalb ist

$$0 = \lim_m \int_M f\varphi_m = \lim_m \left(\int_{B_m} f + \int_{U_m \setminus B_m} f\varphi_m \right) =$$

$= \lim_m \int_{B_m} f = \int_A f$. Also, $\int_A f = 0$ für jede meßbare Menge A mit $\operatorname{Vol}(A) < \infty$. Wäre $f \neq 0$ in einer Menge positiven Maßes, so findet man leicht $\varepsilon > 0$ und eine meßbare Menge A mit $0 < \operatorname{Vol}(A) < \varepsilon$ und $f \leq -\varepsilon$ (oder $f \geq \varepsilon$) auf A. Dann ist $\int_A f \leq -\varepsilon \operatorname{Vol}(A) < 0$ (bzw. $\int_A f \geq \varepsilon \operatorname{Vol}(A) > 0$). Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

q. e. d.

Sei nun (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \geq 1$ eine reelle Zahl, $k \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren den <u>Sobolew-Raum</u> $L^p_k(M,g)$ als die (abstrakte) Komplettierung von $C_0^\infty(M)$ bezüglich der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{L^p_k}$. $L^p_k(M,g)$ besteht also aus allen Äquivalenzklassen von $\|\cdot\|_{L^p_k}$-Cauchy-Folgen $f_m \in C^\infty_0(M)$ bezüglich der Relation $\lim_{m\to\infty} \|f_m - \tilde{f}_m\|_{L^p_k} = 0$. Die Norm der Äquivalenzklasse der Folge f_m ist $\lim_{m\to\infty} \|f_m\|_{L^p_k}$. Mit dieser Norm ist $L^p_k(M,g)$ ein Banach-Raum, der $(C^\infty_0(M), \|\cdot\|_{L^p_k})$ isometrisch als einen dichten Unterraum enthält, wobei die Inklusion $C^\infty_0(M) \to L^p_k(M,g)$ jedem f die Äquivalenzklasse der konstanten Cauchy-Folge $f_m = f$ zuordnet. Die Norm von $L^p_k(M,g)$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\|\cdot\|_{L^p_k}$.

Für $k \geq l$ ist die Identitätsabbildung $(C^\infty_0(M), \|\cdot\|_{L^p_k}) \to (C^\infty_0(M), \|\cdot\|_{L^p_l})$ stetig. Sie besitzt also eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung $L^p_k(M,g) \to L^p_l(M,g)$, die wir die Inklusion nennen.

LEMMA von Rellich: Ist M kompakt und $k > l$, so ist die Inklusion $L^p_k(M,g) \to L^p_l(M,g)$ ein kompakter Operator im üblichen Sinne: das Bild jeder beschränkten Folge in $L^p_k(M,g)$ enthält eine $\|\cdot\|_{L^p_l}$-

-konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $f_m \in L^p_k(M,g)$ eine beschränkte Folge. Man finde $\tilde{f}_m \in C^\infty_0(M)$ mit $\|f_m - \tilde{f}_m\|_{L^p_k} < \frac{1}{m}$. Wegen Folgerung 7 konvergiert eine Teilfolge von $\tilde{f}_m$ in $L^p_l(M,g)$. Da unsere Inklusion stetig ist, muß auch die entsprechende Teilfolge von f_m es tun. q. e. d.

SATZ 12. Für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) und $k \geq l \geq 0$ ist die Inklusion $L^p_k(M,g) \to L^p_l(M,g)$ injektiv.

Beweis. Da unsere Inklusion die Komposition $L^p_k \to L^p_{k-1} \to \ldots \to L^p_{l+1} \to L^p_l$ der Inklusionen ist, dürfen wir $l = k-1$ voraussetzen ($k \geq 1$). Ein Element $f \in L^p_k(M,g)$ wird durch eine $\|\cdot\|_{L^p_k}$-Cauchy-Folge $f_m \in C^\infty_0(M)$ dargestellt; ist das L^p_{k-1}-Bild von f gleich 0, so ist $\|f_m\|_{L^p_{k-1}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. In jedem festen relativ kompakten Koordinatensystem $(\mathcal{U}, (x^i))$ gilt das gleiche bezüglich der euklidischen Metrik auf $\mathcal{U}$ (für die Einschränkungen der f_m auf $\mathcal{U}$), d. h.

$\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s} f_m$ ist eine Cauchy-Folge in $L^p(U)$ $(s \le k)$ und $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s} f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ in $L^p(U)$ (falls $0 \le s \le k-1$). Für beliebige feste $i_1, \dots, i_k$ ist $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} h_{i_1\dots i_k}$ in $L^p(U)$.

Wir behaupten, daß $h_{i_1\dots i_k} = 0$ fast überall in U. Ist nämlich $\varphi \in C_0^\infty(U)$, so $\int h_{i_1\dots i_k}\varphi =$ $= \lim_m \int \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} f_m \cdot \varphi = -\lim_m \int \partial_{i_2}\cdots\partial_{i_k} f_m \cdot \partial_{i_1}\varphi =$ $= 0$ (Lebesgue-Integration). Deshalb ist $h_{i_1\dots i_k} = 0$ fast überall in U (Lemma 7).

Die Funktionen $|\nabla^k f_m|$ bilden eine L^p-Cauchy-Folge auf M, also $|\nabla^k f_m| \to h$ in $L^p(M,g)$. Was wir eben bewiesen haben, ist $h = 0$ fast überall in U, für jedes U, woher $h = 0$ fast überall in M. Also $\|f_m\|_{L^p_k} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, woher $f = 0$ in $L^p_k(M,g)$.

q.e.d.

LEMMA 8. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f_m \in C_0^k(M)$ eine Folge von C^k-Funktionen, deren Träger in

einer gemeinsamen kompakten Menge $A \subset M$ liegen. Bilden die f_m eine Cauchy-Folge bezüglich der C^k-Norm, so konvergieren sie bezüglich dieser Norm gegen eine Funktion $f \in C_0^k(M)$.

<u>Beweis</u>. Sei zunächst $A \subset U$, wobei $(U, (x^i))$ ein relativ kompaktes Koordinatensystem ist. Für $s \le k$ und feste $i_1, \dots, i_s$, bilden also die Funktionen $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s} f_m$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremum-Norm, d.h. $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_s} f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} h_{i_1\dots i_s}$ gleichmäßig in U, wobei $h_{i_1\dots i_s}$ stetige Funktionen sind. Für $s = 0$ ist die stetige Funktion $f = h$ global auf M definiert (da f_m auch eine C^0-Cauchy-Folge ist). Wir dürfen annehmen, daß $U = (0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ und (x^i) die kartesischen Koordinaten sind. Wir behaupten dann daß, falls $F_m : U \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen sind mit $F_m \to F$ und $\partial_i F_m \to H_i$, $i = 1, \dots, n$, gleichmäßig auf U, so $F \in C^1(U)$ und $\partial_i F = H_i$, $i = 1, \dots, n$. Für $n = 1$ ($\partial_i F_m = F_m'$) folgt es daraus, daß $F_m(t) =$

$= F_m(t_0) + \int_{t_0}^{t} F_m'$, woher $F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_1$, d. h. $F \in C^1$ und $F' = H_1$. Für beliebiges n kann man F_m und F auf ein zur i-ten Achse paralleles Interval einschränken, woher, nach dem 1-dimensionalen Fall, $\partial_i F$ existiert und stimmt mit H_i überein. Deshalb ist f C^k-differenzierbar in U und $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f = h_{i_1 \dots i_s}$ $(s \leq k)$, d. h. $f_m \to f$ auf U bezüglich der (euklidischen) C^k-Norm.

Nimmt man nun endlich viele C^∞-Funktionen φ_α mit kleinen Trägern und mit $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ auf A, so bilden die $\varphi_\alpha f_m$ eine C^k-Cauchy-Folge in einem relativ kompakten Koordinatensystem, woher $\varphi_\alpha f_m \to \varphi_\alpha f$ in $C_0^k(M)$ und $f_m = \sum_\alpha \varphi_\alpha f_m \to \sum_\alpha \varphi_\alpha f = f$ in $C_0^k(M)$ (man bemerke, daß Träger$(f) \subset A$).

q. e. d.

Wegen Satz 12 kann man die Sobolew-Räume $L_k^p(M,g)$ kanonisch als Unterräume von $L^p(M,g) = L_0^p(M,g)$ auffassen

(die letzten zwei Räume sind gleich wegen Lemma 6). Bei dieser Inklusion entspricht $C_0^\infty(M) \subset L_k^p(M,g)$ identisch dem Raum $C_0^\infty(M) \subset L^p(M,g)$.

FOLGERUNG 11. Sei (M,g) kompakt. Dann ist der Raum $C^k(M)$ vollständig bezüglich der C^k-Norm.

q. e. d.

SATZ 13 (Lemma von Sobolew). Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $n = \dim M$, $p > 1$ reell, $k, s \geq 0$ natürliche Zahlen mit

$$k > \frac{n}{p} + s.$$

Dann

(i) Für jede relativ kompakte offene Menge $U \subset M$ gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{C^s} \leq C \|f\|_{L_k^p}$$

für alle $f \in C_0^\infty(U)$.

(ii) $L_k^p(M,g) \subset C^s(M)$; d. h. jedes Element $f \in L_k^p(M,g)$, das man kanonisch als eine Funktion $f \in L^p(M,g)$ betrachtet, stimmt fast überall mit einer C^s-Funktion überein.

(iii) Ist M kompakt, so ist die Inklusion $L^p_k(M,g) \to C^s(M)$ stetig, wobei $C^s(M)$ mit der C^s-Norm versehen ist.

Beweis. (i) Wegen Satz 11 genügt es die Abschätzung $\|f\|_{C^s} \le C\|f\|_{L^p_k}$ für $f \in C_0^\infty(B)$ zu beweisen, wobei $M = B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball vom Radius $\frac{1}{2}c_0$ ist und g die euklidische Metrik. Sei also $f \in C_0^\infty(B)$, $y_0 \in B$, $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ein fester Einheitsvektor. Da $y_0 + c_0 v$ außerhalb des Trägers von f liegt, haben wir, wegen der partiellen Integration in $\mathbb{R}$,

$$f(y_0) = f(y_0) - f(y_0 + c_0 v) = -\int_0^{c_0} \frac{d}{dt} f(y_0+tv)\,dt =$$

$$= -\int_0^{c_0} \left(\frac{d}{dt} t\right) \frac{d}{dt} f(y_0+tv)\,dt = \int_0^{c_0} t \frac{d^2}{dt^2} f(y_0+tv)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{c_0} t^2 \frac{d^3}{dt^3} f(y_0+tv)\,dt = \dots = \frac{(-1)^l}{(l-1)!}\int_0^{c_0} t^{l-1} \frac{d^l}{dt^l} f(y_0+tv)\,dt.$$

Da $\frac{d^l}{dt^l} f(y_0+tv) = v^{i_1}\dots v^{i_l}\,\partial_{i_1}\dots\partial_{i_l} f(y_0+tv)$ und $|v^i| \le 1$, gilt also

$$|f(y_0)| \le \frac{1}{(l-1)!} \sum_{i_1,\dots,i_l} \int_0^{c_0} t^{l-1} |\partial_{i_1}\dots\partial_{i_l} f(y_0+tv)|\,dt.$$

Integriert man hier die beiden Seiten über $v \in S^{n-1}$ und verwendet man die sphärische Integrationsformel (Aufgabe $\underline{\text{VI}}$. 7.(ii)), so ist

$$|f(y_0)|\cdot \mathrm{Vol}(S^{n-1}) \le \frac{1}{(l-1)!} \sum_{i_1,\dots,i_l} \int_{|z|\le c_0} |z|^{l-n} |\partial_{i_1}\dots\partial_{i_l} f(y_0+z)|\,dz$$

wobei $z = tv$, $t = |z|$. Wegen der Hölderschen Ungleichung mit $q = \frac{p}{p-1}$ ist nun

$$|f(y_0)| \le C\Big(\int_{|z|\le c_0} |z|^{q(l-n)} dz\Big)^{1/q} \sum_{i_1,\dots,i_l} \|\partial_{i_1}\dots\partial_{i_l} f\|_{L^p}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist endlich genau dann, wenn $q(l-n) > -n$ (Aufgabe $\underline{\text{VI}}$. 7.(iii)), d. h. wenn $l > \frac{q-1}{q} n = \frac{n}{p}$. Ist also $l > \frac{n}{p}$, so ist für alle $f \in C_0^\infty(B)$

$$\sup |f| \le C \sum_{i_1,\dots,i_l} \|\partial_{i_1}\dots\partial_{i_l} f\|_{L^p}$$

mit einer (vielleicht anderen) Zahl C. Sei nun $k > \frac{n}{p} + s$, $0 \le j \le s$, so daß für $l = k-j$, $l > \frac{n}{p}$. Die obige Ungleichung gibt, für die Funktion $\partial_{m_1}\cdots\partial_{m_j} f$,

$$\sup|\partial_{m_1}\cdots\partial_{m_j} f| \leq C \sum_{i_1,\dots,i_{k-j}} \|\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_{k-j}}\partial_{m_1}\cdots\partial_{m_j} f\|_{L^p} \leq$$

$$\leq \tilde{C}\,\|f\|_{L^p_k} \quad \text{, woher}$$

$$\|f\|_{C^s} \leq \tilde{\tilde{C}}\,\|f\|_{L^p_k}.$$

Somit ist (i) bewiesen.

(ii) Sei $f \in L^p_k(M,g)$, $f_m \in C^\infty_0(M)$ mit $f_m \to f$ in $L^p_k(M,g)$, $\varphi \in C^\infty_0(M)$ fest. Dann haben alle φf_m Träger in einer offenen, relativ kompakten (gemeinsamen) Menge $\mathcal{U}$ und bilden eine L^p_k-Cauchy-Folge. Wegen (i) ist φf_m auch eine C^k-Cauchy-Folge, also (Lemma 8) $\varphi f_m \to h \in C^k_0(M)$ in $C^k_0(M)$. Da aber $f_m \to f$ in L^p, ist $\varphi f_m \to \varphi f$ in L^p, und andererseits $\varphi f_m \to h$ in L^p, woher $h = \varphi f$ fast überall. Da $\varphi \in C^\infty_0(M)$ beliebig war, muß f fast überall mit einer C^k-Funktion übereinstimmen.

(iii) ist eine direkte Konsequenz von (i).

q. e. d.

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ein Differentialoperator der Ordnung k. Wir behaupten, daß es genau einen Differentialoperator $P^*: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ gibt mit

$$\int_M Pf\cdot h = \int_M f\cdot P^*h$$

für alle $f, h \in C^\infty_0(M)$. Der Operator P^* hat auch die Ordnung k und das k-Symbol $\sigma_{P^*,k} = (-1)^k \sigma_{P,k}$. Tatsächlich, man hat

$$Pf = \underset{k}{\alpha}^{i_1\cdots i_k} f_{,i_1\cdots i_k} + \dots + \underset{1}{\alpha}^{i} f_{,i} + \underset{0}{\alpha}\cdot f,$$

wobei $\underset{k}{\alpha}, \dots, \underset{0}{\alpha}$ symmetrische Tensorfelder vom Typ $(k,0), \dots,$ bzw. $(0,0)$ sind (Satz 9).

Integriert man den Ausdruck

$$\int_M Pf\cdot h = \int_M \left(\underset{k}{\alpha}^{i_1\cdots i_k} f_{,i_1\cdots i_k} + \dots + \underset{0}{\alpha}\cdot f\right) h$$

so oft partiell, bis man alle Differentiationen von f los wird, so entsteht für P^*h die Formel $P^*h = (-1)^k \underset{k}{\alpha}^{i_1\cdots i_k} h_{,i_1\cdots i_k} + \underset{k-1}{\beta}^{i_1\cdots i_{k-1}} \times$

$\times h_{,i_1\cdots i_{k-1}} + \dots + \underset{1}{\beta}^{i} h_{,i} + \underset{0}{\beta}\cdot h$, was beweist, daß P^* existiert und daß es ein Differentialoperator der Ordnung k mit dem richtigen Symbol ist. Eindeutigkeit: wegen der Definition ist P^*h für alle $h \in C_0^\infty(M)$ eindeutig bestimmt*, was auch $P^*: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ bestimmt (Seite 131). Den Operator P^* nennt man den <u>formal</u> <u>adjungierten</u> Operator zu P.

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) definieren wir die C^∞-<u>Konvergenz</u> im Raum $C_0^\infty(M)$: $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ in C^∞ genau dann, wenn die Träger der f_m in einer gemeinsamen kompakten Menge liegen und $\|f_m - f\|_{C^k} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ für alle $k \geq 0$. Man sieht leicht, daß die C^∞-Konvergenz von der Metrik g nicht abhängt (dasselbe Argument wie bei Satz 11). Die Einschränkung $P: C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$ jedes Differentialoperators P ist C^∞-stetig. Hat nämlich P die Ordnung l, so ist $Pf = \underset{l}{\alpha}^{i_1 \dots i_l} \times f_{i_1 \dots i_l} + \dots + \underset{0}{\alpha} f$ und, wegen der

*Lemma 7

Leibniz-Regel, gibt es für jedes $k \geq 0$ und jede kompakte Menge $A \subset M$ eine Konstante C mit

$$\|Pf\|_{C^k} \leq C\|f\|_{C^{k+l}}$$

für alle $f \in C_0^\infty(M)$ mit $\text{Träger}(f) \subset A$.

Unter einer <u>Distribution</u> auf der Mannigfaltigkeit M verstehen wir ein C^∞-stetiges lineares Funktional

$$v: C_0^\infty(M) \to \mathbb{R}.$$

Der Begriff Distribution ist, sowie die C^∞-Konvergenz, von der Riemannschen Metrik auf M unabhängig. Die Distributionen auf M bilden einen Vektorraum, den wir mit $C_0^\infty(M)^*$ bezeichnen.

<u>Beispiele.</u>

(i) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, $L^1_{loc}(M) = L^1_{loc}(M,g)$ der Raum aller <u>lokal</u> <u>integrierbaren</u> Funktionen auf M (d.h. aller meßbaren Funktionen f mit $\int_A |f| < \infty$ für jede kompakte Menge $A \subset M$; $L^1_{loc}(M)$ ist offenbar von g unabhängig und

$L^p(M,g) \subset L^1_{loc}(M)$ für jedes $p \geq 1$). Es gibt eine natürliche (von g abhängige) injektive lineare Abbildung

$$L^1_{loc}(M) \ni f \to v_f \in C_0^\infty(M)^*$$

mit

$$v_f(\varphi) = \int_M f\varphi$$

für $\varphi \in C_0^\infty(M)$ (C^∞-Stetigkeit von v_f ist selbstverständlich: Ist $\varphi_m \to \varphi$ gleichmäßig, Träger$(\varphi_m) \subset A$, A kompakt, so

$$\left|\int_M (f\varphi_m - f\varphi)\right| = \int_A |f\varphi_m - f\varphi| \leq \sup|\varphi_m - \varphi| \cdot \int_A |f| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0).$$

Diese Abbildung ist injektiv wegen Lemma 7 (wobei man f auf eine relativ kompakte offene Untermannigfaltigkeit einschränkt). Von nun an werden wir, bei einer festen Metrik g, $v_f = f$ schreiben, d. h. lokal integrierbare Funktionen als Distributionen betrachten: $L^1_{loc}(M) \subset C_0^\infty(M)^*$.

(ii) Sei $y \in M$. Wir definieren die Diracsche δ-Distribution (Delta-"Funktion"

von Dirac), $\delta_y \in C_0^\infty(M)^*$, durch

$$\delta_y(\varphi) = \varphi(y)$$

für $\varphi \in C_0^\infty(M)$. δ_y ist keine lokal-integrierbare Funktion (Aufgabe VIII. 2).

(iii) Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ein Differentialoperator. Betrachtet man $C^\infty(M)$ als einen Unterraum von $C_0^\infty(M)^*$ (wegen $C^\infty(M) \subset L^1_{loc}(M) \subset C_0^\infty(M)^*$), so besitzt P eine natürliche lineare Fortsetzung

$$P: C_0^\infty(M)^* \to C_0^\infty(M)^*$$

wobei

$$(Pv)(\varphi) = v(P^*\varphi), \quad v \in C_0^\infty(M)^*, \varphi \in C_0^\infty(M)$$

(vgl. Aufgabe VIII. 3). Zum Beispiel, da $\Delta^* = \Delta$, haben wir

$$(\Delta\delta_y)(\varphi) = (\Delta\varphi)(y).$$

Im Raum $C_0^\infty(M)^*$ definieren wir die schwache Konvergenz der Distributionen: $v_m \to v$ wenn $v_m(\varphi) \to v(\varphi)$ für alle

$\varphi \in C_0^\infty(M)$. Bezüglich dieser Konvergenz ist jeder Differentialoperator $P: C_0^\infty(M)^* \to C_0^\infty(M)^*$ stetig. Ist z. B. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$ und, für $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} f(y/\varepsilon)$ (vgl. Beweis von Folgerung 7), so haben wir die schwache Konvergenz von Distributionen:

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \delta_0$$

(Aufgabe VIII. 4).

SATZ 14. (Die Ungleichung von Poincaré). Für jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) gibt es eine positive Zahl ε mit

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \varepsilon \int_M f^2$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ mit $\int_M f = 0$.

<u>Bemerkungen.</u>

a) Ist $f \in C^\infty(M)$ beliebig, so hat man $\int_M \left(f - \frac{1}{Vol(M)} \int_M f\right) = 0$. Deshalb ist

für unser ε und alle $f \in C^\infty(M)$

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \varepsilon \left[\int_M f^2 - \frac{1}{vol(M)} \left(\int_M f\right)^2 \right].$$

b) Sei $\lambda_1 = \lambda_1(M,g)$ die größte Zahl $\varepsilon > 0$ für die die Poincaré-Ungleichung gilt, d. h.

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} : f \in C^\infty(M), \right.$$

f nicht identisch 0, $\left.\int_M f = 0\right\}$. Wir erwarten, daß sich λ_1 als der kleinste positive Eigenwert von Δ erweisen wird (wir können es im Moment noch nicht beweisen).

"Empirische" Begründung: Glauben wir, daß die Eigenfunktionen von Δ linear-dicht in $L^2(M,g)$ liegen (Beweis später), so hat man Eigenwerte $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ und dazu L^2-orthonormale Eigenfunktionen $f_0 = 1, f_1, f_2, \ldots$, die eine Hilbertbasis von $L^2(M,g)$ bilden. Ist $f \in C^\infty(M)$ mit $\int_M f = 0$, so $f = \sum_{i=1}^\infty a_i f_i$, $a_i \in \mathbb{R}$

(eine L^2-konvergente Reihe) und $\Delta f =$
$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i f_i$ (wobei wir uns um die Konvergenzfrage nicht kümmern), woher

$$\int_M |\nabla f|^2 = \int_M f \Delta f = \langle f, \Delta f\rangle_{L^2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \lambda_1 \int_M f^2,$$

und für $f = f_1$ haben wir die Gleichung:

$$\int_M |\nabla f_1|^2 = \int_M f_1 \Delta f_1 = \lambda_1 \int_M f_1^2.$$

c) Satz 14 könnte auch direkt nach Lemma 6 bewiesen werden (was danach kommt, brauchen wir für den folgenden Beweis nicht).

Beweis. Gäbe es kein solches ε, so könnten wir eine Folge $f_m \in C^\infty(M)$ finden mit $\int_M f_m = 0$, $\|f_m\|_{L^2} = 1$ und $\int_M |\nabla f_m|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Dann ist aber die Folge f_m auch L_1^2-beschränkt; wegen des Lemmas

von Rellich kann man also annehmen, daß $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ in $L^2(M,g)$ für ein gewisses $f \in L^2(M,g)$, indem man f_m durch eine geeignete Teilfolge ersetzt.

Sei $(U,(x^i))$ ein relativ kompaktes Koordinatensystem in M. Man darf annehmen daß $U = (0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ ist. Sind f_m und f auf U eingeschränkt, so hat man $f \in L^2(U)$, $f_m \to f$ in $L^2(U)$ und

$$\int_M |\nabla f_m|^2 = \int_M \langle df_m, df_m\rangle \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

wobei wir nun auf $U = (0,1)^n$ die euklidische Metrik und das Lebesgue-Integral betrachten (dies ist möglich wegen der lokalen Abschätzungen für die L^2-Normen und Integrale, die verschiedenen Metriken entsprechen).

Es ist also $\|\partial_i f_m\|_{L^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, $i = 1, \dots, m$, woher, für alle $\varphi \in C_0^\infty((0,1)^n)$, $\int_{(0,1)^n} f \partial_i \varphi =$
$$= \lim_m \int_{(0,1)^n} f_m \cdot \partial_i \varphi = -\lim_m \int_{(0,1)^n} \partial_i f_m \cdot \varphi = 0.$$

Lemma: Sei $f \in L^2((0,1)^n)$ mit
$$\int_{(0,1)^n} f\, \partial_i \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((0,1)^n) \text{ und}$$
$i = 1, \dots, n$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f = c$ fast überall. [Da ∂_i ein Differentialoperator mit $\partial_i^* = -\partial_i$ ist, bedeutet dies folgendes: eine L^2-Funktion f, die als Distribution $\partial_i f = 0$ hat, $i = 1, \dots, n$, muß fast überall konstant sein].

Beweis des Lemmas: Induktion bezüglich n.
Für $n = 1$, haben wir zwei Linearfunktionale $\varphi \to \int_0^1 f\varphi$, $\varphi \to \int_0^1 \varphi$ auf $C_0^\infty((0,1))$.
Liegt φ im Kern des zweiten Funktionals, so gibt es $\psi \in C_0^\infty((0,1))$ mit $\varphi = \psi'$, also $\int_0^1 f\varphi = \int_0^1 f\psi' = 0$, d.h. φ muß auch im Kern des ersten Funktionals liegen.
Daher (lineare Algebra!) muß das erste Funktional ein konstantes Vielfaches des zweiten sein: $\int_0^1 f\varphi = c\int_0^1 \varphi$, $c \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$.

$f - c$ ist also L^2-orthogonal zu $C_0^\infty((0,1))$ und (Lemma 6) $f = c$ fast überall.
Induktiver Schritt: Setzen wir voraus, daß das Lemma in der Dimension $n-1$ gilt $(n \geq 2)$.
Sei $F(x^1) = \int_{(0,1)^{n-1}} |f(x^1, \dots, x^n)|^2 dx^2 \dots dx^n$.
Nach dem Satz von Fubini ist $F(x^1)$ für fast alle $x^1 \in (0,1)$ endlich und $F \in L^1((0,1))$.
Für $\varphi \in C_0^\infty((0,1)^{n-1})$ ist die Funktion $(x^1, \dots, x^n) \to f(x^1, \dots, x^n)\varphi(x^2, \dots, x^n)$ integrierbar (weil $L^2 \subset L^1$) und, wegen des Satzes von Fubini, ist
$$f_\varphi(x^1) = \int_{(0,1)^{n-1}} f(x^1 \dots x^n)\varphi(x^2, \dots, x^n)dx^2 \dots dx^n$$
für fast alle $x^1 \in (0,1)$ definiert. Die Schwarzsche Ungleichung gibt
$$|f_\varphi(x^1)|^2 \leq \|\varphi\|_{L^2}^2 \cdot F(x^1)$$
d.h., $f_\varphi \in L^2((0,1))$. Ist $\psi \in C_0^\infty((0,1))$, so $\int_0^1 f_\varphi \cdot \psi' = \int_{(0,1)^n} f(x^1, \dots, x^n)\, \partial_1[\psi(x^1)\varphi(x^2, \dots x^n)]dx^1 \dots dx^n = 0$, woher (vgl. den Fall $n = 1$!)
$$f_\varphi(x^1) = c_\varphi$$

für ein gewisses $c_\varphi \in \mathbb{R}$ und fast alle $x^1 \in (0,1)$.

Für fast alle $x^1 \in (0,1)$ ist die Funktion $f_{x^1} : (0,1)^{n-1} \to \mathbb{R}$ mit $f_{x^1}(x^2 \ldots x^n) = f(x^1 \ldots x^n)$ in $L^2((0,1)^{n-1})$ (weil $F(x^1)$ endlich). Wir behaupten, daß $\int_{(0,1)^{n-1}} f_{x^1} \cdot \partial_i \chi = 0$ für $i \geq 2$ und alle $\chi \in C_0^\infty((0,1)^{n-1})$.

Dieses Integral ist nämlich, als Funktion von x^1, in $L^2((0,1))$ (Schwarzsche Ungleichung mit $F \in L^1((0,1))$) und, für $\psi \in C_0^\infty((0,1))$, $\int_0^1 \left(\int_{(0,1)^{n-1}} f_{x^1} \partial_i \chi \right) \psi = 0$, weil $\partial_i \chi \cdot \psi = \partial_i(\chi \psi)$, $i \geq 1$; wir können also Lemma 6 anwenden. Da $\int_{(0,1)^{n-1}} f_{x^1} \cdot \partial_i \chi = 0$ für alle χ und $i \geq 2$, muß es für fast jedes x^1 ein $C_{x^1} \in \mathbb{R}$ geben mit

$$f_{x^1} = C_{x^1} \text{ fast überall in } (0,1)^{n-1}.$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty((0,1)^{n-1})$ mit $\int_{(0,1)^{n-1}} \varphi = 1$.

Also ist, für fast alle x^1,

$$c_\varphi = f_\varphi(x^1) = \int_{(0,1)^{n-1}} f_{x^1} \cdot \varphi = C_{x^1} \int \varphi = C_{x^1}$$

woher

$$f(x^1, \ldots, x^n) = C_{x^1} = c_\varphi \in \mathbb{R}$$

für fast alle $x^1, \ldots, x^n$. Somit ist das Lemma bewiesen.

<u>Beweis</u> von Satz 14 (fortgesetzt). Wegen des Lemmas, ist $f = c = c_{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}$ fast überall in $\mathcal{U}$. Da unsere Mengen $\mathcal{U}$ ganz M überdecken und die Konstanten $c_{\mathcal{U}}$ in den Durchschnitten der entsprechenden Mengen übereinstimmen müssen, ist $f = c \in \mathbb{R}$ fast überall in M. Da aber $f_m \to f$ in L^2 und $\|f_m\|_{L^2} = 1$, $\int_M f_m = \langle f_m, 1 \rangle_{L^2} = 0$, ist auch $\|c\|_{L^2} = 1$ und $\int_M c = 0$, was für eine Konstante c nicht vorkommen kann. Mit diesem Widerspruch ist der Satz bewiesen.

Versuchen wir nun, für eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g), den ersten positiven Eigenwert des Laplace-Operators Δ zu finden. Erwartungsgemäß soll es die positive Zahl

$$\lambda_1 = \inf\{\int_M |\nabla f|^2 : f\in C^\infty(M), \|f\|_{L^2}=1, \int_M f=0\}$$

sein. Es gibt bestimmt eine Folge $f_m \in C^\infty(M)$ mit $\|f_m\|_{L^2}=1$, $\int_M f_m = 0$ und

$$\int_M |\nabla f_m|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda_1 .$$

Die Folge f_m ist also L^2_1-beschränkt und wir dürfen annehmen, indem wir zu einer Teilfolge übergehen (Lemma von Rellich), daß $f_m \to f \in L^2(M,g)$ in $L^2(M,g)$, woher $\|f\|_{L^2}=1$ (f ist also nicht-trivial!) und $\int_M f = 0$. Im Vektorraum

$V = \{\varphi\in C^\infty(M) : \int_M \varphi = 0\}$ ist die symmetrische Bilinearform $B(\varphi, h) =$
$= \int_M \langle\nabla\varphi,\nabla h\rangle - \lambda_1 \int_M \varphi h$ positiv semidefinit und

$$B(f_m, f_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Deshalb ist (Aufgabe $\boxed{\text{VIII}}$.5)

$$B(f_m,\varphi) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

für alle $\varphi\in V$. Wir haben also, für $\varphi\in V$,

$$\int_M f(\Delta\varphi - \lambda_1\varphi) = \lim_m \int_M f_m(\Delta\varphi-\lambda_1\varphi) =$$

$= \lim_m B(f_m,\varphi) = 0$. Dasselbe gilt für alle $\varphi \in C^\infty(V)$ (weil $\varphi = \varphi_0 + c$, $\varphi_0\in V$, $c\in\mathbb{R}$, und $\int_M f = 0$). Da $(\Delta - \lambda\cdot Id)^* =$
$= \Delta - \lambda\cdot Id$, haben wir also

$$\Delta f = \lambda_1 f$$

wobei Δf den Laplace-Operator der Distribution f bezeichnet. Wir haben also eine Distributions-"Eigenfunktion" $f\in L^2(M,g)$ (mit $\|f\|_{L^2}=1$) von Δ für den "Eigenwert" λ_1 gefunden. Leider sind wir noch nicht imstande zu schließen, daß f eine C^∞-Funktion ist.

Bemerkung. Man kann leicht beweisen, daß unser f in $L^2_1(M,g)$ liegen muß (das hilft uns aber nicht weiter). Wir haben nämlich $f_m \to f$ in $L^2(M,g)$ und $\|f_m\|_{L^2_1} \leq C$. Da $L^2_1(M,g)$ bis auf Äquivalenz der Normen ein Hilbertraum ist (s. unten), gibt es $h \in L^2_1(M,g)$ mit $f_m \to h$ schwach in $L^2_1(M,g)$ (falls man f_m durch eine Teilfolge ersetzt, s. Aufgabe $\overline{\text{VIII}}$.6.(v)). Da die Inklusion $L^2_1 \to L^2$ stetig ist, ist auch $f_m \to h$ schwach in $L^2(M,g)$ (Aufgabe $\overline{\text{VIII}}$.6.(iii)). Da andererseits $f_m \to f$ schwach in $L^2(M,g)$, haben wir $f = h \in$ $\in L^2_1(M,g)$ (Aufgabe $\overline{\text{VIII}}$. 6.(i)).

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. In $C^\infty_0(M)$ haben wir das Skalarprodukt $\langle\,,\rangle_k$ ($k \geq 0$ natürlich) mit

$$\langle f,h\rangle_k = \sum_{s=0}^{k} \int_M g(\nabla^s f, \nabla^s h).$$

Die entsprechende Norm $\|\cdot\|_k$ ($\|f\|_k^2 =$ $= \sum_{s=0}^{k} \int_M |\nabla^s f|^2$) ist mit der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{L^2_k}$ in $C^\infty_0(M)$ äquivalent (für $a_s \geq 0$ ist $\left(\sum_{s=0}^{k} a_s\right)^2 = \sum_{s=0}^{k} a_s^2 + 2\sum_{0\leq s<l\leq k} a_s a_l \leq (k+1)\sum_{s=0}^{k} a_s^2$, da $2a_s a_l \leq$ $\leq a_s^2 + a_l^2$; andererseits, $\sum_{s=0}^{k} a_s^2 \leq \left(\sum_{s=0}^{k} a_s\right)^2$. Setzt man $a_s = \left(\int_M |\nabla^s f|^2\right)^{1/2}$, so $\|f\|_k \leq \|f\|_{L^2_k} \leq \sqrt{k+1}\,\|f\|_k$ für alle $f \in C^\infty_0(M)$). Deshalb kann man $L^2_k(M,g)$ statt mit $\|\cdot\|_{L^2_k}$, mit der äquivalenten Norm $\|\cdot\|_k$ betrachten (die die natürliche Fortsetzung von $\|\cdot\|_k$ in $C^\infty_0(M)$ ist), wodurch $L^2_k(M,g)$ zu einem Hilbertraum wird. Offensichtlich ist $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2}$ und $\|\cdot\|_k \leq \|\cdot\|_l$ wenn $k \leq l$.

Sei $k > 0$, $f \in L^2(M,g)$, $h \in L^2_k(M,g) \subset$ $\subset L^2(M,g)$. Da $\left|\int_M fh\right| \leq \|f\|_0 \|h\|_0 \leq \|f\|_0 \|h\|_k$, ist $L^2_k(M,g) \ni h \to \int_M fh \in \mathbb{R}$ ein stetiges Funktional auf $L^2_k(M,g)$. Bezeichnen wir mit $\|f\|_{-k}$ die Norm dieses Funktionals. Also

$$\|f\|_{-k} = \sup\left\{\frac{\left|\int_M fh\right|}{\|h\|_k} : h \in L^2_k(M,g),\ \|h\|_k \neq 0\right\},$$

woher $\|f\|_{-k} \leq \|f\|_0$ und $\|f\|_{-l} \leq \|f\|_{-k}$ falls $l \geq k > 0$, $f \in L^2(M,g)$. Da $C^\infty_0(M)$ dicht in $L^2_k(M,g)$ liegt, haben wir auch, für $f \in L^2(M,g)$

$$\|f\|_{-k} = \sup\left\{ \frac{|v_f(\varphi)|}{\|\varphi\|_k} : \varphi \in C_0^\infty(M),\ \varphi \text{ nicht identisch } 0 \right\},$$

wobei v_f die zu f entsprechende Distribution ist. $\|\cdot\|_{-k}$ ist eine Norm in $L^2(M,g)$ (aus $\|f\|_{-k}=0$, d.h. $\int_M f\varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M)$, folgt $f=0$ fast überall wegen Lemma 7). Sei nun $L^2_{-k}(M,g)$ die Komplettierung von $(L^2(M,g), \|\cdot\|_{-k})$. Da $(C_0^\infty(M), \|\cdot\|_{-k})$ dicht in $(L^2(M,g), \|\cdot\|_{-k})$ liegt (weil $(C_0^\infty(M), \|\cdot\|_0)$ dicht in $(L^2(M,g), \|\cdot\|_0)$ und $\|f\|_{-k} \leq \|f\|_0$ für $f \in L^2(M,g)$), ist $L^2_{-k}(M,g)$ auch die Komplettierung von $(C_0^\infty(M), \|\cdot\|_{-k})$.

Sei $(L^2_k(M,g))^*$ der Banach-Raum aller stetigen Funktionale auf $L^2_k(M,g)$ mit der Operator-Norm. Dann gibt es eine lineare Isometrie $F: L^2_{-k}(M,g) \to (L^2_k(M,g))^*$ mit

$$(F(f))(h) = \int_M fh \quad \text{falls } f \in L^2(M,g) \subset L^2_{-k}(M,g)$$

und $h \in L^2_k(M,g)$. Tatsächlich ist $F: (L^2(M,g), \|\cdot\|_{-k}) \to (L^2_k(M,g))^*$ isometrisch

(Definition von $\|\cdot\|_{-k}$!), woher es eine isometrische Fortsetzung $F: L^2_{-k}(M,g) \to (L^2_k(M,g))^*$ haben muß. Wir müssen nur beweisen, daß dieses F surjektiv ist. Da das Bild von F abgeschlossen ist (weil vollständig), brauchen wir nur zu zeigen, daß es dicht in $(L^2_k(M,g))^*$ liegt, z.B., daß $F(L^2(M,g))$ dicht ist. Ein Raum von stetigen Funktionalen auf dem Hilbertraum $L^2_k(M,g)$ ist dicht in $(L^2_k(M,g))^*$ genau dann, wenn $0 \in L^2_k(M,g)$ der einzige Vektor ist, der im Kern jedes Funktionals dieses Raumes liegt. Ist aber $h \in L^2_k(M,g)$ und $\int_M fh = 0$ für alle $f \in L^2(M,g)$, so $h=0$ fast überall (weil $h \in L^2(M,g)$), woher unsere Behauptung folgt.

Sei $l \geq k \geq 0$. Aus der Ungleichung $\|f\|_{-l} \leq \|f\|_{-k}$ für $f \in L^2(M,g)$ folgt, daß die Identitätsabbildung $L^2(M,g) \to L^2(M,g)$ eine (eindeutig bestimmte) stetige lineare Fortsetzung $L^2_{-k}(M,g) \longrightarrow L^2_{-l}(M,g)$ hat, die man die Inklusion nennt. Identifiziert man wie oben $L^2_{-k}(M,g) = (L^2_k(M,g))^*$, $L^2_{-l}(M,g) = (L^2_l(M,g))^*$

so ist diese Inklusion nichts anderes als die adjungierte Abbildung zur Inklusion $L^2_\ell(M,g) \to L^2_k(M,g)$ (weil die letzte auf $L^2(M,g)$ die Identität ist). Die Inklusion $L^2_{-k}(M,g) \to L^2_{-\ell}(M,g)$ ist also tatsächlich injektiv, weil $L^2_\ell(M,g) \to L^2_k(M,g)$ ein dichtes ($C^\infty_0(M)$ enthaltendes) Bild hat. Ist $\ell > k$ und M kompakt, so muß $L^2_{-k}(M,g) \to L^2_{-\ell}(M,g)$ ein kompakter Operator sein, da $L^2_\ell(M,g) \to L^2_k(M,g)$ kompakt ist (Aufgabe VIII, 7).

$L^2_{-k}(M,g)$ kann in natürlicher Weise als ein Unterraum von $C^\infty_0(M)^*$ betrachtet werden. Als stetige Funktionale auf $L^2_k(M,g)$ sind die Elemente von $L^2_{-k}(M,g)$ nämlich auch C^∞-stetige Funktionale auf $C^\infty_0(M)$, weil die Inklusion $C^\infty_0(M) \to L^2_k(M,g)$ offenbar stetig ist. Die Einschränkung dieser Inklusion $L^2_{-k}(M,g) \to C^\infty_0(M)^*$ auf $L^2(M,g) \subset L^2_{-k}(M,g)$ ist offenbar die uns schon bekannte Einbettung $L^2(M,g) \subset L^1_{loc}(M) \subset C^\infty_0(M)^*$. Ist $\ell \geq k \geq 0$

und betrachtet man $L^2_{-k}(M,g)$, $L^2_{-\ell}(M,g)$ in dieser Weise als Unterräume von $C^\infty_0(M)^*$, so entspricht die Inklusion $L^2_{-k}(M,g) \to L^2_{-\ell}(M,g)$ der mengentheoretischen Inklusion von Unterräumen (weil $L^2_{-k}(M,g) \to L^2_{-\ell}(M,g)$ nichts anderes ist, als die Einschränkung der Funktionale auf $L^2_k(M,g)$ auf den Unterraum $L^2_\ell(M,g)$). Außerdem ist die Inklusion $L^2_{-k}(M,g) \to C^\infty_0(M)^*$ stetig bezüglich der schwachen Konvergenz von Distributionen (weil aus der Konvergenz in $L^2_{-k}(M,g)$ die „punktweise" Konvergenz der Funktionale folgt). Wir haben also mengentheoretische Inklusionen

$$C^\infty_0(M) \subset \ldots \subset L^2_k(M,g) \subset \ldots \subset L^2(M,g) \subset \ldots$$
$$\ldots \subset L^2_{-k}(M,g) \subset \ldots \subset C^\infty_0(M)^*$$

von Unterräumen von $C^\infty_0(M)^*$, die stetig bezüglich der jeweiligen Konvergenzen sind.

Sei nun (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $s \in \mathbb{Z}$, $v \in C^\infty_0(M)^*$. Wir behaupten daß, falls $v \in L^2_s(M,g)$,

$$\|v\|_s = \sup\left\{ \frac{|v(\varphi)|}{\|\varphi\|_{-s}} : \varphi \in C^\infty_0(M), \varphi \text{ nicht identisch } 0 \right\}$$

(<u>Bemerkung</u>: Diese Formel für $\|v\|_s$ hat auch Sinn für beliebige Distributionen v, wobei jedoch passieren kann, daß $\|v\|_s = \infty$). Tatsächlich, für $s < 0$ ist die rechte Seite die Funktionalnorm von $v : (C^\infty_0(M), \|\cdot\|_{-s}) \to \mathbb{R}$, woher die Gleichung folgt. Sei nun $s \geq 0$. Betrachten wir zunächst einen abstrakten Hilbertraum V mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$. Für $v \in V$ ist $\|v\| = \sup\left\{\frac{|\langle v,w\rangle|}{\|w\|} : w \in V, w \neq 0\right\}$, weil $|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ und, für $w = v \neq 0$, $\frac{|\langle v,v\rangle|}{\|v\|} = \|v\|$. Genauso ist $\|v\| = \sup\left\{\frac{|\langle v,w\rangle|}{\|w\|} : w \in V', w \neq 0\right\}$, wobei V' irgendein dichter Unterraum von V ist. Jedes stetige Funktional $\varphi \in V^*$ hat die Form $\varphi(v) = \langle v, w\rangle$ für einen eindeutig bestimmten Vektor $w \in V$, so daß

die Funktionalnorm $\|\varphi\|_F = \|w\|$. Die Zuordnung $\varphi \leftrightarrow w$ ist also eine lineare Isometrie zwischen V und V^*. Ist $W \subset V^*$ ein dichter Unterraum, so haben wir deshalb, für $v \in V$,

$$\|v\| = \sup\left\{\frac{|\varphi(v)|}{\|\varphi\|_F} : \varphi \in W, \varphi \neq 0\right\}.$$

Im Fall wo $V = L^2_s(M,g)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_s$, $V^* = L^2_{-s}(M,g)$, $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_{-s}$ folgt daraus unsere Formel für $s \geq 0$ mit $W = C^\infty_0(M)$, weil $\varphi(v) = \int_M \varphi v = v(\varphi)$ für $v \in L^2_s(M,g)$, $\varphi \in C^\infty_0(M)$.

LEMMA 9. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $s \in \mathbb{Z}$, $v \in C^\infty_0(M)^*$. Dann ist $v \in L^2_s(M,g)$ genau dann, wenn $\|v\|_s < \infty$.

<u>Beweis</u>. Sei $\|v\|_s < \infty$, so daß $v : (C^\infty_0(M), \|\cdot\|_{-s}) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Ist $s < 0$, so kann man v zu einem Funktional in $L^2_s(M,g) = (L^2_{-s}(M,g))^*$ fortsetzen, das als Distribution (auf $C^\infty_0(M)$) einge-

schränkt) offenbar mit v übereinstimmt. Ist dagegen $s \geq 0$, so ist v (fortgesetzt) ein stetiges Funktional auf $(L^2_s(M,g))^* = L^2_{-s}(M,g)$, d. h. es gibt $f \in L^2_s(M,g)$ mit $v(\varphi) = \varphi(f) = \int_M \varphi f$ für alle $\varphi \in C^\infty_0(M) \subset L^2_{-s}(M,g)$, woher $v = f \in L^2_s(M,g)$.

q. e. d.

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $k > 0$. Wir definieren den Differentialoperator $P_k : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ durch

$$P_k f = f - f_{,i}{}^{i} + f_{,ij}{}^{ji} - \dots + (-1)^k f_{,i_1 \dots i_k}{}^{i_k \dots i_1}.$$

Für $f, h \in C^\infty_0(M)$ ergibt die partielle Integration

$$\int_M P_k f \cdot h = \sum_{s=0}^{k} \int_M g(\nabla^s f, \nabla^s h).$$

P_k ist also formal selbstadjungiert ($P_k^* = P_k$) und, für $f, h \in C^\infty_0(M)$

$$\langle P_k f, h \rangle_0 = \langle f, h \rangle_k .$$

Als Distribution ist $P_k f$, für $f \in C^\infty_0(M)$,

ein stetiges Linearfunktional auf $(C^\infty_0(M), \|\cdot\|_k)$, das als $\langle\, , \rangle_k$-Skalarprodukt mit f darstellbar ist. Deshalb $\|P_k f\|_{-k} = \|f\|_k$, d. h. die Abbildung $P_k : (C^\infty_0(M), \|\cdot\|_k) \to (C^\infty_0(M), \|\cdot\|_{-k})$ ist isometrisch. Sie muß also eine isometrische Fortsetzung $P_k : L^2_k(M,g) \to L^2_{-k}(M,g)$ haben, die ihrerseits mit der Distributionsfortsetzung von P_k übereinstimmt. Ist nämlich $f \in L^2_k(M,g)$, $f_m \in C^\infty_0(M)$, $f_m \to f$ in L^2_k (und schwach in $C^\infty_0(M)^*$), so $P_k f_m \to P_k f$ in L^2_{-k} (und schwach in $C^\infty_0(M)^*$, wobei $P_k f$ unsere isometrische Fortsetzung ist), woher, für $\varphi \in C^\infty_0(M)$, $(P_k f)(\varphi) = \lim_m (P_k f_m)(\varphi) = \lim_m f_m(P_k^* \varphi) = f(P_k^* \varphi)$. Wir behaupten, daß $P_k : L^2_k(M,g) \to L^2_{-k}(M,g)$ surjektiv ist (eine lineare Isometrie). Sei $v \in L^2_{-k}(M,g) = (L^2_k(M,g))^*$. Es gibt also $f \in L^2_k(M,g)$ mit $v(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle_k$ für alle $\varphi \in C^\infty_0(M)$. Sind $f_m \in C^\infty_0(M)$ mit $f_m \to f$ in L^2_k, so $v(\varphi) = \lim_m \langle f_m, \varphi \rangle_k = \lim_m \int_M f_m \cdot P_k^* \varphi = \int_M f \cdot P_k^* \varphi$, d. h. $v = P_k f$ als Distributionen.

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene Untermannigfaltigkeit. Für $k \geq 0$ ist der natürliche Fortsetzungsoperator $J : (C_0^\infty(U), \|\cdot\|_k) \to (C_0^\infty(M), \|\cdot\|_k)$ isometrisch, er besitzt also eine isometrische Fortsetzung $J_k : L^2_k(U,g) \to L^2_k(M,g)$. Für $f \in L^2_k(U,g) \subset$ $\subset L^2(U,g)$ ist $J_k f$ die Funktion auf M mit $J_k f = f$ auf U, $J_k f = 0$ auf $M \setminus U$ (man sieht es sofort wenn man f durch $C_0^\infty(U)$ approximiert). Dagegen ist J nicht mal stetig wenn $k < 0$. Für $k < -\frac{n}{2}$ kann man es folgendermaßen beweisen. Wäre J stetig, so würde es wieder eine stetige Fortsetzung $\bar{J}_k : L^2_k(U,g) \to L^2_k(M,g)$ geben. Da $L^2_k(M,g) = (L^2_{|k|}(M,g))^*$, haben wir auch die adjungierte Abbildung $\bar{J}_k^* : L^2_{|k|}(M,g) \to$ $\to L^2_{|k|}(U,g)$; für $f \in L^2_{|k|}(M,g)$, $\varphi \in C_0^\infty(U) \subset$ $\subset L^2_k(U,g)$ ist $\varphi(\bar{J}_k^* f) = (\bar{J}_k \varphi)(f)$, d. h. $\int_U \bar{J}_k^* f \cdot \varphi = \int_M f \varphi$, woraus folgt (Lemma 7) daß $\bar{J}_k^* f$ die Einschränkung von f auf U sein

muß. Es ist also $\bar{J}_k^* \circ J_{|k|} = Id_U$, d. h. jedes $f \in L^2_{|k|}(M,g)$ hat die Form $f = f_0 + f_1$, wobei $f_0 \in \mathrm{Bild}(J_{|k|})$, $f_1 \in \mathrm{Kern}(\bar{J}_k^*)$; wir haben nämlich $f_0 = J_{|k|}(\bar{J}_k^* f)$, $f_1 = f - f_0$. Da $|k| > \frac{n}{2}$, sind f, f_0, f_1 stetig, $f_0 = 0$ auf $M \setminus U$, $f_1 = 0$ auf U, woher $f = 0$ auf ∂U. Falls $U \neq M$, würden auf der nichtleeren Menge ∂U alle Funktionen aus $L^2_{|k|}(M,g)$ (insbesondere, aus $C_0^\infty(M)$) verschwinden, was offenbar unmöglich ist und somit die Nichtstetigkeit von J für $k < -\frac{n}{2}$ und $U \neq M$ beweist. Die Bedingung (i) von Satz 11 (S. 163) gilt also nicht für die Sobolew-Normen $\|\cdot\|_k$ mit $k < 0$. Bedingung (ii) ist aber erfüllt, wegen der natürlichen Definition von $\|\cdot\|_k$. Ebenso gilt, für $k < 0$, Bedingung (iv) für $\|\cdot\|_k$, weil $\left|\int_M \varphi f \cdot h\right| = \left|\int_M f \cdot \varphi h\right| \leq \|f\|_k \, \|\varphi h\|_{|k|} \leq$ $\leq C \|f\|_k \, \|h\|_{|k|}$ $(k<0,\ f, h, \varphi \in C_0^\infty(M))$, woher $\|\varphi f\|_k \leq C \|f\|_k$. Statt der Bedingung (iii) von Satz 11 haben wir folgendes: Sind $g, \tilde{g}$ zwei Metriken auf der Mannigfaltigkeit M, $\mathcal{U} \subset M$ eine offene, relativ kompakte Untermannigfaltigkeit, so sind die Normen $\|\cdot\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})}$, $\|\cdot\|_{k,(\mathcal{U},\tilde{g}_{\mathcal{U}})}$ in $C_0^\infty(\mathcal{U})$ äquivalent $(k<0)$. Es gibt nämlich eine positive Funktion F auf M mit $\int_M f \cdot V_{\tilde{g}} = \int_M F f V_g$ (in lokalen Koordinaten $F = \left(\frac{\det[\tilde{g}_{ij}]}{\det[g_{ij}]}\right)^{1/2}$, vgl. Aufgaben I.4 und $\underline{\text{VI}}$.6) für alle $f \in C_0^\infty(M)$. Für $f, \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ ist also

$$\left|\int_{\mathcal{U}} f\varphi \cdot V_{\tilde{g}}\right| \leq \|f\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \|F\varphi\|_{|k|,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \leq$$

$$\leq C \|f\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \|\varphi\|_{|k|,(\mathcal{U},\tilde{g}_{\mathcal{U}})}, \text{ woher}$$

$\|f\|_{k,(\mathcal{U},\tilde{g}_{\mathcal{U}})} \leq C \|f\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})}$. Die Äquivalenz der Normen folgt nun aus der Symmetrie zwischen g und $\tilde{g}$.

Ist M eine Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} \subset M$ eine offene Untermannigfaltigkeit, so kann man jeder Distribution $v \in C_0^\infty(M)^*$ ihre Einschränkung $v_{\mathcal{U}} \in C_0^\infty(\mathcal{U})^*$ zuordnen, wobei $v_{\mathcal{U}}(\varphi) = v(\varphi)$ für $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U}) \subset C_0^\infty(M)$. Ist g eine feste Metrik auf M und betrachten wir in $\mathcal{U}$ die Einschränkung von g, so ist für $k \leq 0$

$$\|v_{\mathcal{U}}\|_k \leq \|v\|_k ,$$

d.h. $v \to v_{\mathcal{U}}$ wird zu einer stetigen Abbildung $L_k^2(M,g) \to L_k^2(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$, $k \leq 0$, die nichts anderes ist als der adjungierte Operator zu $J_{|k|}$ (Seite 215).

Sei $\mathcal{U}$ eine offene, relativ kompakte Untermannigfaltigkeit von M, $g, \tilde{g}$ zwei Metriken auf M, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es $C, C' \in \mathbb{R}$ mit

$$\|v\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \leq C \|v\|_{k,(\mathcal{U},\tilde{g}_{\mathcal{U}})} \leq C' \|v\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})}$$

für alle Distributionen $v \in C_0^\infty(\mathcal{U})^*$ (dasselbe haben wir bereits für $v \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, aber die Inklusion $C_0^\infty(\mathcal{U}) \to C_0^\infty(\mathcal{U})^*$ hängt von der

Metrik ab). Ist z. B. M kompakt, so hängen die Unterräume $L^2_k(M,g) \subset C^\infty(M)^*$, $k \in \mathbb{Z}$, von der Metrik g nicht ab und dasselbe gilt, bis auf Äquivalenz, für die Sobolew-Normen in diesen Räumen.

Jetzt werden wir die Stetigkeitseigenschaften der Differentialoperatoren bezüglich der Sobolew-Normen erörtern. Zunächst bemerken wir folgendes: Ist P ein Differentialoperator auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), f_m eine Folge in $C^\infty_0(M)$, $f \in L^2_s(M,g)$, $f_m \to f$ in $L^2_s(M,g)$ und $Pf_m \to h \in L^2_{s'}(M,g)$ in $L^2_{s'}(M,g)$ $(s, s' \in \mathbb{Z})$, so ist $h = Pf$, wobei P auf f operiert, indem wir f als eine Distribution betrachten. Wir haben nämlich auch $f_m \to f$, $Pf_m \to h$ schwach in $C^\infty_0(M)^*$, woher, für $\varphi \in C^\infty_0(M)$, $h(\varphi) = \lim_m Pf_m(\varphi) = \lim_m f_m(P^*\varphi) = f(P^*\varphi) = Pf(\varphi)$. Deshalb, jedesmal wenn wir den Differentialoperator $P: C^\infty_0(M) \to C^\infty_0(M)$

zu einer stetigen Abbildung zwischen gewissen Sobolew-Räumen fortsetzen können, muß diese Fortsetzung mit der Distributionsfortsetzung von P übereinstimmen.

LEMMA 10. Sei P ein Differentialoperator der Ordnung k auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), $U \subset M$ eine relativ kompakte offene Untermannigfaltigkeit.

(i) Für jedes $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$, gibt es $C \geq 0$ mit

$$\|Pf\|_s \leq \sup_{\text{Träger}(f)} |\sigma_{P,k}| \cdot \|f\|_{s+k} + C\,\|f\|_{s+k-1}$$

für alle $f \in C^\infty_0(U)$; falls $k = s = 0$, können wir $C = 0$ setzen.

(ii) Für jedes $s \in \mathbb{Z}$ gibt es $\tilde{C} > 0$ mit

$$\|Pf\|_{s,U} \leq \tilde{C}\,\|f\|_{s+k,U}$$

für alle $f \in C^\infty_0(U)$. Dabei ist $\|\cdot\|_{s,U}$ die Sobolew-Norm in der Riemannschen Mannigfaltigkeit (U, g_U). Die Abbildung

$P: C_0^\infty(\mathcal{U}) \to C_0^\infty(\mathcal{U})$ besitzt also eine stetige Fortsetzung $P: L^2_{s+k}(\mathcal{U}, g_\mathcal{U}) \to L^2_s(\mathcal{U}, g_\mathcal{U})$, für alle $s \in \mathbb{Z}$ (nach der obigen Bemerkung, muß diese Fortsetzung mit der Distributionsfortsetzung von P übereinstimmen).

<u>Bemerkung</u>. Falls M kompakt ist, haben wir die entsprechenden Behauptungen für $\mathcal{U} = M$.

<u>Beweis</u>. Sei $s \geq 0$. Wegen der Leibniz-Regel ist $|\nabla^i(Pf)| \leq \sup_{\text{Träger}(f)} |\sigma_{P,k}| \cdot |\nabla^{i+k} f| + C \sum_{j=0}^{i+k-1} |\nabla^{j+k} f|$ für $f \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ (da $Pf = \underset{k}{\alpha}^{i_1 \cdots i_k} f_{,i_1 \cdots i_k} + \cdots + \underset{0}{\alpha} \cdot f$, $\underset{k}{\alpha} = \sigma_{P,k}$), woher (i) folgt. Nun ist (ii) für $s \geq 0$ eine direkte Konsequenz von (i), da $\|f\|_{s+k-1} \leq \|f\|_{s+k}$ und $\sup_{\text{Träger}(f)} |\sigma_{P,k}| \leq \sup_{\mathcal{U}} |\sigma_{P,k}| < \infty$ für $f \in C_0^\infty(\mathcal{U})$. Sei dagegen $s < 0$, $s = -q$, $q \geq 1$. Ist $q \geq k$, d.h. $k + s \leq 0$, so haben

wir, für $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\left|\int_\mathcal{U} Pf \cdot \varphi\right| = \left|\int_\mathcal{U} f \cdot P^*\varphi\right| \leq \|f\|_{k-q,\mathcal{U}} \|P^*\varphi\|_{q-k} \leq \tilde{C}^* \|f\|_{s+k,\mathcal{U}} \|\varphi\|_q$ (wegen des Falles $s \geq 0$ für den Operator P^*), woher $\|Pf\|_{s,\mathcal{U}} = \|Pf\|_{-q,\mathcal{U}} \leq \tilde{C}^* \|f\|_{s+k,\mathcal{U}}$ für alle $f \in C_0^\infty(\mathcal{U})$. Betrachten wir nun den übrigen Fall $q < k$, $q \geq 1$, $s = -q$.

Man darf annehmen, daß $Pf = \alpha^{i_1 \cdots i_k} f_{,i_1 \cdots i_k}$ (hat man (ii) für alle Operatoren dieser Form, k beliebig, so folgt (ii) für P).

Nun ist für $f, \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\int_\mathcal{U} Pf \cdot \varphi =$

$$= \int_\mathcal{U} \alpha^{i_1 \cdots i_k} f_{,i_1 \cdots i_{k-q}} \left(\sum_{j=0}^{q} \overset{j}{H}{}_{i_{k-q+1} \cdots i_k}{}^{l_1 \cdots l_j} \varphi_{,l_1 \cdots l_j} \right),$$

wobei die $\overset{j}{H}$ gewisse C^∞-Tensorfelder auf M sind (mehrfache partielle Integration).

Wegen der Schwarzschen Ungleichung ist das letzte Integrand nicht größer (absolut) als

$$C\,|\nabla^{k-q} f| \cdot \sum_{j=0}^{q} |\nabla^j \varphi|$$

woher, wegen der Schwarzschen Ungleichung für Integrale,

$$\Big|\int_{\mathcal{U}} Pf\cdot\varphi\Big| \leq \tilde{C}\, \|f\|_{k-q}\, \|\varphi\|_q\,,$$

d. h. $\|Pf\|_{s,\mathcal{U}} = \|Pf\|_{-q,\mathcal{U}} \leq \tilde{C}\,\|f\|_{k-q} =$
$= \tilde{C}\,\|f\|_{k+s,\mathcal{U}}$.

q. e. d.

<u>Bemerkung</u>. In der partiellen Integration auf S. 222 haben wir eigentlich $\int_{\mathcal{U}} Pf\cdot\varphi =$

$$= \int_{\mathcal{U}} f_{,i_1\ldots i_{k-q}}\Big(\alpha^{i_1\ldots i_k}\varphi_{,i_k\ldots i_{k-q+1}} + \sum_{j=0}^{q-1} \overset{j}{H}{}_{i_{k-q+1}\ldots i_k}{}^{l_1\ldots l_j}\,\varphi_{,l_1\ldots l_j}\Big)\,,$$

woher $\Big|\int_{\mathcal{U}} Pf\cdot\varphi\Big| \leq \Big[\sup_{\text{Träger}(f)} |\sigma_{P,k}|\cdot\|f\|_{k-q} + C\,\|f\|_{k-q-1}\Big]\,\|\varphi\|_q$ (indem wir den zweiten Teil dieser Summe nochmals partiell

integrieren, um eine weitere Ableitung von f loszuwerden). Somit ist, für $f\in C_0^\infty(\mathcal{U})$,

$$\|Pf\|_{-q,\mathcal{U}} \leq \sup_{\text{Träger}(f)} |\sigma_{P,k}|\cdot\|f\|_{k-q} + C\|f\|_{k-q-1}\,.$$

Behauptung (i) gilt also, in der Form

$$\|Pf\|_{s,\mathcal{U}} \leq \sup_{\text{Träger}(f)} |\sigma_{P,k}|\cdot\|f\|_{s+k} + C\|f\|_{s+k-1}$$

auch für $s > -k$.

Das Lemma von Rellich (Folgerung 7) haben wir für <u>kompakte</u> Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M,g) formuliert. Es gilt aber, mit demselben Beweis, auch für offene relativ kompakte Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{U}$ von beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M,g), falls $\mathcal{U}$ mit der eingeschränkten Metrik $g_{\mathcal{U}}$ versehen ist: Für $k > l \geq 0$ muß der Inklusionsoperator $L_k^2(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}}) \to L_l^2(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})$

kompakt sein. Da, für $k \geq 0$, die Inklusion $L^2_{-k}(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}}) \to L^2_{-k-1}(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$ der adjungierte Operator der Inklusion $L^2_{k+1}(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}}) \to L^2_k(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$ ist, müssen alle Inklusionen

$L^2_k(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}}) \to L^2_\ell(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$ für $k, \ell \in \mathbb{Z}$, $k > \ell$, kompakt sein.

LEMMA 11. Seien $(V_i, \|\cdot\|_{V_i})$ Banach-Räume, $i = 1,2,3$, $F: V_1 \to V_2$ ein kompakter linearer Operator, $H: V_2 \to V_3$ eine stetige, injektive lineare Abbildung. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann $C > 0$ mit

$$\|F(y)\|_{V_2} \leq \varepsilon \|y\|_{V_1} + C\|H(F(y))\|_{V_3}.$$

für alle $y \in V_1$.

Beweis. Sonst würde es $\varepsilon_0 > 0$ und, für jedes natürliche m, $y_m \in V_1$ geben mit $\|F(y_m)\|_{V_2} > \varepsilon_0 \|y_m\|_{V_1} + m\|H(F(y_m))\|_{V_3}$. Wir können die y_m normieren: $\|y_m\|_{V_1} = 1$, so daß

$$\|F(y_m)\|_{V_2} > \varepsilon_0 + m\|H(F(y_m))\|_{V_3}.$$

Da F stetig ist (weil kompakt), muß auch die Folge $F(y_m)$ in V_2 beschränkt sein, woher $\|H(F(y_m))\|_{V_3} \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Andererseits, dürfen wir annehmen, daß $F(y_m) \to z \in V_2$ in V_2, indem wir y_m durch eine Teilfolge ersetzen (da F kompakt ist). Also, $H(z) = \lim\limits_m H(F(y_m)) = 0$, woher $z = 0$. Es ist deshalb, wegen der obigen Ungleichung, $0 = \lim\limits_m \|F(y_m)\|_{V_2} > \varepsilon_0$. Mit diesem Widerspruch ist das Lemma bewiesen.

q.e.d.

FOLGERUNG 12. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} \subset M$ eine offene, relativ kompakte Untermannigfaltigkeit, k, ℓ, q ganze Zahlen mit $k > \ell > q$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $C(\varepsilon) > 0$ mit

$$\|f\|_{\ell,\mathcal{U}} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\mathcal{U}} + C(\varepsilon)\|f\|_{q,\mathcal{U}}$$

für alle $f \in C^\infty_0(\mathcal{U})$.

q.e.d.

Betrachten wir nun den flachen Riemannschen Torus $T^n = \underbrace{S^1(1) \times \dots \times S^1(1)}_{n}$, wobei $S^1(1) \subset \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ der Kreis vom Radius 1 ist mit der induzierten Metrik und T^n die entsprechende Produktmetrik trägt. Wir haben die natürliche lokal isometrische surjektive Abbildung $\mathbb{R}^n \to T^n$, die jedem Punkt $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ den Punkt $(e^{iy^1}, \dots, e^{iy^n}) \in S^1(1) \times \dots \times S^1(1) = T^n$ zuordnet; dabei ist $S^1(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zwei Punkte $y, y' \in \mathbb{R}^n$ haben dasselbe Bild in T^n genau dann, wenn $y - y' \in 2\pi \mathbb{Z}^n$, wobei $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ die Menge aller Punkte mit ganzzahligen Komponenten ist. Eine Funktion auf T^n ist also nichts anderes, als eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) die $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodisch ist: $f(y + 2\pi\alpha) = f(y)$ für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Die Einschränkung der Projektion $\mathbb{R}^n \to T^n$ auf den Würfel $(0, 2\pi)^n$ bildet $(0, 2\pi)^n$ diffeomorph auf eine dichte offene Teilmenge von T^n ab und die umgekehrte Abbildung ist ein Koordinatensystem, in dem die Torusmetrik g die Komponenten $g_{ij} =$

$= \delta_{ij}$ hat. Es ist also, für jede nicht-negative meßbare (bzw. integrierbare) Funktion f auf T^n,

$$\int_{T^n} f \cdot V_g = \int_{(0,2\pi)^n} f$$

wobei auf der rechten Seite das Lebesgue-Integral steht und f als eine $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ betrachtet wird.

Für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir die komplexwertige C^∞-Funktion χ_α auf T^n, indem wir die entsprechende $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion $\chi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ angeben:

$$\chi_\alpha(y) = (2\pi)^{-n/2} e^{i\langle y, \alpha \rangle} \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n,$$

$\alpha \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, wobei $\langle\, , \rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist. Die dem kartesischen Koordinatensystem (x^j) auf $\mathbb{R}^n$ entsprechenden Basisvektorfelder ∂_j sind unter der Translationsgruppe $2\pi\mathbb{Z}^n$ invariant; somit projizieren sie auf C^∞-Vektorfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ auf T^n, die in jedem Punkt eine Orthonormalbasis des Tangentialraumes bilden. Man kann also für jede C^∞-Funktion $f: T^n \to \mathbb{C}$ die "partiellen Ableitungen" $\partial_j f: T^n \to \mathbb{C}$ definieren. Zum Beispiel,

$$\partial_j \chi_\alpha = i\alpha^j \chi_\alpha ,$$

wobei α^j die j-te Komponente von $\alpha \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist. Also, in den (lokalen) Kartesischen Koordinaten,

$$(\chi_\alpha)_{,j_1 \dots j_s} = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_s} \chi_\alpha = i^s \alpha^{j_1} \cdots \alpha^{j_s} \chi_\alpha$$

und $g^{jk} = \delta^{jk}$, so daß

$$\Delta \chi_\alpha = -\sum_j \partial_j \partial_j \chi_\alpha = |\alpha|^2 \chi_\alpha .$$

Dabei setzen wir, für komplexwertige Funktionen f, $\Delta f = \Delta(\mathrm{Re} f) + i\,\Delta(\mathrm{Im} f)$.

Die χ_α sind also Eigenfunktionen von Δ (d.h. $\mathrm{Re}\,\chi_\alpha$ und $\mathrm{Im}\,\chi_\alpha$ sind reellwertige Eigenfunktionen für den Eigenwert $|\alpha|^2$). Deshalb ist, für $\alpha \neq 0$, $\int_{T^n} \chi_\alpha = 0$ (man kann es natürlich auch direkt ausrechnen, indem man auf $(0,2\pi)^n$ den Satz von Fubini anwendet). Im komplexen Hilbert-

raum $L^2(T^n, \mathbb{C})$ der Funktionen $f: T^n \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in L^2(T^n)$ mit dem Hermiteschen Skalarprodukt $\langle f, h \rangle_{L^2} = \int_{T^n} f \bar{h}$ bilden die χ_α, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, ein orthonormales System:

$$\int_{T^n} \chi_\alpha \overline{\chi_\beta} = (2\pi)^{-n/2} \int_{T^n} \chi_{\alpha-\beta} = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta$$

und $\int_{T^n} |\chi_\alpha|^2 = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} 1 = (2\pi)^{-n} \int_{(0,2\pi)^n} 1 = 1$.

Jeder Funktion $f \in L^2(T^n, \mathbb{C})$ können wir ihre Fourier-Koeffizienten $\hat{f}(\alpha)$ zuordnen, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, mit

$$\hat{f}(\alpha) = \langle f, \chi_\alpha \rangle_{L^2} = \int_{T^n} f \overline{\chi_\alpha} .$$

Wir haben $\chi_\alpha \chi_\beta = (2\pi)^{-n/2} \chi_{\alpha+\beta}$, $\overline{\chi_\alpha} = \chi_{-\alpha}$ und $\chi_0 = (2\pi)^{-n/2}$. Deshalb bilden die komplexen Kombinationen der χ_α nicht nur einen Vektorraum, sondern auch eine komplexe Algebra von stetigen komplexwertigen Funktionen auf T^n, die die Konstanten enthält und unter der komplexen Konjugation abgeschlossen ist. Deshalb* liegt diese Algebra dicht im Raum $C^0(T^n, \mathbb{C})$ mit der C^0("Supremum")-Norm (Satz von Stone-Weierstraß, s. Aufgabe IX. 10). Da $C^0(T^n, \mathbb{C})$ dicht in $L^2(T^n, \mathbb{C})$ liegt und aus der gleichmäßigen Konvergenz die L^2-Konvergenz folgt, müssen die endlichen Kombinationen der χ_α dicht in $L^2(T^n, \mathbb{C})$ liegen, d.h. $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(T^n, \mathbb{C})$ (eine Hilbert-Basis von $L^2(T^n, \mathbb{C})$, vgl. Aufgabe IX. 4). Deshalb ist, für jedes $f \in L^2(T^n, \mathbb{C})$,

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\alpha)\chi_\alpha$$

(eine L^2-Konvergente Reihe, d.h. $f = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{|\alpha|\le m} \hat{f}(\alpha)\chi_\alpha$ in $L^2(T^n, \mathbb{C})$) und

*Diese Algebra trennt offenbar die Punkte von T^n.

$$\|f\|^2_{L^2} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\alpha)|^2. \quad \text{(Aufgabe IX. 5).}$$

Sei nun $f \in C^\infty(T^n)$. Wir haben

$$(\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s} f)^\wedge(\alpha) = \int_{T^n} \partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s} f \cdot \overline{\chi}_\alpha =$$

$$= \int_{T^n} (-1)^s f\, \partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s}\overline{\chi}_\alpha = i^s \alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_s} \int_{T^n} f\overline{\chi}_\alpha$$

(partielle Integration mit $\overline{\chi}_\alpha = \chi_{-\alpha}$), d.h.

$$(\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s} f)^\wedge(\alpha) = i^s\alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_s}\hat{f}(\alpha).$$

Also

$$\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s} f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} i^s\alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_s}\hat{f}(\alpha)\chi_\alpha$$

(L^2-Konvergente Reihe) und somit

$$\|\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s} f\|^2_{L^2} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (\alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_s})^2 |\hat{f}(\alpha)|^2,$$

woher $\| |\nabla^s f| \|^2_{L^2} = \sum\limits_{j_1,\dots,j_s} \|\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_s} f\|^2_{L^2} =$

$= \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} |\alpha|^{2s}|\hat{f}(\alpha)|^2$. Also

$$\|f\|_s^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2s}) |\hat{f}(\alpha)|^2$$

für alle $f \in C^\infty(T^n)$.

Sei nun P ein Differentialoperator der Ordnung k auf T^n. Wir haben (Satz)

$$Pf = \underset{k}{H}^{j_1 \dots j_k} f_{;j_1 \dots j_k} + \dots + \underset{0}{H} \cdot f$$

für gewisse symmetrische Tensorfelder $\underset{k}{H}, \dots, \underset{0}{H}$ auf T^n und alle $f \in C^\infty(T^n)$. In den lokalen kartesischen Koordinaten auf T^n ist $\underset{s}{H}^{j_1 \dots j_s} = \underset{s}{H}(dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s})$, $0 \le s \le k$.

Da die C^∞-kovarianten Vektorfelder dx^j auf ganz T^n definiert sind (sie bilden in jedem Punkt die duale Basis zu $\partial_1, \dots, \partial_n$), sind die einzelnen (kartesischen) Komponenten $\underset{s}{H}^{j_1 \dots j_s}$ C^∞-Funktionen auf T^n und, für $f \in C^\infty(T^n)$,

$$Pf = \underset{k}{H}^{j_1 \dots j_k} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f + \dots + \underset{0}{H} \cdot f.$$

SATZ 15 (Die Ungleichung von K. O. Friedrichs). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ eine offene, relativ kompakte Untermannigfaltigkeit, P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k > 0$ auf M und $s \geq 0$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es $C > 0$ mit

$$\|f\|_{s+k} \leq C (\|Pf\|_s + \|f\|_s)$$

für alle $f \in C_0^\infty(U)$.

<u>Beweis</u>. a) Sei $U = M = T^n$, g die obige Torusmetrik, $Pf = H^{j_1 \dots j_k} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f$, wobei die Funktionen $H^{j_1 \dots j_k}$ <u>konstant</u> sind. Also, für $f \in C^\infty(T^n)$, $(Pf)^\wedge(\alpha) =$

$$= H^{j_1 \dots j_k} (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f)^\wedge(\alpha) = \Big(i^k \sum_{j_1 \dots j_k} H^{j_1 \dots j_k} \alpha^{j_1} \dots \alpha^{j_k}\Big) \hat{f}(\alpha).$$

Da P elliptisch ist, gibt es $C_0 > 0$ mit

$$\Big| \sum_{j_1 \dots j_k} H^{j_1 \dots j_k} \xi^{j_1} \dots \xi^{j_k} \Big| \geq C_0 |\xi|^k$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Die linke Seite dieser Ungleichung ist nämlich auf der Einheitssphäre $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ stetig und positiv, und somit von 0 wegbeschränkt. Deshalb haben wir

$$|(Pf)^\wedge(\alpha)| \geq C_0 |\alpha|^k |\hat{f}(\alpha)|$$

für alle $f \in C^\infty(T^n)$ und alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Andererseits gibt es $C > 0$ mit

$$1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2s+2k} \leq$$

$$\leq C^2 (1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2s})(1 + C_0 |\alpha|^{2k})$$

(weil für $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $F(t) =$ $= (1 + t^2 + \dots + t^{2s+2k})(1 + t^2 + \dots + t^{2s})^{-1}(1 + C_0 t^{2k})^{-1}$, $\lim_{t \to \infty} F(t) = C_0^{-1}$, so daß F auf $[0, \infty)$ beschränkt ist). Für $f \in C^\infty(T^n)$ haben wir also $\|f\|_{s+k}^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2s+2k}) |\hat{f}(\alpha)|^2 \leq$

$$\leq C^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2s})(1 + C_0^2 |\alpha|^{2k}) |\hat{f}(\alpha)|^2 \leq$$

$$\leq C^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2s})(|\hat{f}(\alpha)|^2 + |(Pf)^\wedge(\alpha)|^2) =$$

$$= C^2 (\|Pf\|_s^2 + \|f\|_s^2) \leq C^2 (\|Pf\|_s + \|f\|_s)^2 ,$$

womit unsere Behauptung in diesem Fall bewiesen ist.

b) Sei (M, g) beliebig, $y_0 \in M$. Wir behaupten, daß es eine zusammenhängende relativ kompakte Umgebung U von y_0 gibt, wo die Ungleichung gilt. Sei $(U', (x^j))$ ein relativ kompaktes Koordinatensystem um y_0. Wir dürfen annehmen, daß $U' \subset T^n$ und die Basisfelder ∂_j in U' den Feldern ∂_j auf T^n entsprechen. Wir haben, in U', $Pf = \underset{k}{H}^{j_1 \dots j_k} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f + \dots + \underset{0}{H} \cdot f$. Der Operator $P_0 f = \underset{k}{H}^{j_1 \dots j_k}(y_0) \cdot \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f$ in U' ist auch elliptisch und kann als elliptischer Operator auf ganz T^n betrachtet werden. Für $f \in C_0^\infty(U')$ haben wir, wegen a) und der lokalen Unabhängigkeit der Sobolew-Normen (bis auf Äquivalenz) von der Metrik,

$$\|f\|_{s+k} \leq C(\|P_0 f\|_s + \|f\|_s) \leq$$

$$\leq C(\|Pf\|_s + \|(P_0 - P) f\|_s + \|f\|_s).$$

Wegen Lemma 10 ist

$$\|(P_0-P)f\|_s \leq \sup_{\text{Träger}(f)} |\sigma_{P_0-P,k}|\cdot\|f\|_{s+k} + \tilde{C}\,\|f\|_{s+k-1}.$$

Da $\sigma_{P_0-P,k}(y_0)=0$, finden wir eine Umgebung $U\subset U'$ von y_0 mit $C\cdot\sup_U|\sigma_{P_0-P,k}|\leq\frac{1}{2}$.

Also, für $f\in C_0^\infty(U)$,

$$\|f\|_{s+k}\leq C(\|Pf\|_s+\|f\|_s) + \frac{1}{2}\|f\|_{s+k} + C\tilde{C}\,\|f\|_{s+k-1},$$

d. h.

$$\frac{1}{2}\|f\|_{s+k}\leq C(\|Pf\|_s+\|f\|_s)+C\tilde{C}\,\|f\|_{s+k-1}.$$

Ist $k=1$, so ist Behauptung b) schon bewiesen (wobei wir nicht zu wissen brauchen, daß ein elliptischer Operator die wesentliche Ordnung 1 nicht haben darf). Sonst finden wir, wegen Folgerung 12, eine Zahl $\tilde{\tilde{C}}>0$ mit

$$C\tilde{C}\,\|f\|_{s+k-1}\leq\frac{1}{4}\|f\|_{s+k}+\tilde{\tilde{C}}\,\|f\|_s$$

für alle $f\in C_0^\infty(U)$. Also

$$\frac{1}{4}\|f\|_{s+k}\leq C\|Pf\|_s+(C+\tilde{\tilde{C}})\|f\|_s,$$

woraus b) folgt.

c) Der allgemeine Fall. Wir finden endlich viele Funktionen $\varphi_q\in C_0^\infty(M)$ mit $\sum_q\varphi_q=1$ auf U, deren Träger in kleinen Mengen U_q liegen, wo b) gilt.

Nun, für $f\in C_0^\infty(U)$,

$$\|f\|_{s+k}\leq\sum_q\|\varphi_q f\|_{s+k}\leq$$

$$\leq\sum_q C_q(\|P(\varphi_q f)\|_s+\|\varphi_q f\|_s).$$

Wir haben aber $P(\varphi_q f)=\varphi_q Pf + P'_q f$, wobei P'_q ein Differentialoperator der Ordnung $k-1$ ist. Also

$$\|P(\varphi_q f)\|_s\leq\|\varphi_q Pf\|_s+\|P'_q f\|_s\leq$$

$$\leq\tilde{C}_q(\|Pf\|_s+\|f\|_{s+k-1})$$ und

$\|\varphi_q f\|_s\leq\tilde{C}_q\|f\|_s$ (wegen (ii), Lemma 10, und der Stetigkeit von $f\to\varphi_q f$ bezüglich

$\|\cdot\|_s$). Also

$$\|f\|_{s+k} \leq \left(\sum_q C_q \tilde{C}_q\right)\left(\|Pf\|_s + \|f\|_{s+k-1} + \right.$$
$$\left. + \|f\|_s\right).$$ Ist $k=1$, so sind wir fertig. Sonst wenden wir Folgerung 12 an (wie im Fall b)). Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

FOLGERUNG 13. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k>0$ auf M, $s \geqslant 0$. Dann hat die Abbildung

$$P: L^2_{s+k}(M) \longrightarrow L^2_s(M),$$

sowie

$$P: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

einen endlich dimensionalen Kern.

Beweis. Sonst finden wir eine unendliche L^2_s-orthonormale Folge $f_m \in L^2_{s+k}(M)$ (bzw. $f_m \in C^\infty(M)$) mit $Pf_m = 0$. Wegen Satz 15 mit $U = M$ haben wir

$$\|f_m\|_{s+k} \leqslant C\|f_m\|_s = C$$

(die Ungleichung gilt, wegen Stetigkeit, für alle Funktionen in $L^2_{s+k}(M)$). Da die Folge f_m $\|\cdot\|_{s+k}$-beschränkt ist, muß sie nach dem Lemma von Rellich eine $\|\cdot\|_s$-konvergente Teilfolge enthalten, was der L^2_s-Orthonormalität der f_m widerspricht.

q. e. d.

Bemerkung. Für (M,g), P wie in Folgerung 13, sei $\mathrm{Kern}_{s+k} P$ der Kern von $P: L^2_{s+k}(M) \to L^2_s(M)$ (bzw. $\mathrm{Kern}_\infty P$ = der Kern von $P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$). Wir haben also

$$L^2_k(M) \supset \mathrm{Kern}_k P \supset \mathrm{Kern}_{1+k} P \supset \mathrm{Kern}_{2+k} P \supset \ldots$$
$$\ldots \supset \mathrm{Kern}_\infty P.$$ Da diese Kerne endlich dimensional sind, gibt es $s_0 = s_0(P) \geqslant 0$ mit $\mathrm{Kern}_{s+k} P = \mathrm{Kern}_\infty P$ für alle $s \geqslant s_0$; d. h. aus $f \in L^2_{s+k}(M)$ und $Pf = 0$ folgt dann $f \in C^\infty(M)$. Dieser

"Regularitätssatz" ist jedoch viel schwächer als der, den wir brauchen (und erst beweisen müssen).

FOLGERUNG 14 (Verallgemeinerte Ungleichung von Poincaré). Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k>0$ auf M, $s \geq 0$. Dann gibt es $C>0$ mit

$$\|f\|_{s+k} \leq C\,\|Pf\|_s$$

für alle $f \in L^2_{s+k}$, die zum (endlich dimensionalen) Kern der Abbildung

$$P: L^2_{s+k}(M) \to L^2_s(M)$$

L^2-Orthogonal sind.

<u>Beweis.</u> Sonst finden wir eine Folge $f_m \in L^2_{s+k}(M)$ mit $\|f_m\|_{s+k} = 1$, $f_m \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Kern}_{s+k} P$, $\|Pf_m\|_s \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Nach dem Lemma von Rellich ist $f_m \to f$, in $L^2_s(M)$, $f \in L^2_s(M)$, falls man f_m durch eine Teilfolge ersetzt. Aus der Ungleichung von

Friedrichs folgt aber, daß

$$\|f_m - f_{m'}\|_{s+k} \leq C(\|Pf_m - Pf_{m'}\|_s + \|f_m - f_{m'}\|_s),$$

d.h. f_m ist eine $\|\cdot\|_{s+k}$-Cauchy-Folge und somit $f_m \to h$ in $L^2_{s+k}(M)$, $h \in L^2_{s+k}(M)$. Da aber auch $f_m \to h$ in $L^2_s(M)$, haben wir $h = f$ und $f \in L^2_{s+k}(M)$. Nun ist $\|f\|_{s+k} = 1$, $f \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Kern}_{s+k} P$ (da das L^2-Skalarprodukt auf $L^2_{s+k}(M)$ stetig ist) und $\|Pf\|_s = \lim_m \|Pf_m\|_s = 0$, d.h. $f \in \mathrm{Kern}_{s+k} P$, was den anderen Eigenschaften von f widerspricht. Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

FOLGERUNG 15. Seien (M,g), P, k, s wie in Folgerung 14. Dann ist das Bild $P(L^2_{s+k}(M))$ des Operators $P: L^2_{s+k}(M) \to L^2_s(M)$ in $L^2_s(M)$ abgeschlossen.

<u>Beweis.</u> Sei $V = \{f \in L^2_{s+k}(M) : f \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Ker}_{s+k} P\}$.

Also $L^2_{s+k}(M) = V \oplus \mathrm{Ker}_{s+k} P$ (weil wir die Zerlegung im größeren Raum $L^2(M)$ durchführen können: $\mathrm{Ker}_{s+k} P$ ist endlich dimensional, also abgeschlossen). Deshalb ist $P(L^2_{s+k}(M)) = P(V)$. Sind $f_m \in V$ mit $Pf_m \to h \in L^2_s(M)$ in $L^2_s(M)$, so, nach Folgerung 14, muß f_m eine $\|\cdot\|_{s+k}$-Cauchy-Folge sein und $f_m \to f \in L^2_{s+k}(M)$ in $L^2_{s+k}(M)$. Also $Pf = h$ und $h \in P(L^2_{s+k}(M))$, womit die Folgerung bewiesen ist.

FOLGERUNG 16. Seien (M,g), P, k wie in Folgerung 14. Dann ist das Bild von

$$P: L^2_k(M) \to L^2(M)$$

das L^2-Orthogonalkomplement des Raumes

$$\mathrm{Ker}_0 P^* = \{h \in L^2(M) : P^*h = 0 \text{ (als Distribution)}\}.$$

<u>Beweis</u>. Zunächst ist $P(L^2_k(M)) \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Ker}_0 P^*$: ist $f \in L^2_k(M)$, $h \in \mathrm{Ker}_0 P^*$ und $f_m \in C^\infty(M)$ mit $f_m \to f$ in $L^2_k(M)$, so ist

$$\langle h, Pf\rangle_{L^2} = \lim_m \langle h, Pf_m\rangle_{L^2} = \lim_m h(Pf_m) = \lim_m (P^*h)(f_m) = 0, \text{ weil } P = (P^*)^*.$$

Andererseits ist $(P(L^2_k(M)))^\perp \subset \mathrm{Ker}_0 P^*$: ist nämlich $h \in L^2(M)$ und $\langle h, P\varphi\rangle_{L^2} = 0$ für alle $\varphi \in C^\infty(M)$, so $(P^*h)(\varphi) = h(P\varphi) = 0$ und $h \in \mathrm{Ker}_0 P^*$. Da $P(L^2_k(M))$ in $L^2(M)$ abgeschlossen ist (Folgerung 15 mit $s=0$), muß es mit $(\mathrm{Ker}_0 P^*)^\perp$ übereinstimmen.

q. e. d.

Betrachten wir wieder den flachen Riemannschen Torus $T^n = S^1(1) \times \ldots \times S^1(1) = \mathbb{R}^n / 2\pi \mathbb{Z}^n$. Wir definieren die C^∞-Konvergenz in $C^\infty(T^n, \mathbb{C})$: $f_m \to f$, wenn $\operatorname{Re} f_m \to \operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f_m \to \operatorname{Im} f$ in $C^\infty(T^n)$. Sei $C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ der Raum aller <u>komplexen</u> <u>Distributionen</u> auf T^n, d.h. der $\mathbb{C}$-linearen, C^∞-stetigen Funktionale $C^\infty(T^n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Wir haben eine natürliche $\mathbb{R}$-lineare Inklusion $C^\infty(T^n)^* \longrightarrow C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$: eine reelle Distribution v operiert auf $\varphi + i\psi \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$ nach der Formel $v(\varphi + i\psi) = v(\varphi) + i\, v(\psi)$. Ist dagegen $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$, so definiert man $\operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v \in C^\infty(T^n)^*$ durch $(\operatorname{Re} v)(\varphi) = \operatorname{Re}(v(\varphi))$, $(\operatorname{Im} v)(\varphi) = \operatorname{Im}(v(\varphi))$. Dabei ist $v = \operatorname{Re} v + i \operatorname{Im} v$. Der

Raum $C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ kann also als die Komplexifizierung von $C^\infty(T^n)^*$ betrachtet werden, was mit der entsprechenden Darstellung von $C^\infty(T^n, \mathbb{C}) \subset C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ übereinstimmt.

Für $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Sobolew-Norm $\|v\|_k \in [0, \infty]$ durch $\|v\|_k^2 = \|\operatorname{Re} v\|_k^2 + \|\operatorname{Im} v\|_k^2$. Der Raum $L_k^2(T^n, \mathbb{C}) \subset C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ besteht aus allen v mit $\|v\|_k < \infty$ (d.h. mit $\operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v \in L_k^2(T^n)$). Die $L_k^2(T^n, \mathbb{C})$ sind komplexe Hilbert-Räume mit Skalarprodukten $\langle v, w\rangle_k =$
$$= \langle \operatorname{Re} v, \operatorname{Re} w\rangle_k + \langle \operatorname{Im} v, \operatorname{Im} w\rangle_k + i\left(\langle \operatorname{Im} v, \operatorname{Re} w\rangle_k - \langle \operatorname{Re} v, \operatorname{Im} w\rangle_k\right)$$
(man bemerke, daß die $L_k^2(T^n)$, $k < 0$, reelle Hilbert-Räume sind, als Dualräume der entsprechenden $L_{|k|}^2(T^n)$).

Ist $f \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$, so, wie wir bereits wissen, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\alpha) \chi_\alpha$ (Kon-

vergente Reihe in $L^2(T^n, \mathbb{C})$) und
$\|f\|_0^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\alpha)|^2$. Da andererseits $(\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f)^\wedge(\alpha) = i^k \alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_k}\hat{f}(\alpha)$, haben wir

$$\|\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f\|_{L^2}^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (\alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_k})^2 |\hat{f}(\alpha)|^2$$

und

$$\|f\|_k^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})|\hat{f}(\alpha)|^2$$

sowie

$$\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} i^k\alpha^{j_1}\cdots\alpha^{j_k}\hat{f}(\alpha)\chi_\alpha = $$
$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\alpha)\,\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}\chi_\alpha$$

(L^2-Konvergenz). Die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(\alpha)\chi_\alpha$ konvergiert also gegen $f\in C^\infty(T^n,\mathbb{C})$ in L^2_k, für jedes $k\geq 0$, und somit auch in C^∞ (vgl. das Lemma von Sobolew). Es ist auch, für $f, h\in C^\infty(T^n,\mathbb{C})$, $k\geq 0$,

$$\langle f, h\rangle_k = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})\,\hat{f}(\alpha)\overline{\hat{h}(\alpha)},$$

weil $\langle\,,\,\rangle_k$ durch $\|\cdot\|_k$ eindeutig bestimmt ist. Da $(\chi_\alpha)^\wedge(\alpha) = 1$ und $(\chi_\alpha)^\wedge(\beta) = 0$ für $\beta\neq\alpha$, bilden die χ_α, $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, ein orthogonales System in $L^2_k(T^n,\mathbb{C})$ (bezüglich des Skalarprodukts $\langle\,,\,\rangle_k$). Die L^2_k-Konvergenz $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(\alpha)\chi_\alpha$, $f\in C^\infty(T^n,\mathbb{C})$, bedeutet nun, daß die Vektoren

$$\frac{\chi_\alpha}{\|\chi_\alpha\|_k}$$

eine Hilbert-Basis von $L^2_k(T^n,\mathbb{C})$ bilden, wobei $\|\chi_\alpha\|_k = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})^{1/2}$. Wir behaupten, daß

$$\langle f, \chi_\alpha\rangle_k = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})\,\hat{f}(\alpha)$$

für <u>alle</u> $f\in L^2_k(T^n,\mathbb{C})$. Als lineare Funktion von f, ist die linke Seite stetig auf $L^2_k(T^n,\mathbb{C})$, während die rechte Seite L^2-stetig ist und somit auch L^2_k-stetig. Da die beiden Seiten für $f\in C^\infty(T^n,\mathbb{C})$ übereinstimmen, folgt unsere Behauptung.

Deshalb haben wir $\|f\|_k^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} |\langle f, \frac{\chi_\alpha}{\|\chi_\alpha\|_k}\rangle_k|^2 =$

$= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k}) |\hat{f}(\alpha)|^2$, sowie

(wegen der Relation zwischen $\langle\,,\rangle_k$ und $\|\cdot\|_k$),

$$\langle f, h\rangle_k = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k}) \hat{f}(\alpha)\overline{\hat{h}(\alpha)}$$

für <u>beliebige</u> $f, h \in L_k^2(T^n, \mathbb{C})$.

Für $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{v}(\alpha) = v(\overline{\chi}_\alpha),$$

was für $v \in L^2(T^n, \mathbb{C})$ mit der ursprünglichen Definition übereinstimmt. Liegt v in $L_{-k}^2(T^n, \mathbb{C})$, $k>0$, so ist v ein stetiges Funktional $L_k^2(T^n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ und $\|v\|_{-k}$ ist die entsprechende Funktionalnorm. Dabei muß es genau ein $f \in L_k^2(T^n, \mathbb{C})$ geben mit $\langle h, \overline{f}\rangle_k = v(h)$ für alle $h \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$, und

dann $\|v\|_{-k} = \|f\|_k$. Setzt man $h = \overline{\chi}_\alpha$, so hat man hier $\hat{v}(\alpha) = v(\overline{\chi}_\alpha) =$

$= \langle \overline{\chi}_\alpha, \overline{f}\rangle_k = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k}) \hat{f}(\alpha)$.

Da $\|v\|_{-k}^2 = \|f\|_k^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k}) |\hat{f}(\alpha)|^2$, folgt nun, daß

$$\|v\|_{-k}^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})^{-1} |\hat{v}(\alpha)|^2$$

für alle $v \in L_{-k}^2(T^n, \mathbb{C})$, $k>0$. Außerdem haben wir (vgl. S. 213-214)

$v = P_k f$ (wobei jeder Differentialoperator P auf T^n in $C^\infty(T^n, \mathbb{C})$ operiert nach der Formel $Pf = P(\mathrm{Re} f) + i\,P(\mathrm{Im} f)$).

Es ist also, für $f \in L_k^2(T^n, \mathbb{C})$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n$,

$$(P_k f)^\wedge(\alpha) = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k}) \hat{f}(\alpha).$$

Aus der Formel für $\|v\|_{-k}^2$ folgt, daß

$$\langle v, w\rangle_{-k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})^{-1} \hat{v}(\alpha)\overline{\hat{w}(\alpha)}$$

für beliebige $v, w \in L^2_{-k}(T^n; \mathbb{C})$. Deshalb ist $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ ein orthogonales System in $L^2_{-k}(T^n;\mathbb{C})$. Also muß $\{\chi_\alpha/\|\chi_\alpha\|_{-k}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ eine Hilbert-Basis von $L^2_{-k}(T^n, \mathbb{C})$ sein (weil, z. B., $P_k(\chi_\alpha/\|\chi_\alpha\|_k) = \chi_\alpha/\|\chi_\alpha\|_{-k}$ und P_k bekanntlich eine Isometrie $L^2_k(T^n, \mathbb{C}) \to L^2_{-k}(T^n;\mathbb{C})$ ist).

Sei $\mathcal{H}_k$ der komplexe Vektorraum aller Abbildungen $\omega: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ mit $\|\omega\|_{\mathcal{H}_k} < \infty$, wobei

$$\|\omega\|^2_{\mathcal{H}_k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2|k|})^{\operatorname{sign}(k)} |\omega(\alpha)|^2.$$

Die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_k}$ in $\mathcal{H}_k$ ist durch das Skalarprodukt $\langle \omega, \eta\rangle_{\mathcal{H}_k} = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2|k|})^{\operatorname{sign}(k)} \omega(\alpha)\overline{\eta(\alpha)}$ bestimmt ($\omega, \eta \in \mathcal{H}_k$). Dabei ist $k\in\mathbb{Z}$ beliebig. Sei $\mathcal{F}_k: L^2_k(T^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}_k$ die "Fourier-Transformation" mit $(\mathcal{F}_k v)(\alpha) = \hat{v}(\alpha)$, $v\in L^2_k(T^n, \mathbb{C})$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n$. Offenbar

ist $\mathcal{F}_k$ eine isometrische lineare Abbildung. Wir behaupten, daß $\mathcal{F}_k$ surjektiv ist (und somit eine lineare Isometrie). Ist nämlich $\omega\in\mathcal{H}_k$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\omega(\alpha)\chi_\alpha$ im Hilbert-Raum $L^2_k(T^n, \mathbb{C})$ (weil sie eine orthogonale Reihe ist mit $\sum_\alpha \|\omega(\alpha)\chi_\alpha\|^2_k = \|\omega\|^2_{\mathcal{H}_k} < \infty$. Ist $v\in L^2_k(T^n, \mathbb{C})$ die Summe dieser Reihe, so $\langle v, \chi_\alpha\rangle_k = \omega(\alpha)\|\chi_\alpha\|^2_k = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2|k|})^{\operatorname{sign} k}\omega(\alpha)$ und somit $\hat{v}(\alpha) = \omega(\alpha)$, weil $\langle v, \chi_\alpha\rangle_k = (1+\dots+|\alpha|^{2|k|})^{\operatorname{sign} k}\hat{v}(\alpha)$.

Für $v\in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ und $k\in\mathbb{Z}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $v\in L^2_k(T^n, \mathbb{C})$

b) $\omega\in\mathcal{H}_k$, wobei $\omega(\alpha) = \hat{v}(\alpha)$.

<u>Beweis</u>. a) $\Rightarrow$ b): trivial. Setzen wir b) voraus, so gibt es $w\in L^2_k(T^n, \mathbb{C})$ mit $\mathcal{F}_k(w) = \omega$, d. h. $\hat{w}(\alpha) = \hat{v}(\alpha)$ für $\alpha\in\mathbb{Z}^n$. Deshalb ist $w(\chi_\alpha) = v(\chi_\alpha)$ für alle α. Da, für jedes

$\varphi \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$, $\varphi = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(\alpha) \chi_\alpha$ (eine C^∞-konvergente Reihe), folgt daraus, daß $v(\varphi) = w(\varphi)$ für alle φ, d.h. $w = v$ und $v \in L^2_k(T^n, \mathbb{C})$. Insbesondere haben wir bewiesen, daß jede Distribution $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ durch ihre Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt ist.

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gibt es $C_k, C_k' > 0$ mit

$$C_k'(1+|\alpha|^2)^k \leq (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2|k|})^{\operatorname{sign} k} \leq C_k(1+|\alpha|^2)^k$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ (Beweis: man finde $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty} (1+|\alpha|^2)^{-k}(1+\dots+|\alpha|^{2|k|})^{\operatorname{sign}(k)}$).

Definiert man für $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ die "Norm" $\|v\|_k' \in [0,\infty]$ durch $(\|v\|_k')^2 = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2)^k |\hat{v}(\alpha)|^2$, so ist $v \in L^2_k(T^n, \mathbb{C})$ genau dann, wenn $\|v\|_k' < \infty$ und, im Raum $L^2_k(T^n, \mathbb{C})$, sind die Normen $\|\cdot\|_k$ und $\|\cdot\|_k'$ äquivalent.

In den folgenden Abschätzungen können wir

also, statt $\|\cdot\|_k$, die "einfachere" Norm $\|\cdot\|_k'$ verwenden.

Für $k_0 > 0$ haben wir den formal selbstadjungierten Operator P_{k_0} der Ordnung $2k_0$ definiert, der eine lineare Isometrie $L^2_{k_0}(T^n, \mathbb{C}) \to L^2_{-k_0}(T^n, \mathbb{C})$ bildete. Wir behaupten, daß für jedes $s \in \mathbb{Z}$ die Distributionsfortsetzung von P_{k_0} ein linearer Homöomorphismus

$$P_{k_0} : L^2_{s+2k_0}(T^n, \mathbb{C}) \to L^2_s(T^n, \mathbb{C})$$ ist,

so daß es $C, C' > 0$ gibt mit

$$C'\|v\|_{s+2k_0} \leq \|P_{k_0} v\|_s \leq C\|v\|_{s+2k_0}$$

für alle $v \in L^2_{s+2k_0}(T^n, \mathbb{C})$. Dazu bemerken wir zunächst, daß

$$(P_{k_0} v)^\wedge(\alpha) = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k_0})\hat{v}(\alpha)$$

für alle $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$. Wie wir bereits wissen, gilt dies schon für $v \in L^2_{k_0}(T^n, \mathbb{C})$, insbesondere für $v = \varphi \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$.

Also $(P_{k_0} v)^\wedge(\alpha) = (P_{k_0} v)(\bar{\chi}_\alpha) = v(P_{k_0} \bar{\chi}_\alpha)$

(da $P_{k_0}^* = P_{k_0}$). Andererseits ist $(P_{k_0}\overline{\chi}_\alpha)^\wedge(\beta) =$

$$= \begin{cases} 0, & \beta \neq -\alpha \\ 1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k_0}, & \beta = -\alpha. \end{cases}$$ Somit haben wir die C^∞-konvergente Reihe $P_{k_0}\overline{\chi}_\alpha =$

$$= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} (P_{k_0}\overline{\chi}_\alpha)^\wedge(\beta)\chi_\beta = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k_0})\chi_{-\alpha}$$

und $(P_{k_0}v)^\wedge(\alpha) = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k_0})\, v(\chi_{-\alpha}) =$

$= (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k_0})\,\hat{v}(\alpha)$. Also ist

$$(\|P_{k_0}v\|_s')^2 = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^s (1+\dots+|\alpha|^{2k_0})^2 |\hat{v}(\alpha)|^2,$$

woher

$$\tilde{C}'\|v\|_{s+2k_0}' \leq \|P_{k_0}v\|_s' \leq \tilde{C}\|v\|_{s+2k_0}'$$

und unsere Ungleichung folgt. Um zu beweisen, daß $P_{k_0} : L^2_{s+2k_0}(T^n, \mathbb{C}) \to L^2_s(T^n, \mathbb{C})$ surjektiv ist, nehmen wir $w \in L^2_s(T^n, \mathbb{C})$ und setzen $\omega(\alpha) = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k_0})^{-1}\hat{w}(\alpha)$. Da $\|w\|_s < \infty$, ist $\|\omega\|_{\mathcal{H}_{s+2k_0}} < \infty$ und es muß $v \in L^2_{s+2k_0}(T^n, \mathbb{C})$ geben mit $\hat{v}(\alpha) = \omega(\alpha)$. Also, $(P_{k_0}v)^\wedge(\alpha) = \hat{w}(\alpha)$, woher $P_{k_0}v = w$.

LEMMA 12 (Verallgemeinerte Ungleichung von Friedrichs auf dem Torus). Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf dem Torus T^n, $s \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es $C > 0$ mit

$$\|f\|_{s+k} \leq C(\|Pf\|_s + \|f\|_s)$$

für alle $f \in L^2_{s+k}(T^n, \mathbb{C})$.

<u>Beweis</u>. Wählen wir $k_0 > 0$ mit $s+2k_0 > 0$. Dann gibt es $v \in L^2_{s+k+2k_0}(T^n, \mathbb{C})$ mit $P_{k_0}v = f$. Also

$$\|f\|_{s+k} \leq C_1\|v\|_{s+k+2k_0} \leq$$

$$\leq C_2(\|Pv\|_{s+2k_0} + \|v\|_{s+2k_0})$$

(wegen der ursprünglichen Ungleichung von Friedrichs und der obigen Abschätzungen für P_{k_0}). Nun ist $\|v\|_{s+2k_0} \leq C_3\|P_{k_0}v\|_s = C_3\|f\|_s$. Andererseits ist $\|Pv\|_{s+2k_0} \leq \leq C_3\|P_{k_0}Pv\|_s \leq C_3(\|PP_{k_0}v\|_s + \|(P_{k_0}P - PP_{k_0})v\|_s)$.

Offenbar, $\|PP_{k_0}v\|_s = \|Pf\|_s$. Da $P_{k_0}P - PP_{k_0}$ ein Operator der Ordnung $k+2k_0-1$ ist, gilt $C_3\|(P_{k_0}P - PP_{k_0})v\|_s \leq$

$\leq C_4 \|v\|_{s+k+2k_0-1} \leq C_5 \|P_{k_0}v\|_{s+k-1} =$

$= C_5\|f\|_{s+k-1}$. Insgesamt

$$\|f\|_{s+k} \leq C_2C_3\|Pf\|_s + C_2C_5\|f\|_{s+k-1} +$$

$$+ C_2C_3\|f\|_s$$

(C_2, C_3, C_5 von f unabhängig). Für $k=1$ ist der Beweis beendet, während, für $k-1>0$, folgt unsere Behauptung aus

$$C_2C_5\|f\|_{s+k-1} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{s+k} + C_6\|f\|_s$$

(Folgerung 12).

q.e.d.

Sei $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| \leq 1$. Wegen der Projektion $\mathbb{R}^n \to T^n$ kann h als ein Element von T^n betrachtet werden, so daß wir für $y \in T^n$ die Summe $y + h \in \in T^n$ bilden können (Addition in der

Abelschen Gruppe T^n. Der lineare Operator $\tau_h: C^\infty(T^n, \mathbb{C}) \to C^\infty(T^n, \mathbb{C})$ mit $(\tau_h f)(y) = f(y+h)$ ist C^∞-stetig und man hat den "formal adjungierten" Operator $\tau_h^* = \tau_{-h}$ $\left(\int_{T^n}\tau_h f\cdot\varphi = \int_{T^n} f\cdot\tau_{-h}\varphi\right)$.

τ_h besitzt also die stetige (bezüglich der schwachen Konvergenz) Fortsetzung $\tau_h: C^\infty(T^n, \mathbb{C})^* \to C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ mit $(\tau_h v)(\varphi) = v(\tau_{-h}\varphi)$, $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$, $\varphi \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$. Da $\tau_h\chi_\alpha = e^{i\langle h,\alpha\rangle}\chi_\alpha$, haben wir $(\tau_h v)^\wedge(\alpha) = e^{i\langle h,\alpha\rangle}\hat{v}(\alpha)$ und somit $\|\tau_h v\|_k = \|v\|_k$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. τ_h bildet $L^2_k(T^n, \mathbb{C})$ isometrisch auf sich ab. Für $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ und $h \neq 0$ mit $|h| \leq 1$ setzen wir

$$v^h = \frac{1}{|h|}(\tau_h v - v).$$

LEMMA 13. Sei $v \in L^2_s(T^n, \mathbb{C})$, $s \in \mathbb{Z}$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $v \in L^2_{s+1}(T^n, \mathbb{C})$

(ii) Es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $\|v^h\|'_s \leq C$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| \leq 1$, $h \neq 0$.

<u>Bemerkung</u>. Wie wir sehen werden, gilt im Fall (i) oder (ii) $\|v^h\|'_s \leq \|v\|'_{s+1}$.

<u>Beweis</u>. (i) $\to$ (ii). Da $(v^h)^\wedge(\alpha) = \frac{1}{|h|}(e^{i\langle h,\alpha\rangle} - 1)\hat{v}(\alpha)$ und $|e^{i\langle h,\alpha\rangle} - 1|^2 =$

$$= (\cos\langle h,\alpha\rangle - 1)^2 + \sin^2\langle h,\alpha\rangle =$$

$$= 2(1 - \cos\langle h,\alpha\rangle) = 4\sin^2\frac{\langle h,\alpha\rangle}{2},$$

ist $|(v^h)^\wedge(\alpha)|^2 = \frac{4}{|h|^2}\sin^2\frac{\langle h,\alpha\rangle}{2} \cdot |\hat{v}(\alpha)|^2$

und $(\|v^h\|'_s)^2 = \sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^s \frac{4}{|h|^2}\sin^2\frac{\langle h,\alpha\rangle}{2}|\hat{v}(\alpha)|^2 \leq$

$\leq \sum_\alpha (1+|\alpha|^2)^{s+1}|\hat{v}(\alpha)|^2 = (\|v\|'_{s+1})^2$, weil

$4\sin^2\frac{\langle h,\alpha\rangle}{2} \leq |h|^2|\alpha|^2$.

(ii) $\to$ (i): Für $h = t\partial_j$, $|t| \leq 1$, $t \neq 0$, haben wir, für alle $N \geq 0$

$$C^2 \geq \lim_{t\to 0} \sum_{|\alpha|\leq N} (1+|\alpha|^2)^s |(v^{t\partial_j})^\wedge(\alpha)|^2 =$$

$$= 4 \lim_{t\to 0} \sum_{|\alpha|\leq N} (1+|\alpha|^2)^s \frac{\sin^2(t\alpha^j/2)}{t^2}|\hat{v}(\alpha)|^2 =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq N} (1+|\alpha|^2)^s |\alpha_j|^2 |\hat{v}(\alpha)|^2. \text{ Also}$$

$$\sum_{|\alpha|\leq N} (1+|\alpha|^2)^{s+1}|\hat{v}(\alpha)|^2 \leq nC^2 + (\|v\|'_s)^2,$$

und $(\|v\|'_{s+1})^2 \leq nC^2 + (\|v\|'_s)^2 < \infty$.

q.e.d.

LEMMA 14 (Regularitätssatz für elliptische Operatoren auf dem Torus). Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf dem Torus T^n und $v \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})^*$ eine Distribution mit

$Pv \in L^2_s(T^n, \mathbb{C})$, $s \in \mathbb{Z}$. Dann liegt v in $L^2_{s+k}(T^n, \mathbb{C})$.

Beweis. Es genügt, die folgende Implikation zu beweisen:

Ist $q \in \mathbb{Z}$, $v \in L^2_{q+k}(T^n, \mathbb{C})$ und $Pv \in L^2_{q+1}(T^n, \mathbb{C})$, dann $v \in L^2_{q+k+1}(T^n, \mathbb{C})$.

Die Voraussetzung dieser Implikation ist nämlich durch mindestens ein $q < s$ erfüllt (Aufgabe X.1.(iii)), so daß wir nach endlich vielen Schritten $v \in L^2_{s+k}(T^n, \mathbb{C})$ erreichen. Wir brauchen das folgende

Lemma. Sei Q ein Differentialoperator der Ordnung $k \geq 0$ auf T^n, $s \in \mathbb{Z}$. Q hat die Darstellung

$$Qf = \overset{k}{\alpha}{}^{j_1 \cdots j_k} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f + \dots + \overset{1}{\alpha}{}^{j} \partial_j f + \overset{0}{\alpha} f.$$

Setzen wir

$$C_{Q,s} = \max_{\substack{0 \leq l \leq k \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n \\ 0 \leq m \leq |s| \\ 1 \leq p_1, \dots, p_m \leq n}} \sup_{T^n} |\partial_{p_1} \cdots \partial_{p_m} \overset{l}{\alpha}{}^{j_1 \cdots j_l}|.$$

Dann gibt es eine von Q unabhängige Konstante $C_0 = C_0(n, k, s)$ mit

$$\|Qf\|_s \leq C_0 C_{Q,s} \|f\|_{s+k}, \text{ für } f \in L^2_{s+k}(T^n, \mathbb{C}).$$

Beweis des Lemmas.* a) Sei $s \geq 0$. Wegen der Leibniz-Regel ist, für $m \leq s$,

$$|\partial_{p_1} \cdots \partial_{p_m} Qf| \leq \tilde{C}_0 C_{Q,s} \sum_{\substack{l=1 \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}}^{k} |\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_l} f|$$

woher unsere Ungleichung durch Integration folgt.

b) Sei $s < 0$, $k + s \leq 0$. Für $\varphi \in C^\infty(T^n, \mathbb{C})$ ist

$$\left|\int_{T^n} Qf \cdot \varphi\right| = \left|\int_{T^n} f \cdot Q^* \varphi\right| \leq \|f\|_{s+k} \|Q^* \varphi\|_{-s-k} \leq$$

$$\leq \tilde{C}_0 C_{Q^*, -s-k} \|f\|_{s+k} \|\varphi\|_{-s}$$

(vgl. Fall a) mit Q^* statt Q und $-s-k \geq 0$ statt s). Die "Koeffizienten" von Q^* entstehen aus denen von Q sowie deren Ableitungen bis zur Ordnung k durch "universelle" algebraische Operationen (vgl. die Be-

---

* Wir dürfen $f \in C^\infty$ voraussetzen; die Behauptung für $f \in L^2_{s+k}$ folgt dann wegen Stetigkeit

schreibung von Q^* durch partielle Integrationen), woher $C_{Q^*,-s-k} \leq \tilde{\tilde{C}}_0 C_{Q,s}$ und $|\int_{T^n} Qf\cdot\varphi| \leq$

$\leq C_0 C_{Q,s} \|f\|_{s+k} \|\varphi\|_{-s}$, für alle $\varphi \in C^\infty(T^n;\mathbb{C})$, also $\|Qf\|_s \leq C_0 C_{Q,s} \|f\|_{s+k}$.

c) Sei $s<0$, $k+s>0$. Wegen partieller Integration ist $\int_{T^n} Qf\cdot\varphi$ eine Summe der Ausdrücke*

$$\int_{T^n} \left(\overset{l}{A}{}^{j_1\cdots j_{k-|s|};q_1\cdots q_l}\,\partial_{j_1}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\partial_{j_{k-|s|}} f\cdot\partial_{q_1\cdots q_l}\varphi\right) \text{ mit } 0\leq l\leq |s|,$$

wobei die $\overset{l}{A}{}^{j_1\cdots\cdots q_l}$ aus $\overset{k}{\alpha}{}^{j_1\cdots j_k},\ldots,\overset{0}{\alpha}$ und deren Ableitungen bis zur Ordnung $|s|$ durch universelle algebraische Operationen entstehen. Also, $|\overset{l}{A}{}^{j_1\cdots q_l}| \leq \tilde{C}_0 C_{Q,s}$ und, wegen der Schwarzschen (Hölderschen) Ungleichung für Integrale, $|\int_{T^n} Qf\cdot\varphi| \leq C_0 C_{Q,s}\|f\|_{k-|s|}\|\varphi\|_{|s|}$.

Daher ist $\|Qf\|_{|s|} = \|Qf\|_{-s} \leq C_0 C_{Q,s}\|f\|_{k-|s|} =$

* Wir dürfen annehmen, daß Q nur aus dem k-Symbol besteht

$= C_0 C_{Q,s}\|f\|_{s+k}$, womit das Lemma bewiesen ist.

Für $h\in\mathbb{R}^n$ mit $h\neq 0$ und $|h|\leq 1$, sei P^h der Operator auf T^n mit $P^h f =$
$= (\overset{k}{\alpha}{}^{j_1\cdots j_k})^h \partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f + \cdots + (\overset{0}{\alpha})^h f$ für $f\in C^\infty(T^n)$, wobei $Pf = \overset{k}{\alpha}{}^{j_1\cdots j_k}\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f + \cdots + \overset{0}{\alpha} f$. Für $\alpha\in C^\infty(T^n)$ ist

$$|\alpha^h| \leq \sup_{T^n}\left(|\partial_1\alpha| + \cdots + |\partial_n\alpha|\right).$$

Da die Differenzquotientenbildung $\alpha\to\alpha^h$ mit partiellen Differentiationen auf T^n vertauschbar ist, haben wir, für $s\in\mathbb{Z}$,

$$C_{P^h,s} \leq C_{P,|s|+1}$$

und somit

$$C_{P^h,s} \leq C_s$$

mit einer <u>von</u> h <u>unabhängigen</u> Zahl C_s. Außerdem gilt, für alle $v\in C^\infty(T^n,\mathbb{C})^*$,

$$P(v^h) = (Pv)^h - P^h(\tau_h v).$$

Diese Gleichung ist nämlich trivial durch $v\in C^\infty(T^n,\mathbb{C})$ erfüllt (eine rein algebraische

Tatsache) und somit gilt sie für beliebige v wegen der Definition der Operationen $v \to Pv$, $v \to v^h$, $v \to \tau_h v$: es ist $P^h = \frac{1}{|h|}(\tau_h P - P)$, $\tau_h P$ definiert koeffizientenweise, also $\tau_h(P^*) = (\tau_h P)^*$ und $(P^h)^* = (P^*)^h$. Für $\varphi \in C^\infty$ ist $(P^*\varphi)^{-h} = P^*(\varphi^{-h}) + (P^*)^{-h}(\tau_{-h}\varphi)$ (unsere Gleichung mit P^* statt P) und $P^{-h}(\tau_{-h}\varphi) = -\tau_{-h}(P^h\varphi)$ (trivial), woher $(P(v^h))(\varphi) = v((P^*\varphi)^{-h}) = v(P^*(\varphi^{-h})) + v((P^*)^{-h}(\tau_{-h}\varphi)) = (Pv)^h(\varphi) - v(\tau_{-h}((P^*)^h\varphi)) = ((Pv)^h - P^h(\tau_h v))(\varphi)$.

Sei nun $v \in L^2_{q+k}$, $Pv \in L^2_{q+1}$ (Voraussetzung der Implikation auf S. 261). Also $\|v^h\|'_{q+k} \leq C_1(\|P(v^h)\|'_q + \|v^h\|'_q)$ (Ungleichung von Friedrichs), und

$$\|v^h\|'_q \leq \|v\|'_{q+1}$$

(Lemma 13). Andererseits,
$\|P(v^h)\|'_q \leq \|(Pv)^h\|'_q + \|P^h(\tau_h v)\|'_q \leq$

$\leq \|Pv\|'_{q+1} + C_0 C_q \|\tau_h v\|'_{q+k} = \|Pv\|'_{q+1} + C_0 C_q \|v\|'_{q+k}$ (Lemma 13 und das Lemma auf S. 261 mit $C_{P^h,q} \leq C_q$). Insgesamt ist $\|v^h\|'_{q+k} \leq C$, wobei C von h nicht abhängt. Deshalb (vgl. Lemma 13) liegt v in L^2_{q+k+1}. Somit ist unsere Implikation bewiesen.

q. e. d.

Sei v eine Distribution auf der Mannigfaltigkeit M, $\mathcal{U} \subset M$ eine offene Teilmenge. Wir sagen, daß v <u>auf</u> $\mathcal{U}$ <u>verschwindet</u>, wenn $v(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M)$ mit Träger$(\varphi) \subset \mathcal{U}$ (Bezeichnung: $v_{\mathcal{U}} = 0$). Sind $\mathcal{U}_t \subset M$ ($t \in T$) offene Teilmengen, $v \in C_0^\infty(M)^*$ eine Distribution mit $v_{\mathcal{U}_t} = 0$ für jedes t und $\mathcal{U} = \bigcup_{t \in T} \mathcal{U}_t$, so ist auch $v_{\mathcal{U}} = 0$; für jedes $\varphi \in C_0^\infty(M)$ mit Träger$(\varphi) \subset \mathcal{U}$ finden wir nämlich endlich viele $\varphi_\alpha \in C_0^\infty(M)$ mit Träger$(\varphi_\alpha) \subset \mathcal{U}_{t(\alpha)}$, $t(\alpha) \in T$ und

$\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ auf Träger(φ), woher $\varphi =$
$= \sum_\alpha \varphi_\alpha \varphi$ und $v(\varphi) = \sum_\alpha v(\varphi_\alpha \varphi) = 0$.

Die Vereinigung $\mathcal{U}_0$ aller offenen Mengen $\mathcal{U} \subset M$ mit $v_{\mathcal{U}} = 0$ ist also die größte offene Menge mit dieser Eigenschaft; das Komplement Träger$(v) = M \setminus \mathcal{U}_0$ nennt man den Träger der Distribution v.

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} \subset M$ eine offene Untermannigfaltigkeit, $A \subset \mathcal{U}$ eine kompakte Menge, $k < 0$. Dann sind die "Normen" $v \to \|v\|_k$ und $v \to \|v_{\mathcal{U}}\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})}$ im Raum aller Distributionen v mit Träger$(v) \subset A$ äquivalent. Einerseits ist nämlich $\|v_{\mathcal{U}}\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \leq \|v\|_k$ (S. 218), andererseits gibt es $\psi \in C_0^\infty(M)$ mit Träger$(\psi) \subset \mathcal{U}$ und $\psi = 1$ auf einer Umgebung von A. Für v mit Träger$(v) \subset A$ und $\varphi \in C_0^\infty(M)$ ist also $v = \psi v$ und $|v(\varphi)| = |\psi v(\varphi)| =$
$= |v(\psi\varphi)| \leq \|v_{\mathcal{U}}\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \|\psi\varphi\|_{-k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} =$

$= \|v_{\mathcal{U}}\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \|\psi\varphi\|_{-k} \leq C \|v_{\mathcal{U}}\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} \|\varphi\|_{-k}$,

woher $\|v\|_k \leq C \|v_{\mathcal{U}}\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})}$. Falls $k \geq 0$, ist sogar $\|v_{\mathcal{U}}\|_{k,(\mathcal{U},g_{\mathcal{U}})} = \|v\|_k$ für $v \in C_0^\infty(M)^*$ mit Träger$(v) \subset A$ (S. 215). Deshalb gilt, für $M, \mathcal{U}$ wie oben und für $v \in C_0^\infty(M)^*$ mit kompaktem in $\mathcal{U}$ enthaltenem Träger, $v \in L_k^2(M,g)$ genau dann wenn $v \in L_k^2(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$, und die beiden Bedingungen hängen von g nicht ab.

Sei nun P ein Differentialoperator der Ordnung $k \geq 0$ auf M, $s \in \mathbb{Z}$, $v \in L_s^2(M,g)$ eine Distribution mit kompaktem Träger. Dann ist $Pv \in L_{s-k}^2(M,g)$. Wir finden nämlich eine offene, relativ kompakte Untermannigfaltigkeit $\mathcal{U} \subset M$ mit Träger$(v) \subset \mathcal{U}$ und $\psi \in C_0^\infty(M)$ mit Träger$(\psi) \subset \mathcal{U}$ und $\psi = 1$ auf einer Umgebung von Träger(v), sowie $f_m \in C_0^\infty(M)$ mit $f_m \to v$ in $L_s^2(M,g)$.

Dann $\psi f_m \to \psi v = v$ in L^2_s und Träger $(\psi f_m) \subset U$. Wegen (ii) von Lemma 10 ist $P(\psi f_m) \to Pv$ in L^2_{s-k} (vgl. S. 219), insbesondere, $Pv \in L^2_{s-k}(M,g)$.

Wir sagen, daß die Distribution $v \in C_0^\infty(M)^*$ auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) <u>lokal in L^2_s liegt</u>, wenn $\varphi v \in L^2_s(M,g)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Da Träger$(\varphi v)$ kompakt ist, hängt diese Eigenschaft von g nicht ab; wir können also mit $L^2_{s,loc}(M)$ den Vektorraum aller lokal in L^2_s liegenden Distributionen auf M bezeichnen. Es ist offenbar $L^2_{s_1,loc}(M) \subset L^2_{s_2,loc}(M)$ falls $s_1 \geqslant s_2$ und $C^\infty(M) = \bigcap\limits_{s \in \mathbb{Z}} L^2_{s,loc}(M)$.

Wir behaupten, daß für jeden Differentialoperator P der Ordnung $k \geqslant 0$ auf M

und für $v \in L^2_{s+k,loc}(M)$, ist $Pv \in L^2_{s,loc}(M)$. <u>Beweis</u>: Induktion bezüglich k. Ist $k=0$, so $Pv = \alpha v$, $\alpha \in C^\infty(M)$, woher * $\varphi(Pv) = (\alpha\varphi)v \in L^2_s(M,g)$ falls $v \in L^2_{s,loc}(M)$, und somit $Pv \in L^2_{s,loc}(M)$. Induktiver Schritt: hat P die Ordnung k, $v \in L^2_{s+k,loc}(M)$, $\varphi \in C_0^\infty(M)$, so $\varphi Pv = P(\varphi v) + P'v$, wobei P' ein Differentialoperator der Ordnung $k-1$ ist, dessen "Koeffizienten" außerhalb Träger(φ) verschwinden. Nun hat $P'v \in L^2_{s+1,loc}(M)$ kompakten Träger, woher $P'v \in L^2_{s+1}(M,g) \subset L^2_s(M,g)$. Andrerseits hat $\varphi v \in L^2_{s+k}(M,g)$ kompakten Träger, und somit $P(\varphi v) \in L^2_s(M,g)$, d. h., $\varphi Pv \in L^2_s(M,g)$, für alle φ, was unsere Behauptung beweist.

Sei U eine offene Mannigfaltigkeit von M, $v \in C_0^\infty(U)^*$ eine Distribution mit kompaktem Träger. Es gibt dann genau eine Distribution

---

* für jedes $\varphi \in C_0^\infty(M)$

$\tilde{v}$ auf M mit $\tilde{v}_{\mathcal{U}} = v$ und $\tilde{v}_{(M \setminus \text{Träger}(v))} = 0$. Eindeutigkeit: die Differenz zweier solchen $\tilde{v}$ verschwindet auf $\mathcal{U}$ und auf $M \setminus \text{Träger}(v)$ (vgl. S.266). Existenz: wählen wir $\psi \in C_0^\infty(M)$ mit $\text{Träger}(\psi) \subset \mathcal{U}$, $\psi = 1$ auf einer Umgebung von $\text{Träger}(v)$; dann setzen wir, für $\varphi \in C_0^\infty(M)$, $\tilde{v}(\varphi) = v(\psi\varphi)$. Wir werden $\tilde{v}$ die <u>triviale Fortsetzung</u> von v nennen und, statt $\tilde{v}$, wieder v schreiben.

LEMMA 15. Sei P ein elliptischer Operator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf der Mannigfaltigkeit M, $v \in C_0^\infty(M)^*$. Ist $v \in L^2_{s+k,\,loc}(M)$, $s \in \mathbb{Z}$, und $Pv \in L^2_{s+1,\,loc}(M)$, so ist $v \in L^2_{s+k+1,\,loc}(M)$.

<u>Beweis</u>. Es genügt zu zeigen, daß $\varphi v \in L^2_{s+k+1}(M,g)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M)$

mit "kleinen" Trägern, d.h. $\text{Träger}(\varphi) \subset \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}'$, $\mathcal{U}$ offen, wobei $\mathcal{U}'$ der Definitionsbereich eines relativ kompakten Koordinatensystems ist; jedes $\varphi \in C_0^\infty(M)$ ist nämlich eine endliche Summe von solchen Funktionen. Wählen wir $\psi \in C_0^\infty(M)$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\text{Träger}(\psi) \subset \mathcal{U}'$, $\psi = 1$ auf einer Umgebung von $\mathcal{U}$. Wir dürfen annehmen, daß $\mathcal{U}' \subset T^n$, $n = \dim M$. Da $\varphi v \in L^2_{s+k}(M,g)$ kompakten Träger in $\mathcal{U}$ hat, kann man es zu einer Distribution auf T^n trivial fortsetzen und dabei $\varphi v \in L^2_{s+k}(T^n)$ (S.268). Genauso ist $\varphi P v \in L^2_{s+1}(T^n)$, $\psi v \in L^2_{s+k}(T^n)$. Sei P_0 ein elliptischer Differentialoperator* der wesentlichen Ordnung k auf T^n (z.B. $P_0 f = \sigma_P^{j_1 \dots j_k}(y_0)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} f$, $y_0 \in \mathcal{U}$ fest). Dann ist $\tilde{P} = \psi P + (1-\psi) P_0$ ein elliptischer Operator auf T^n mit $\tilde{P} = P$ auf einer Um-

---

* mit demselben Vorzeichen des Symbols wie P

gebung von U. Also

$$\tilde{P}(\varphi v) = P(\varphi v) = \varphi P v + P' v$$

wobei P' ein Operator der Ordnung $k-1$ auf T^n ist, der außerhalb Träger(φ) verschwindet. Somit ist $P'v = P'(\psi v) \in L^2_{s+1}(T^n)$ und $\tilde{P}(\varphi v) \in L^2_{s+1}(T^n)$, woher, nach Lemma 14, $\varphi v \in L^2_{s+k+1}(T^n)$. Da φv kompakten Träger in $U \subset M$ hat, ist auch $\varphi v \in L^2_{s+k+1}(M)$.

q. e. d.

SATZ 16 (Regularitätssatz für elliptische Operatoren). Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf der Mannigfaltigkeit M, $v \in C_0^\infty(E)^*$, $s \in \mathbb{Z}$. Ist $Pv \in L^2_{s,loc}(M)$, so liegt v in $L^2_{s+k,loc}(M)$.

<u>Beweis</u>. Sei $\varphi \in C_0^\infty(M)$ beliebig, $\varphi_0 \in C_0^\infty(M)$ eine Funktion mit $\varphi_0 = 1$ auf einer Umgebung von Träger(φ). Da Träger$(\varphi_0 v)$ kompakt ist, gibt es $m_0 < s$ mit $\varphi_0 v \in L^2_{m_0+k}(M,g)$ (Aufgabe X.1.(iii)). Wählen wir $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{s-m_0} \in C_0^\infty(M)$ mit $\varphi_{s-m_0} = \varphi$ und $\varphi_i = 1$ auf einer Umgebung von Träger(φ_{i+1}), $i = 0, \ldots, s-m_0-1$. Wir behaupten, daß $\varphi_i v \in L^2_{m_0+k+i}(M,g)$ für $i = 0, 1, \ldots, s-m_0$. Für $i=0$ haben wir es schon. Induktiver Schritt: sei $\varphi_i v \in L^2_{m_0+k+i}(M,g)$, $0 \leq i < s-m_0$.

Es ist $P(\varphi_{i+1} v) = \varphi_{i+1} P v + P_i' v$, wobei P_i' die Ordnung $k-1$ hat und außerhalb Träger(φ_{i+1}) verschwindet. Also $P_i' v = P_i'(\varphi_i v)$ und, da $\varphi_i v \in L^2_{m_0+k+i}(M,g)$ kompakten Träger hat, $P_i'(\varphi_i v) \in L^2_{m_0+i+1}(M,g)$ (S. 268). Andererseits,

$\varphi_{i+1} Pv \in L^2_s(M,g) \subset L^2_{m_0+i+1}(M,g)$

und somit $P(\varphi_{i+1} v) \in L^2_{m_0+i+1}(M,g)$.

Da aber $\varphi_{i+1} v = \varphi_{i+1}\varphi_i v \in L^2_{m_0+k+i}(M,g)$, folgt aus Lemma 15, daß $\varphi_{i+1} v \in$ $\in L^2_{m_0+k+i+1,loc}(M)$, also $\varphi_{i+1} v =$ $= \varphi_i \varphi_{i+1} v \in L^2_{m_0+k+i+1}(M,g)$, was den induktiven Schritt liefert. Insbesondere ist, für $i = s - m_0$, $\varphi v = \varphi_{s-m_0} v \in$ $\in L^2_{s+k}(M,g)$, für jedes $\varphi \in C^\infty_0(M)$.

q. e. d.

FOLGERUNG 17. Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf der Mannigfaltigkeit M, $v \in C^\infty_0(M)^*$ mit $Pv \in C^\infty(M)$ (z. B. $Pv = 0$). Dann ist $v \in C^\infty(M)$.

Beweis: Aus Satz 16 mit $C^\infty(M) = \bigcap_{s\in\mathbb{Z}} L^2_{s,loc}(M)$.

q. e. d.

FOLGERUNG 18. Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf der kompakten Mannigfaltigkeit M, $v \in C^\infty(M)^*$, $s \in \mathbb{Z}$. Ist $Pv \in L^2_s(M)$, dann liegt v in $L^2_{s+k}(M)$.

Beweis: Satz 16 mit $L^2_s(M) = L^2_{s,loc}(M)$ für kompakte Mannigfaltigkeiten M.

q. e. d.

FOLGERUNG 19. Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$. Dann ist das Bild von

$$P: L^2_{s+k}(M) \to L^2_s(M)$$

das L^2-Orthogonalkomplement des endlich dimensionalen Raumes Kern $P^* \subset$ $\subset C^\infty(M) \subset L^2_s(M)$.

Beweis. Da P^* ebenfalls elliptisch ist, ist $\dim \text{Kern } P^* < \infty$ und Kern $P^* \subset C^\infty(M)$ (Folgerungen 13 und 17). Wegen der Inklusion $L^2_{s+k} \subset L^2_k$ ist auch $P(L^2_{s+k}) \underset{L^2}{\perp}$ Kern P^* (Folgerung 16). Ist umgekehrt $h \in L^2_s(M)$ mit $h \underset{L^2}{\perp}$ Kern P^*, so gibt es $v \in L^2_k(M)$ mit $Pv = h$ (wegen Folgerung 16 mit $L^2_s \subset L^2$), woher $v \in L^2_{s+k}(M)$ (Folgerung 18).

q. e. d.

FOLGERUNG 20. Unter den Voraussetzungen von Folgerung 19 ist das Bild von

$$P: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

das L^2-Orthogonalkomplement des endlich dimensionalen Raumes Kern $P^* \subset C^\infty(M)$.

Beweis: Wie bei Folgerung 19.

q. e. d.

Bemerkung. Sei P ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ auf der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Für $s \in \mathbb{Z}$ mit $s \geq 0$ haben wir $L^2_{s+k}(M) = \text{Kern } P \oplus V_{s+k}$, $C^\infty(M) = \text{Kern } P \oplus V_\infty$, $L^2_s(M) = \text{Kern } P^* \oplus W_s$, $C^\infty(M) = \text{Kern } P^* \oplus W_\infty$, wobei V_{s+k}, V_∞,

W_s, W_∞ das L^2-Orthogonalkomplement von Kern P (bzw. von Kern P^*) in $L^2_{s+k}(M)$ (bzw. in $C^\infty(M)$, $L^2_s(M)$, $C^\infty(M)$) ist. Die Existenz dieser Zerlegungen folgt daraus, daß alle betreffenden Räume in $L^2(M)$ enthalten sind und die beiden Kerne endlich dimensional, also abgeschlossen sind (vgl. Folgerungen 13 und 17). Nun operiert P folgendermaßen:

$$L^2_{s+k}(M) = \text{Kern } P \oplus V_{s+k} \xrightarrow[P]{} \text{Kern } P^* \oplus W_s = L^2_s(M)$$

$$C^\infty(M) = \text{Kern } P \oplus V_\infty \xrightarrow[P]{} \text{Kern } P^* \oplus W_\infty = C^\infty(M).$$

Dabei

$$P = 0 \text{ auf Kern } P,$$

$$P: V_{s+k} \to W_s, \text{ sowie } P: V_\infty \to W_\infty$$

sind Isomorphismen.

LEMMA 16. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $h \in C^\infty(M)$.

(i) Ist f_i, $i = 1, \ldots, N$, eine endliche L^2-orthonormale Folge von Eigenfunktionen von Δ, so

$$h = \psi + \varphi$$

wobei $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$, $\psi = \sum_{i=1}^{N} \langle h, f_i \rangle_{L^2} f_i$

und $\langle \varphi, f_i \rangle_{L^2} = 0$, $i = 1, \dots, N$.

(ii) Sei f_i, $i = 1, 2, \dots$, eine unendliche L^2-orthonormale Folge von Eigenfunktionen von Δ. Dann ist

$$h = \psi + \varphi$$

wobei $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$; $\langle \varphi, f_i \rangle_{L^2} = 0$ für alle i und $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, f_i \rangle_{L^2} f_i$ (C^∞-konvergente Reihe), d.h., für $\psi_m = \sum_{i=1}^{m} \langle h, f_i \rangle_{L^2} f_i$, $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \psi$ in C^∞.

<u>Beweis</u>. (i): trivial. (ii): Für $h \in C^\infty(M) \subset L^2(M)$ konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \langle h, f_i \rangle_{L^2} f_i$ in L^2 gegen eine Funktion $\psi \in L^2(M)$ mit $\langle \psi, f_i \rangle_{L^2} = \langle h, f_i \rangle_{L^2}$, $i = 1, 2, \dots$ (Aufgabe IX.3.(iii)), woher $h = \psi + \varphi$ mit $\varphi \in L^2(M)$, $\langle \varphi, f_i \rangle_{L^2} = 0$ für alle i und

$\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \psi$ in L^2 ($\psi_m \in C^\infty(M)$ definiert wie oben). Dasselbe gilt wenn man h durch $\Delta^k h$ ersetzt ($k \geq 0$): wir haben die L^2-Konvergenz

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i \leq m} \langle \Delta^k h, f_i \rangle_{L^2} f_i =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{i \leq m} \langle h, \Delta^k f_i \rangle_{L^2} f_i = \lim_{m\to\infty} \sum_{i \leq m} \lambda_i^k \langle h, f_i \rangle_{L^2} f_i =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \Delta^k \psi_m, \text{ wobei } \Delta f_i = \lambda_i f_i.$$

Wegen der Ungleichung von Friedrichs für den elliptischen Operator Δ^k ist

$$\|\psi_m - \psi_{m'}\|_{2k} \leq C_k \left(\|\Delta^k \psi_m - \Delta^k \psi_{m'}\|_{L^2} + \|\psi_m - \psi_{m'}\|_{L^2} \right).$$

Somit ist ψ_m eine L^2_{2k}-Cauchy-Folge, für jedes $k \geq 0$, d.h. (vgl. Satz 13), $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \psi$ in C^∞ und $\psi \in C^\infty(M)$.

q.e.d.

<u>Bemerkung</u>. Für den obigen Beweis braucht man nicht die allgemeine Form der Unglei-

chung von Friedrichs: für Δ^k kann diese Ungleichung ziemlich leicht direkt bewiesen werden, wobei man die partielle Integration und die Ricci-Identität für beliebige Tensorfelder anwendet (Aufgabe $\underline{X}$.4).

SATZ 17. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Die Eigenwerte von Δ bilden eine unendliche Folge

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

mit $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = \infty$.

(ii) Für jeden Eigenwert von Δ ist der entsprechende Eigenraum endlich dimensional.

(iii) Die direkte Summe aller Eigenräume von Δ ist ein dichter Unterraum von $L^2(M)$; wenn man also in jedem Eigenraum eine L^2-orthonormale Basis auswählt, bilden diese Basen zusammen ein vollständiges orthonormales System in $L^2(M,g)$. Die Eigenräume von Δ sind paarweise L^2-orthogonal.

Beweis. Sei V die direkte Summe aller Eigenräume von Δ, $\overline{V}$ die L^2-Abschließung von V, $V^\perp$ das L^2 Orthogonalkomplement von V. Da $\Delta^* = \Delta$, sind die Eigenräume von Δ paarweise L^2-orthogonal. (ii) folgt aus Folgerung 8. Deshalb kann man eine (endliche oder unendliche) L^2-orthonormale Basis f_i von V finden, die aus Eigenfunktionen von Δ besteht. Wegen Lemma 16 ist, für $h \in C^\infty(M)$, $h = \psi + \varphi$, $\psi \in C^\infty(M) \cap \overline{V}$, $\varphi \in C^\infty(M) \cap V^\perp$. Wäre V nicht dicht in $L^2(M)$, also nicht L^2 dicht in $C^\infty(M)$, so können wir also eine C^∞-Funktion $h \in V^\perp$ finden, die nicht identisch verschwindet. Sei

$$\lambda = \inf\left\{ \int_M |\nabla h|^2 : h \in C^\infty(M) \cap V^\perp, \|h\|_{L^2} = 1 \right\}$$

und wählen wir $h_m \in C^\infty(M) \cap V^\perp$ mit $\|h_m\|_{L^2} = 1$, $\int_M |\nabla h_m|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda$. Die Folge h_m ist L_1^2-beschränkt; ersetzen wir sie durch eine geeignete Teilfolge, so dürfen wir annehmen*, daß $h_m \to f$ in L^2 mit $f \in L^2(M)$; dabei ist $\|f\|_{L^2} = 1$ und $f \in V^{\perp}$.

Die symmetrische Bilinearform $\mathcal{B}$ in $C^\infty(M) \cap V^{\perp}$ mit

$$B(\varphi, \psi) = \int_M g(\nabla\varphi, \nabla\psi) - \lambda \int_M \varphi\psi$$

ist positiv semidefinit (Definition von λ) und $B(h_m, h_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Deshalb gilt $B(h_m, \varphi) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ für alle $\varphi \in C^\infty(M) \cap V^{\perp}$ (Aufgabe $\underline{\text{VIII}}$, 5). Für solche φ,

$$\int_M f(\Delta\varphi - \lambda\varphi) = \lim_m \int_M h_m(\Delta\varphi - \lambda\varphi) =$$
$$= \lim_m B(h_m, \varphi) = 0.$$

Ist $H \in C^\infty(M)$ beliebig, so $H = \psi + \varphi$, $\psi \in C^\infty(M)$, $\varphi \in C^\infty(M) \cap V^{\perp}$ und $\psi_m \to \psi$ in C^∞ mit $\psi_m \in V$. Also $\int_M f(\Delta H - \lambda H) =$

$$= \int_M f(\Delta\psi - \lambda\psi) = \lim_m \int_M f(\Delta\psi_m - \lambda\psi_m)$$

* Folgerung 7

(weil aus $\psi_m \to \psi$ in C^∞, $\Delta\psi_m - \lambda\psi_m \to \Delta\psi - \lambda\psi$ in L^2 folgt). Da aber $\psi_m, \Delta\psi_m \in V$ und $f \in V^{\perp}$, folgt, daß

$$\int_M f(\Delta H - \lambda H) = 0 \text{ für alle } H \in C^\infty(M).$$

Unser $f \in L^2(M)$ ist also eine Distributionslösung der Gleichung $\Delta f = \lambda f$; da $\Delta - \lambda \cdot Id$ elliptisch ist, muß $f \in C^\infty(M)$ sein (Folgerung 17). Somit ist $f \in V \cap V^{\perp} = \{0\}$, was mit $\|f\|_{L^2} = 1$ unvereinbar ist. Wegen dieses Widerspruchs muß V dicht in $L^2(M)$ sein.

V ist also unendlich dimensional, da $L^2(M)$ es ist (man kann beliebig große L^2-orthonormale, endliche Systeme bilden, indem man C^∞-Funktionen mit kleinen, paarweise disjunkten Trägern nimmt). Wegen (ii), besitzt Δ deshalb unendlich viele verschiedene Eigenwerte. Da jedes beschränkte Intervall von $\mathbb{R}$ nur endlich viele Eigenwerte von Δ enthalten darf (Folgerung 8), muß für die "geordnete" Folge λ_m der Eigenwerte $\lim_m \lambda_m = \infty$ sein.

q. e. d.

Sei nun (M,g) eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik. Betrachtet man M als ob es aus unendlich dünnem Blech gemacht wäre und nimmt an, daß sich auf M eine Menge Wärme befindet, so kann diese Wärme als ein Borelsches Maß μ auf M betrachtet werden: für jede Borelsche Menge $A \subset M$ ist $\mu(A)$ die gesamte in A enthaltene Wärmeenergie. Oft kommt es vor, daß μ absolut stetig ist, d.h. $\mu(A) = \int_A f \, v_g$ für alle Borelschen Mengen A, mit $f \in L^1(M)$; f kann dann als die Temperaturfunktion interpretiert werden. Die physikalische Temperatur ändert sich in der Zeit und ten-

diert dazu, konstant zu werden; d. h. statt $f \in L^1(M)$ müssen wir $f : [0,\infty) \times M \to \mathbb{R}$ betrachten, wobei für jedes $t > 0$, $f(t,\cdot) : M \to \mathbb{R}$ die Temperatur im Moment t ist. Gibt es keinen Wärmeaustausch mit dem umgebenden Raum, so muß f nach physikalischen Gesetzen die folgende <u>Wärmeleitungsgleichung</u> erfüllen:

$$\partial_t f + \Delta f = 0,$$

wobei $(\Delta f)(t,y)$ der Wert des Laplace-Operators der Funktion $f(t,\cdot)$ auf (M,g) ist (dabei nimmt man an, daß $\partial_t f$ und Δf existieren). Man möchte beweisen, daß es für jedes vernünftig vorgeschriebene $f(0,\cdot)$ (die ursprüngliche Wärme) eine einzige Lösung f dieser Gleichung gibt, mit $f(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} f(0,\cdot)$, $f(t,\cdot) \xrightarrow[t\to\infty]{} c \in \mathbb{R}$ (bezüglich irgendeiner sinnvollen Konvergenz), was unseren physikalischen Vorstellungen über die Wärmeevolution entsprechen würde.

Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (von beliebiger Dimension), $\mathcal{E}_M$ der Vektorraum aller Funktionen $f: [0,\infty) \times M \to \mathbb{R}$ mit

a) f ist stetig auf $[0,\infty) \times M$

b) für jedes $y \in M$ ist

$$(0,\infty) \ni t \longmapsto f(t,y) \in \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion, d.h. die Ableitung $\partial_t f$ existiert für $t > 0$ und $y \in M$ (dabei braucht $\partial_t f$ nicht stetig zu sein, auch bei festem y)

c) für jedes $t > 0$ ist

$$M \ni y \longmapsto f(t,y) \in \mathbb{R}$$

eine C^2-Funktion auf M.

Jedem $f \in \mathcal{E}_M$ ordnen wir die Funktion $Pf: (0,\infty) \times M \to \mathbb{R}$ zu, wobei

$$Pf = \partial_t f + \Delta f$$

(mit $\Delta f = \Delta[f(t,\cdot)]$ in (M,g)). Die line-

are Abbildung P nennt man den <u>Wärmeleitungsoperator</u> von (M,g).

LEMMA 17 (Das Maximumprinzip für den Wärmeleitungsoperator P der <u>kompakten</u> Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g)). Sei $f \in \mathcal{E}_M$ mit $Pf \geq 0$ und $f(0,\cdot) \geq 0$. Dann ist $f \geq 0$ (d.h. $f(t,y) \geq 0$ für alle $t \in [0,\infty)$, $y \in M$).

<u>Beweis</u>. a) Ist $Pf > 0$ und $f(0,\cdot) > 0$, so $f > 0$. Sonst gibt es $(t,y) \in (0,\infty) \times M$ mit $f(t,y) \leq 0$. Sei t_0 das Infimum aller $t > 0$ für die es $y \in M$ gibt mit $f(t,y) \leq 0$. Da $f(0,\cdot) > 0$, f stetig ist und M kompakt, ist $t_0 > 0$ und es gibt $y_0 \in M$ mit $f(t_0,y_0) \leq 0$. Wegen $f(t,y_0) > 0$ für $t < t_0$, muß $f(t_0,y_0) = 0$ sein und, somit $(\partial_t f)(t_0,y_0) \leq 0$. Es ist auch $f(t,y) > 0$ für $t < t_0$ und alle $y \in M$, woher $f(t_0,y) \geq 0$; somit nimmt die

C^2-Funktion $f(t_0,\cdot)$ auf M in y_0 ihr Minimum an; also $(\Delta f)(t_0,y_0) \leq 0$. Daher ist $Pf = \partial_t f + \Delta f$ in (t_0,y_0) nichtpositiv, was der Voraussetzung widerspricht.

b) Ist $Pf > 0$ und $f(0,\cdot) \geq 0$, so $f \geq 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist nämlich $P(f+\varepsilon) = Pf > 0$ und $(f+\varepsilon)(0,\cdot) \geq \varepsilon > 0$, also, wegen a), $f + \varepsilon \geq 0$, für jedes ε, woher $f \geq 0$.

c) Der allgemeine Fall. Ist $\tilde{f}(t,y) = f(t,y) + t\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fest, so $P\tilde{f} = Pf + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$ und $\tilde{f}(0,\cdot) = f(0,\cdot) \geq 0$. Wegen b) ist

$$f(t,y) + t\varepsilon \geq 0$$

für alle $(t,y) \in [0,\infty) \times M$ und alle $\varepsilon > 0$, woher sofort folgt, daß $f \geq 0$.

q.e.d.

FOLGERUNG 21. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in \mathcal{C}_M$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) Ist $f(0,\cdot) \geq c$ und $Pf \geq 0$, so $f \geq c$.

(ii) Ist $f(0,\cdot) \leq c$ und $Pf \leq 0$, so $f \leq c$.

(iii) Ist $a \leq f(0,\cdot) \leq b$ und $Pf = 0$, so $a \leq f \leq b$.

Beweis. (i): Lemma 17 für $f - c$. (ii): (i) mit $-f$ statt f. (iii): trivial aus (i), (ii).

q.e.d.

FOLGERUNG 22. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Ist $f \in \mathcal{C}_M$ mit $Pf = 0$ und $f(0,\cdot) = 0$, so ist $f = 0$ identisch in $[0,\infty) \times M$.

(ii) Jede Lösung $f \in \mathcal{C}_M$ der Wärmeleitungsgleichung $Pf = 0$ ist eindeutig durch die Funktion $f(0,\cdot)$ bestimmt.

Beweis: Aus Folgerung 21 und der Linearität von P.

q.e.d.

<u>Bemerkung</u>. Ist (M,g) kompakt und $f \in C^1([0,\infty)\times M)$ eine Lösung von $Pf=0$, so ist die "gesamte Wärmeenergie" $\int_M f$ (bzw. die "mittlere Temperatur" $\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M f$) bezüglich der Zeit t konstant. Wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz ist nämlich

$$\partial_t \int_M f = \int_M \partial_t f = -\int_M \Delta f = 0.$$

Sei nun (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit,

$$\mu_0 = 0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots$$

die Folge, die alle Eigenwerte von Δ enthält, wobei jeder Eigenwert so oft vorkommt, wie seine Vielfachheit (die Dimension des Eigenraumes) beträgt. Wählen wir ein L^2-orthonormales System von Δ-Eigenfunktionen φ_i, $i=0,1,2,\dots$, mit $\Delta\varphi_i = \mu_i\varphi_i$ und $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Vol}(M)}}$. Für jede Distribution $v \in C^\infty(M)^*$ definieren wir die <u>Fourier-Koeffizienten</u> $\hat{v}(i)$, $i \geq 0$, durch

$$\hat{v}(i) = v(\varphi_i).$$

Für $h \in L^2(M) \subset C^\infty(M)^*$ ist also $\hat{h}(i) = \langle h,\varphi_i\rangle_{L^2}$ und $h = \sum_{i=0}^\infty \hat{h}(i)\varphi_i$ (eine L^2-konvergente Reihe). Ist $h \in C^\infty(M)$, so gilt $h = \sum_{i=0}^\infty \hat{h}(i)\varphi_i$ bezüglich der C^∞-Konvergenz (Lemma 16). Für jedes $v \in C^\infty(M)^*$ und $h \in C^\infty(M)$ ist deshalb $v(h) =$

$$= v\Big(\lim_{\substack{m\to\infty\\(C^\infty)}} \sum_{i\le m} \hat{h}(i)\varphi_i\Big) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\le m} \hat{v}(i)\hat{h}(i) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{i\le m} \hat{v}(i)\varphi_i\Big)(h), \text{ d.h.}$$

$$v = \sum_{i=0}^\infty \hat{v}(i)\varphi_i \quad \text{(eine schwach-konvergente Reihe von Distributionen)}$$

und

$$v(h) = \sum_{i=0}^\infty \hat{v}(i)\hat{h}(i)$$

(diese Reihe konvergiert für alle $v \in C^\infty(M)^*$ und $h \in C^\infty(M)$).

Insbesondere ist jede Distribution $v \in C^\infty(M)^*$ durch ihre Fourier-Koeffizienten $\hat{v}(i)$, $i \geq 0$, eindeutig bestimmt.

Für $v \in C^\infty(M)^*$ hat die Distribution Δv offenbar die Fourier-Koeffizienten

$$(\Delta v)^\wedge(i) = \mu_i \hat{v}(i)$$

und deshalb

$$(\Delta^k v)^\wedge(i) = \mu_i^k \hat{v}(i), \quad k \geq 0.$$

LEMMA 18. Für (M,g), φ_i, μ_i wie oben, $k \in \mathbb{Z}$ und $v \in C^\infty(M)^*$, gilt folgendes:

(i) $v \in L_k^2(M)$ genau dann, wenn

$$\sum_{i \geq 1} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 < \infty.$$

(ii) In $L_k^2(M)$ sind die Normen

$$v \longmapsto \Big(|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 \Big)^{1/2}$$

und

$$v \longmapsto \|v\|_k$$

äquivalent.

(iii) Für $v \in L_k^2(M)$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=0}^\infty \hat{v}(i)\varphi_i$$

gegen v in $L_k^2(M)$ (d.h., bezüglich $\|\cdot\|_k$).

Beweis. a) Sei $k = 0$. Da φ_i eine Hilbert-Basis von $L^2(M)$ ist, sind die Normen in (ii) nicht nur äquivalent, sondern gleich, und (iii) gilt (Aufgabe IX.5. d), c)). Die Reihe in (i) ist für $v \in L^2(M)$ nicht größer als $\|v\|_0^2$, also endlich. Ist $v \in C^\infty(M)^*$ und

$$\sum_{i \geq 1} |\hat{v}(i)|^2 < \infty,$$

so konvergiert die L^2-orthogonale Reihe $\sum_{i=0}^\infty \hat{v}(i)\varphi_i$ in L^2 gegen eine Funktion h (Aufgabe IX.1). Da $\hat{h}(i) = \hat{v}(i)$ für alle i (Aufgabe IX.3.iii), muß $v = h \in L^2(M)$ sein.

b) Sei $k = 1$. Wir haben $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_1 =$

$$= \int_M \varphi_i\varphi_j + \int_M g(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) = \int_M \varphi_i\varphi_j +$$

$$+ \int_M \varphi_i \Delta\varphi_j = (1+\mu_j)\int_M \varphi_i\varphi_j =$$

$$= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1+\mu_i, & i = j \end{cases}.$$

Die Funktionen $(1+\mu_i)^{-1/2}\varphi_i$, $i \geq 0$, bilden also ein orthonormales System im Hilbert-Raum $L^2_1(M)$. Da, für $h \in C^\infty(M)$, $h = \sum_{i \geq 0} \hat{h}(i)\varphi_i$ in C^∞ und somit in L^2_1, ist dieses System vollständig (Aufgabe IX. 4). Für $v \in L^2_1(M)$ ist also $v = \sum_{i \geq 0} a_i (1+\mu_i)^{-1/2} \varphi_i$ (L^2_1-Konvergenz, und somit L^2-Konvergenz). Da aber $v = \sum_{i \geq 0} \hat{v}(i)\varphi_i$ in L^2, ist $a_i = (1+\mu_i)^{-1/2}\hat{v}(i)$ und (iii) folgt, sowie, wegen L^2_1-Orthogonalität von φ_i, $\|v\|_1^2 = \sum_{i \geq 0} |\hat{v}(i)|^2 \|\varphi_i\|_1^2 = \sum_{i \geq 0} (1+\mu_i)|\hat{v}(i)|^2$.

Für $v \in L^2_1$ ist deshalb $\sum_{i \geq 1} \mu_i |\hat{v}(i)|^2 \leq \|v\|_1^2 < \infty$. Allgemeiner gilt, für jedes $v \in C^\infty(M)^*$,

$$|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i |\hat{v}(i)|^2 \leq \sum_{i \geq 0} (1+\mu_i)|\hat{v}(i)|^2$$

sowie

$$\sum_{i \geq 0} (1+\mu_i)|\hat{v}(i)|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right)\left(|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i |\hat{v}(i)|^2\right),$$

weil $\frac{1+\mu_i}{\mu_i} = 1 + \frac{1}{\mu_i} \leq 1 + \frac{1}{\mu_1}$ für $i \geq 1$,

womit (ii) bewiesen ist. Ist nun $v \in C^\infty(M)^*$ und $\sum_{i \geq 1} \mu_i |\hat{v}(i)|^2 < \infty$, so $\sum_{i \geq 0} (1+\mu_i)|\hat{v}(i)|^2 < \infty$ (die obige Ungleichung) und die L^2_1-orthogonale Reihe $\sum_{i \geq 0} \hat{v}(i)\varphi_i$ muß in $L^2_1(M)$ konvergieren, da $\sum_{i \geq 0} \|\hat{v}(i)\varphi_i\|_1^2 = \sum_{i \geq 0} (1+\mu_i)|\hat{v}(i)|^2 < \infty$ (Aufgabe IX. 1). Sei $h \in L^2_1(M)$ die Summe dieser Reihe, die auch in $L^2(M)$ konvergiert. Also $\hat{h}(i) = \hat{v}(i)$ für alle i, woher $v = h \in L^2_1(M)$. Dies beweist (i) für $k = 1$.

c) Sei $k \geq 2$, k gerade, $k = 2s$. Für $v \in L^2_k(M)$ ist $\Delta^s v \in L^2(M)$ und $\sum_{i \geq 1} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 = \sum_{i \geq 0} |(\Delta^s v)^\wedge(i)|^2 = \|\Delta^s v\|_0^2 < \infty$. Ist umgekehrt $\sum_{i \geq 1} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 < \infty$, so, wegen dieser Gleichung und a), $\Delta^s v \in L^2(M)$, woher $v \in L^2_k(M)$ (Folgerung 18). Für $v \in L^2_k(M)$ haben wir, wegen der Ungleichung von Friedrichs,

$$\|v\|_k^2 = \|v\|_{2s}^2 \leq C_s \left(\|\Delta^s v\|_0^2 + \|v\|_0^2 \right) =$$
$$= C_s \sum_{i \geq 0} (1+\mu_i^k) \, |\hat{v}(i)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{\mu_1^k}\right)\left(|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i^k \, |\hat{v}(i)|^2\right)$$

(die letzte Ungleichung wie im Fall b), sowie

$$|\hat{v}(0)| + \sum_{i \geq 1} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 \leqslant \sum_{i \geq 0} (1+\mu_i^k) \, |\hat{v}(i)|^2 =$$
$$= \|\Delta^s v\|_0^2 + \|v\|_0^2 \leqslant C_s' \|v\|_{2s}^2 = C_s' \|v\|_k^2$$

(Stetigkeit von Δ^s). Soweit sind (i) und (ii) in diesem Fall bewiesen. Sei nun $v \in L_k^2(M)$,

$$v_m = \sum_{i=0}^{m} \hat{v}(i)\varphi_i \ , \quad a_m = v - v_m \ , \quad \text{also}$$

$\hat{a}_m(i) = \hat{v}(i)$ für $i > m$ und $\hat{a}_m(i) = 0$ für $i \leq m$. Deshalb $\|a_m\|_k \leq C\left(|\hat{a}_m(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i^k |\hat{a}_m(i)|^2\right) =$

$$= C \sum_{i \geq m} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 \xrightarrow[m \to \infty]{} 0, \text{ weil } \sum_{i \geq 0} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 < \infty ,$$

was (iii) beweist.

d) Sei $k \geqslant 2$, $k = 2s+1$ ungerade, $s \geqslant 1$.

Da

$$\sum_{i \geq 0} \mu_i \, |(\Delta^s v)^\wedge(i)|^2 = \sum_{i \geq 0} \mu_i^k \, |\hat{v}(i)|^2$$

für alle $v \in C^\infty(M)^*$, folgt (i) aus b) und

aus der Tatsache, daß $v \in L_k^2(M)$ genau dann, wenn $\Delta^s v \in L_1^2(M)$. Wegen der Ungleichung von Friedrichs ist in $L_k^2(M)$ die Norm $\|\cdot\|_k$ mit der Norm $v \mapsto \left(\|\Delta^s v\|_1^2 + \|v\|_1^2 \right)$ äquivalent, die ihrerseits, wegen (ii) für $k=1$, mit der Norm

$$v \longmapsto \Big(|(\Delta^s v)^\wedge(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i \, |\mu_i^s \hat{v}(i)|^2 +$$
$$+ |\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i \, |\hat{v}(i)|^2 \Big)^{1/2} =$$
$$= \left(|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} (\mu_i^{2s+1} + \mu_i) \, |\hat{v}(i)|^2 \right)^{1/2}$$

äquivalent ist. Es ist aber

$$|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} (\mu_i^{2s+1} + \mu_i) \, |\hat{v}(i)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{\mu_1^{2s}}\right)\left(|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i^k \, |\hat{v}(i)|^2 \right)$$

$$\left(\text{da } \frac{\mu_i^{2s+1} + \mu_i}{\mu_i^k} = 1 + \frac{1}{\mu_i^{2s}} \leq 1 + \frac{1}{\mu_1^{2s}} \text{ für } i \geqslant 1\right),$$

sowie $|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i^k \, |\hat{v}(i)|^2 \leqslant$

$$\leqslant |\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} (\mu_i^{2s+1} + \mu_i) \, |\hat{v}(i)|^2 ,$$

womit (ii) bewiesen ist. (iii) folgt nun genauso wie im Fall c).

d) Die Behauptung ist schon für $k \geq 0$ bewiesen. Sei nun $k < 0$, $k = -s$, $s > 0$.

Der Raum ℓ^2 aller Folgen $(a_i) \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ mit $\|(a_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$ besitzt das Skalarprodukt $\langle (a_i), (\tilde{a}_i) \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \tilde{a}_i$ mit $\|(a_i)\| = (\langle (a_i), (a_i) \rangle)^{1/2}$ sowie den dichten Unterraum ℓ_0^2 aller Folgen (a_i) mit $a_i = 0$ für i groß genug. Jede Folge (b_i), $b_i \in \mathbb{R}$, operiert auf ℓ_0^2 als ein Linearfunktional mit $\ell_0^2 \ni (a_i) \to \sum_{i=0}^{\infty} b_i a_i$ (endliche Summe). Dieses Funktional ist $\|\cdot\|$-stetig auf ℓ_0^2 (und somit auf ℓ^2 stetig fortsetzbar) genau dann, wenn $(b_i) \in \ell^2$, und in diesem Fall ist $\|(b_i)\|$ gleich der entsprechenden Funktionalnorm. Dies folgt daraus, daß ℓ^2 ein Hilbert-Raum ist (z. B. mit $L^2(M)$ linear isometrisch, $f \mapsto (a_i) \in \ell^2$ mit $a_i = \hat{f}(i)$, $f \in L^2(M)$). Ist nun

das Funktional stetig, so gibt es $(\tilde{a}_i) \in \ell^2$ mit $\langle (\tilde{a}_i), (a_i) \rangle = \sum_i b_i a_i$ für alle $(a_i) \in \ell_0^2$, woher $\tilde{a}_i = b_i$ (man nehme (a_i) mit $a_i = 1$, $a_j = 0$ für $j \neq i$).

Eine Distribution $v \in C^\infty(M)^*$ liegt in $L^2_{-s}(M)$ genau dann, wenn es $C > 0$ gibt mit

$$\Big(\sum_i \hat{v}(i)\tilde{a}_i\Big)^2 \leq C^2\Big(\sum_{i \geq 1} \mu_i^s \tilde{a}_i^2 + \tilde{a}_0^2\Big)$$

für jede endliche Folge $(\tilde{a}_i) \in \ell_0^2$; es ist nämlich $\sum_i \hat{v}(i)\tilde{a}_i = v\big(\sum_i \tilde{a}_i \varphi_i\big)$,

$$\Big(\Big\|\sum_i \tilde{a}_i \varphi_i\Big\|_s'\Big)^2 = \sum_{i \geq 1} \mu_i^s \tilde{a}_i^2 + \tilde{a}_0^2$$

für eine mit $\|\cdot\|_s$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_s'$, und die direkte Summe V der Eigenräume von Δ liegt dicht in jedem Sobolew-Raum. Setzt man $a_i = \mu_i^{s/2} \tilde{a}_i$ für $i \geq 1$, $a_0 = \tilde{a}_0$, $b_i = \mu_i^{-s/2} \hat{v}(i)$ für $i \geq 1$, $b_0 = \hat{v}(0)$, so bedeutet diese Ungleichung, daß

$$\Big|\sum_i b_i a_i\Big| \leq C\, \|(a_i)\|$$

für jedes $(a_i) \in \ell_0^2$; dabei ist das kleinste C mit dieser Eigenschaft die Funktionalnorm von v bezüglich $\|\cdot\|_s'$, d.h., bis auf Äquivalenz, $\|v\|_k$. Wegen der genannten Eigenschaft von l^2, ist also $v \in L_k^2(M)$ genau dann, wenn

$$|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i \geq 1} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2 = \|(b_i)\|^2 < \infty ,$$

und dann ist $v \to \left(|\hat{v}(0)|^2 + \sum_{i\geq 1} \mu_i^k |\hat{v}(i)|^2\right)^{1/2}$ eine mit $\|\cdot\|_k$ äquivalente Norm in $L_k^2(M)$. Damit sind (i) und (ii) bewiesen; (iii) folgt wie im Fall c). q. e. d.

Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, φ_i, μ_i wie oben, $\operatorname{Spec} \Delta = \{\mu_i : i \geq 0\}$ die diskrete Menge aller Eigenwerte* von Δ, V die direkte Summe aller Eigenräume. Für eine beliebige Funktion (Folge) $F: \operatorname{Spec}\Delta \to \mathbb{R}$ definieren wir die lineare Abbildung $F(\Delta): V \to V$ durch $F(\Delta)\varphi_i = F(\mu_i)\cdot \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Ist F

* geordnet wie auf Seite 291

ein Polynom, $F(\lambda) = a_q \lambda^q + \dots + a_1 \lambda + a_0$, so $F(\Delta) = a_q \Delta^q + \dots + a_1 \Delta + a_0 \cdot Id$ in V.

LEMMA 19. Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, μ_i, φ_i wie oben, $F: \operatorname{Spec}\Delta \to \mathbb{R}$.

(i) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Gibt es $C > 0$ mit

$$|F(\mu)| \leq C \mu^{k/2}$$

für alle $\mu \in \operatorname{Spec}_+ \Delta$, so* besitzt $F(\Delta): V \to V$ eine stetige lineare Fortsetzung $F(\Delta): L_{s+k}^2(M) \to L_s^2(M)$ mit $F(\Delta)v = \sum_{i=0}^{\infty} F(\mu_i)\hat{v}(i)\varphi_i$ für $v \in L_{s+k}^2(M)$ (L_s^2-konvergente Reihe).

(ii) Gebe es, für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 0$, ein $C_k > 0$ mit

$$|F(\mu)| \leq C_k \mu^{-k/2}$$

für alle $\mu \in \operatorname{Spec}_+\Delta$. Für jede Distribution $v \in C^\infty(M)^*$ konvergiert dann die Reihe

$$F(\Delta)v = \sum_{i=0}^{\infty} F(\mu_i)\hat{v}(i)\varphi_i$$

in C^∞, was die lineare Fortsetzung $F(\Delta): C^\infty(M)^* \to C^\infty(M)$ von $F(\Delta): V \to V$ definiert.

* wobei $\operatorname{Spec}_+ \Delta = (\operatorname{Spec}\Delta) \setminus \{0\}$

<u>Beweis</u>. In jedem $L^2_s(M)$ dürfen wir statt $\|\cdot\|_s$ die äquivalente Norm $\|\cdot\|_s'$ mit $(\|v\|_s')^2 = |\hat v(0)|^2 + \sum_{i\geq 1} \mu_i^s |\hat v(i)|^2$ betrachten (Lemma 18). Somit wird $L^2_s(M)$ zu einem Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle v,w\rangle_s' = \hat v(0)\hat w(0) + \sum_{i\geq 1} \mu_i^s \hat v(i)\hat w(i)$. Für jedes $s\in\mathbb{Z}$ ist $\varphi_0, \mu_1^{-s/2}\varphi_1, \mu_2^{-s/2}\varphi_2, \ldots$ ein vollständiges $\langle,\rangle_s'$-Orthonormalsystem in $L^2_s(M)$ und $F(\Delta)(\mu_i^{-(s+k)/2}\varphi_i) = [\mu_i^{-k/2}F(\mu_i)](\mu_i^{-s/2}\varphi_i)$, $i\geq 1$. $F(\Delta)$ hat also eine stetige Fortsetzung $L^2_{s+k}(M) \to L^2_s(M)$ genau dann*, wenn $\sup\{\mu^{-k/2}F(\mu) : \mu\in \mathrm{Spec}_+\Delta\} < \infty$. Somit ist (i) bewiesen, weil die Formel für $F(\Delta)v$ aus (iii) von Lemma 18 folgt. (ii) folgt nun aus dem Lemma von Sobolew. q.e.d.

LEMMA 20. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, μ_i, φ_i wie oben $(a,b)\ni t\mapsto F_t$ eine Kurve von

* Aufgabe IX.8.

Funktionen $F_t : \mathrm{Spec}\,\Delta \to \mathbb{R}$, $-\infty\leq a<b\leq\infty$, mit den folgenden Eigenschaften:

a) Für jedes $\mu\in\mathrm{Spec}\,\Delta$ ist $(a,b)\ni t\mapsto F_t(\mu)\in\mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion,

b) Für beliebige ganze $k,q\geq 0$ und jedes $t_0\in(a,b)$ gibt es $C>0$ und eine Umgebung U von t_0 in (a,b) mit

$$\left|\frac{d^q}{dt^q}F_t(\mu)\right| \leq C\mu^{-k/2}$$

für alle $t\in U$ und $\mu\in\mathrm{Spec}_+\Delta$, wobei $\frac{d^0}{dt^0}F_t(\mu) = F_t(\mu)$.

Für jede Distribution $v\in C^\infty(M)^*$ ist dann die Zuordnung $(t,y)\mapsto f(t,y) = (F_t(\Delta)v)(y)$ eine C^∞-Funktion f auf $(a,b)\times M$ (vgl. (ii) von Lemma 19). Das gleiche gilt, wenn man F_t durch $\frac{d^q}{dt^q}F_t$ ersetzt, und $\frac{\partial^q}{\partial t^q}f(t,y) = \left(\frac{d^q}{dt^q}F_t\right)(\Delta)(y)$ für alle $(t,y)\in(a,b)\times M$ und alle $q\geq 0$.

<u>Beweis</u>. Die Voraussetzung von Lemma 19 (ii) ist für jedes feste $t \in (a,b)$ und $q \geq 0$ durch $\frac{d^q}{dt^q} F_t$ erfüllt. Somit kann man, für $v \in C^\infty(M)^*$, $\left(\frac{d^q}{dt^q} F_t\right)(\Delta) v = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^q}{dt^q} F_t(\mu_i) \hat{v}(i) \varphi_i$ bilden ($C^\infty(M)$-konvergente Reihe, $t \in (a,b)$ fest). Sei t_0 und $\mathcal{U}$ wie in b). Definiert man $\psi_m \in C^\infty(\mathcal{U} \times M)$ durch $\psi_m(t,y) = \sum_{i=0}^{m} F_t(\mu_i) \hat{v}(i) \varphi_i$, so, für $q \geq 0$,

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q} \psi_m(t,\cdot) \xrightarrow[m \to \infty]{} \left(\frac{d^q}{dt^q} F_t\right)(\Delta) v$$

in $C^\infty(M)$ ($t \in \mathcal{U}$ fest). Für $s \in \mathbb{Z}$ und $k \geq 0$ ist, wegen b), mit $m < m'$, $q \geq 0$,

$$\left(\left\| \frac{\partial^q}{\partial t^q} \psi_m(t,\cdot) - \frac{\partial^q}{\partial t^q} \psi_{m'}(t,\cdot) \right\|_s' \right)^2 =$$

$$= \sum_{m < i \leq m'} \left| \frac{d^q}{dt^q} F_t(\mu_i) \right|^2 \mu_i^s |\hat{v}(i)|^2 \leq$$

$$\leq C^2 \sum_{m < i \leq m'} \mu_i^{s-k} |\hat{v}(i)|^2,$$ für alle $t \in \mathcal{U}$.

Wählt man k so groß, daß $v \in L^2_{s-k}(M)$, so gilt, für $(\varepsilon(m,m'))^2 = \sum_{m<i\leq m'} \mu_i^{s-k} |\hat{v}(i)|^2$, $\lim_{m,m' \to \infty} \varepsilon(m,m') = 0$. Wegen des Lemmas von Sobolev ist nun, für alle $t \in \mathcal{U}$, $l \in \mathbb{Z}$

$$\left\| \frac{\partial^q}{\partial t^q} \psi_m(t,\cdot) - \frac{\partial^q}{\partial t^q} \psi_{m'}(t,\cdot) \right\|_{C^l(M)} \leq$$

$$\leq \tilde{C} |\varepsilon(m,m')|;$$ $\tilde{C}$ hängt von q und l ab. Für $h \in C^\infty(\mathcal{U} \times M)$ ($\overline{\mathcal{U}} \subset (a,b)$ kompakt, h auf eine Umgebung von $\overline{\mathcal{U}} \times M$ in $(a,b) \times M$ C^∞-fortsetzbar), ist offenbar

$$\|h\|_{C^p(\mathcal{U} \times M)} \leq \tilde{\tilde{C}} \cdot \sup_{t \in \mathcal{U}} \left(\sum_{\substack{q,l \geq 0 \\ q+l \leq p}} \left\| \frac{\partial^q}{\partial t^q} h \right\|_{C^l(M)} \right),$$

woher, für $h = \psi_m - \psi_{m'}$,

$$\|\psi_m - \psi_{m'}\|_{C^{q+l}(\mathcal{U} \times M)} \leq C' |\varepsilon(m,m')|.$$

Für beliebige $q, l \geq 0$ ist ψ_m also eine C^{q+l}-Cauchy-Folge in $\mathcal{U} \times M$; ψ_m muß also gegen eine Funktion $\psi \in C^\infty(\mathcal{U}\times M)$ in jedem $C^{q+l}(\mathcal{U}\times M)$ konvergieren; es ist auch $\frac{\partial^q}{\partial t^q}\psi_m \to \frac{\partial^q}{\partial t^q}\psi$ bezüglich derselben Konvergenz. Da wir aber den Grenzwert von $\frac{\partial^q}{\partial t^q}\psi_m$ in $C^\infty(M)$ für festes $t\in\mathcal{U}$ schon kennen, ist $\psi = f \in C^\infty(\mathcal{U}\times M)$ (f wie in der Behauptung des Lemmas) und

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(t,\cdot) = \left(\frac{d^q}{dt^q}F_t\right)(\Delta)\,v. \qquad \text{q. e. d.}$$

SATZ 18. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $v\in C^\infty(M)^*$.

(i) Es gibt genau eine (bis auf Gleichheit fast überall) Funktion $f:(0,\infty)\times M\to\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $f(t,\cdot)\in L^1(M)$ für alle $t>0$,

b) Für jedes $(t,y)\in(0,\infty)$ existiert die partielle Ableitung $\partial_t f(t,y)$ und jedes

$t_0>0$ besitzt eine Umgebung $\mathcal{U}$ in $(0,\infty)$ mit der Eigenschaft, daß die Funktion $\partial_t f:(0,\infty)\times M\to\mathbb{R}$ auf $\mathcal{U}\times M$ beschränkt ist,

c) $\partial_t f + \Delta f = 0$, wobei $\Delta f = \Delta(f(t,\cdot))$ im Sinne von Distributionen,

d) $f(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0]{} v$ (schwache Konvergenz von Distributionen).

(ii) Die einzige Lösung f von (i)a)-(i)d) hat die folgenden Eigenschaften:

a) $f\in C^\infty((0,\infty)\times M)$,

b) $f(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0]{} v$ in $L^2_s(M)$, falls $v\in L^2_s(M)$, $s\in\mathbb{Z}$,

c) $f(t,\cdot)\xrightarrow[t\to\infty]{} c\in\mathbb{R}$ in $C^\infty(M)$, wobei $c=\hat{v}(0)\varphi_0 = \frac{1}{\operatorname{Vol}M}v(1)$ (also $c=\frac{1}{\operatorname{vol}M}\int_M v$ falls $v\in L^1(M)$),

d) $f(t,\cdot) = e^{-t\Delta}v$; dies hat Sinn, weil für $F_t(\mu) = e^{-t\mu}$, $t \in (0,\infty)$, die Voraussetzungen von Lemma 20 gelten.

<u>Beweis</u>. 1) Eindeutigkeit. Erfüllt f die Bedingungen (i)a) – (i)c), so ist, für $a_i(t) = [f(t,\cdot)]^\wedge(i)$, $t>0$,

$$\frac{1}{h}[a_i(t+h) - a_i(t)] = \int_M \frac{1}{h}[f(t+h,\cdot)-f(t)]\varphi_i \cdot$$

Ist $|h|$ klein, so ist, wegen (i)b),

$\left|\frac{1}{h}[f(t+h,\cdot)-f(t)]\varphi_i\right| \leq C \in \mathbb{R}$, C von h unabhängig, und somit, nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz, a_i hat die Ableitung

$$\frac{d}{dt}a_i(t) = \int_M \partial_t f(t,\cdot)\varphi_i \qquad (t>0)$$

also, wegen (i)c), $\frac{d}{dt}a_i(t) = -\int_M f(t,\cdot)\Delta\varphi_i = -\mu_i a_i(t)$. Andererseits, nach (i)d),

$a_i(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \hat{v}(i)$. Deshalb ist $a_i(t) = e^{-t\mu_i}\hat{v}(i)$, wodurch, für jedes $t>0$, $f(t,\cdot) \in L^1(M)$

eindeutig bestimmt ist.

2) Existenz und Eigenschaften. Da $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig), erfüllen die Funktionen $F_t(\mu) = e^{-t\mu}$ die Voraussetzungen von Lemma 20. Somit ist $(t,y) \mapsto f(t,y) = (e^{-t\Delta}v)(y)$ eine C^∞-Funktion auf $(0,\infty)\times M$ und

$\frac{\partial}{\partial t}f(t,y) = \left(\left(\frac{d}{dt}F_t\right)(\Delta)v\right)(y)$, d.h. $\partial_t f(t,\cdot) = -\sum_{i\geq 0}\mu_i e^{-t\mu_i}\hat{v}(i)\varphi_i = -\Delta(f(t,\cdot))$. Also sind die Bedingungen (i)a) – (i)c), (ii)a), (ii)d) erfüllt. Andererseits ist, falls $v \in L^2_s(M)$,

$$\left(\|e^{-t\Delta}v - v\|'_s\right)^2 = \sum_{i\geq 1}(e^{-t\mu_i}-1)^2\mu_i^s|\hat{v}(i)|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}(e^{-t\mu_i}-1)^2\mu_i^s|\hat{v}(i)|^2 + \sum_{i>m}\mu_i^s|\hat{v}(i)|^2,$$

da $|e^{-t\mu_i}-1| \leq 1$. Sei nun $\varepsilon>0$ fest. Da $\sum_{i\geq 0}\mu_i^s|\hat{v}(i)|^2 < \infty$, können wir m so wählen, daß $\sum_{i>m}\mu_i^s|\hat{v}(i)|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle t dicht genug bei 0, ist der erste, endliche Teil der obigen Summe kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$; somit ist (ii)b) (und (i)d)) bewiesen.

Für jedes $s \in \mathbb{Z}$ haben wir

$$(\|e^{-t\Delta}v - \hat{v}(0)\varphi_0\|_s')^2 = \sum_{i\geq 1} e^{-2t\mu_i}\mu_i^s|\hat{v}(i)|^2 \leq$$

$\leq Ct^{-k}\sum_{i\geq 1}\mu_i^{s-k}|\hat{v}(i)|^2$, wobei $k>0$ beliebig ist und $C=C(k)$ die Bedingung $e^{-2x}\leq Cx^{-k}$ für alle $x>0$ erfüllt. Wählen wir k so groß, daß $v\in L^2_{s-k}(M)$. Es ist also

$$e^{-t\Delta}v \xrightarrow[t\to\infty]{} \hat{v}(0)\varphi_0 \quad \text{in } L^2_s(M),$$

s beliebig, woher (ii)c) folgt.

q.e.d.

LEMMA 21. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, μ_i, φ_i wie vorhin (Seite 291), $n=\dim M$, $k\in\mathbb{Z}$, $k>\frac{n}{2}$. Dann

(i) Es gibt $C\in\mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^{-k}|\varphi_i(y)|^2 \leq C$$

für alle $y\in M$.

(ii) $$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^{-k} < \infty.$$

Beweis. Sei $y\in M$, $\varphi\in C^\infty(M)$. Dann $|\delta_y(\varphi)| = |\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_{C^0} \leq \tilde{C}\|\varphi\|_k'$ (die letzte Ungleichung wegen des Lemmas von Sobolew; $\tilde{C}$ von y unabhängig). Also, $\delta_y\in L^2_{-k}(M)$ und $\|\delta_y\|_{-k}'\leq\tilde{C}$, d.h.

$$\tilde{C}^2 \geq |(\delta_y)^\wedge(0)|^2 + \sum_{i\geq 1}|(\delta_y)^\wedge(i)|^2\mu_i^{-k} \geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^{-k}|\varphi_i(y)|^2,$$

woher (i) folgt. Für jedes $m\geq 0$ haben wir, wegen (i), $\sum_{i=1}^{m}\mu_i^{-k} = \int_M \sum_{i=1}^{m}\mu_i^{-k}|\varphi_i(y)|^2 V_g(y) \leq$ $\leq C\cdot \mathrm{Vol}\,M$, also $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^{-k}\leq C\cdot\mathrm{Vol}\,M<\infty$.

q.e.d.

Für jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) und für μ_i, φ_i wie vorhin, definieren wir die Funktion $Z=Z_{(M,g)}$ $:(0,\infty)\to(0,\infty)$ durch

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\mu_i},$$

d.h. $Z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_j\cdot e^{-t\lambda_j}$, wobei

$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ die wachsende Folge aller Eigenwerte von Δ ist und m_j die Multiplizität von λ_j bezeichnet (d.h. die Dimension des λ_j-Eigenraumes von Δ).

Wir haben $Z(t) < \infty$ für alle $t > 0$ wegen (ii) von Lemma 21 und der Ungleichung $e^{-t\mu_i} \leq C t^{-k} \mu_i^{-k}$ ($C > 0$ von i unabhängig).

LEMMA 22. Seien p_j und α_j, $j = 0, 1, 2, \dots$ Folgen von reellen Zahlen mit $p_j > 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \infty$ und $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$.
Setzen wir voraus, daß

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j e^{-t\alpha_j} < \infty$$

für alle $t > 0$. Dann

(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert die obige Reihe gleichmäßig, mit allen Ableitungen, in (ε, ∞). Somit ist $Y: (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine C^∞-Funktion und $\frac{d^q}{dt^q} Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^q \alpha_j^q p_j e^{-t\alpha_j}$ für

alle $q \geq 0$.

(ii) Die Folgen p_j und α_j werden durch die Funktion $Y: (0, \infty) \to (0, \infty)$ eindeutig bestimmt.

(iii) Y kann zu einer holomorphen komplexwertigen Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ fortgesetzt werden; somit ist Y analytisch.

<u>Beweis</u>. Es gibt j_0 mit $\alpha_{j_0} > 0$; wäre nämlich $\alpha_j \leq 0$ für alle j, so $p_j e^{-t\alpha_j} \geq p_j$, was der Voraussetzung $\sum_{j \geq 0} p_j = \infty$ widerspricht. Für $j \geq j_0$ haben wir also

$$e^{-t\alpha_j/2} \leq C t^{-q} \alpha_j^{-q},$$

($q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$ fest), wobei C von t und j nicht abhängt. Also, für $t > \varepsilon$, $j \geq j_0$,

$$\left| \frac{d^q}{dt^q} (p_j e^{-t\alpha_j}) \right| = |\alpha_j^q p_j e^{-t\alpha_j}| =$$
$$= |\alpha_j^q e^{-t\alpha_j/2}| \cdot |p_j e^{-t\alpha_j/2}| \leq C t^{-q} p_j e^{-t\alpha_j/2} \leq$$
$$\leq C \varepsilon^{-q} \cdot p_j e^{-\varepsilon\alpha_j/2}.$$

Da die letzte Folge von Konstanten summierbar ist für $\varepsilon > 0$, folgt Behauptung (i).

(ii) Wir haben

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\alpha}\cdot Y(t) = \begin{cases} 0, & \alpha < \alpha_0 \\ p_0, & \alpha = \alpha_0 \\ \infty, & \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

a) Sei $\alpha < \alpha_0$. Da $\tilde{Y}(t) = e^{t\alpha}\cdot Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j e^{-t(\alpha_j - \alpha)} < 0$ für alle $t > 0$, konvergiert diese Reihe, wegen (i), gleichmäßig in (ε, ∞), für jedes $\varepsilon > 0$. Wir haben also auch die gleichmäßige Konvergenz auf $(\varepsilon, \infty]$, wobei wir der Funktion $F_j(t) = p_j e^{-t(\alpha_j - \alpha)}$ in $t = \infty$ ihren Grenzwert 0 zuordnen (da $\alpha_j > \alpha$). Also $\lim_{t\to\infty} \tilde{Y}(t) = \tilde{Y}(\infty) = \sum_{j\geqslant 0} F_j(\infty) = 0$.

b) Sei $\alpha = \alpha_0$. Also $e^{t\alpha_0}\cdot Y(t) = p_0 + e^{t\alpha_0}\sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{-t\alpha_j}$. Da die Reihe

$\tilde{\tilde{Y}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{-t\alpha_j}$ dieselben Voraussetzungen erfüllt wie $Y(t)$, und $\alpha_0 < \alpha_1$, folgt aus dem Fall a), daß $\lim_{t\to\infty} e^{t\alpha_0}\tilde{\tilde{Y}}(t) = 0$, woher $\lim_{t\to\infty} e^{t\alpha_0}\cdot Y(t) = p_0$.

c) Sei $\alpha > \alpha_0$. Nun $e^{t\alpha} Y(t) \geqslant$
$\geqslant e^{t\alpha}\cdot p_0 e^{-t\alpha_0} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$.

Also, Y bestimmt p_0 und α_0 eindeutig. Dasselbe gilt auch für $Y(t) - p_0 e^{-t\alpha_0} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{-t\alpha_j}$, woher nun p_1 und α_1 durch Y eindeutig bestimmt werden, usw.

Somit ist (ii) bewiesen.

(iii) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ ist $Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j e^{-z\alpha_j}$ eine Reihe von holomorphen Funktionen mit $|p_j e^{-z\alpha_j}| = |p_j e^{-\operatorname{Re} z\cdot\alpha_j}| \leqslant p_j e^{-\varepsilon\alpha_j}$ falls $j \geqslant j_0$ (j_0 wie oben) und $\operatorname{Re} z \geqslant \varepsilon > 0$.

Da die letzte Folge von Konstanten summierbar ist, konvergiert unsere Reihe gleichmäßig in der Halbebene $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon$ gegen eine holomorphe Funktion (Bekannte Tatsache: sind f_m holomorphe Funktionen und $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ gleichmäßig, so ist f auch holomorph).

FOLGERUNG 23. Für jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) ist die Funktion $Z: (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\mu_i} = \sum_{j=0}^{\infty} m_j \cdot e^{-t\lambda_j}$$

analytisch. Ihre definierende Reihe konvergiert gleichmäßig, mit allen Ableitungen, in jeder Halbgeraden (ε,∞), $\varepsilon>0$. Z bestimmt das Spektrum von Δ (d.h. die Eigenwerte λ_j und ihre Multiplizitäten m_j). Es ist $\lim_{t\to\infty} Z(t) = 1$ und $\lim_{t\to 0(+)} Z(t) = \infty$.

<u>Beweis</u>. Da $m_j \geq 1$ für $j \geq 1$, ist $\sum_{j\geq 0} m_j = \infty$ und Lemma 22 kann angewandt werden.

Wegen der Formel auf S. 315 mit $\alpha = \lambda_0 = 0$ und $Y = Z$, ist $\lim_{t\to\infty} Z(t) = m_0 = 1$. Für jedes m ist $\lim_{t\to 0(+)} \sum_{i=0}^{m} e^{-t\mu_i} = m+1$. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $m > a$. Da $Z(t) \geq \sum_{i=0}^{m} e^{-t\mu_i}$, gibt es $\delta > 0$ mit $\sum_{i=0}^{m} e^{-t\mu_i} > m$, also auch $Z(t) > a$, für alle $t \in (0,\delta)$, woher $Z(t) \xrightarrow[t\to 0(+)]{} \infty$.

Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Unter der <u>Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung</u> auf (M,g) verstehen wir die Funktion

$$\mathcal{K}: (0,\infty) \times M \times M \to \mathbb{R}$$

mit

$$\mathcal{K}(t,y,z) = (e^{-t\Delta}\delta_y)(z).$$

SATZ 19. Sei $\mathcal{K}$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit

(M,g), μ_i, φ_i wie vorhin (S. 291). Dann ist

$$\mathcal{K}(t,y,z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\mu_i} \varphi_i(y)\varphi_i(z)$$

wobei die Reihe, für jedes $\varepsilon > 0$, gleichmäßig mit allen kovarianten Ableitungen auf $(\varepsilon,\infty)\times M\times M$ konvergiert (bezüglich der Produktmetrik). Außerdem

(i) $\mathcal{K} \in C^\infty((0,\infty)\times M \times M)$

(ii)
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}(t,y,\cdot) + \Delta\,\mathcal{K}(t,y,\cdot) = 0,$$

$$\mathcal{K}(t,y,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} \delta_y \quad \text{in } L^2_{-k}(M)$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $k > \frac{n}{2}$, $n = \dim M$

(iii) Für jede Distribution $v \in C^\infty(M)^*$,

$$(e^{-t\Delta}v)(y) = v(\mathcal{K}(t,y,\cdot)).$$ Insbesondere, für $v \in L^1(M)$,

$$(e^{-t\Delta}v)(y) = \int_M \mathcal{K}(t,y,z)\,v(z)\,V_g(z)$$

(iv) $\mathcal{K}(t,y,z) = \mathcal{K}(t,z,y)$

(v) $$Z(t) = \int_M \mathcal{K}(t,y,y)\,V_g(y).$$

<u>Beweis</u>. Da $\mathcal{K}(t,y,\cdot) = e^{-t\Delta}\delta_y$, haben wir, für jedes feste $t>0$, die $C^\infty(M)$-konvergente Reihe (vgl. (ii) von Lemma 19)

$$\mathcal{K}(t,y,\cdot) = \sum_{i\geq 0} e^{-t\mu_i}(\delta_y)^\wedge(i)\,\varphi_i =$$

$$= \sum_{i\geq 0} e^{-t\mu_i}\varphi_i(y)\varphi_i,$$ woher auch

$$\mathcal{K}(t,y,z) = \sum_{i\geq 0} e^{-t\mu_i}\varphi_i(y)\varphi_i(z)$$ punktweise in $(0,\infty)\times M\times M$. Sei $\mathcal{K}_m(t,y,z) = \sum_{i=0}^{m} e^{-t\mu_i}\varphi_i(y)\varphi_i(z)$. Die Funktionen $\varphi_i\otimes\varphi_i \in C^\infty(M\times M)$ mit $(\varphi_i\otimes\varphi_i)(y,z) = \varphi_i(y)\varphi_i(z)$ bilden ein L^2-orthonormales System von Eigenfunktionen des Laplace-Operators in $(M\times M, g\times g)$ (vgl. Aufgabe XI. 3. iii), wobei $\varphi_i\otimes\varphi_i$ dem Eigenwert $2\mu_i$ entspricht. Da man dieses System zu einer Hilbert-Basis von Eigenfunktionen auf $M\times M$ vervollständigen kann, haben wir,

für $m < m'$ und jedes $q \geq 0$, die folgende Formeln für die Sobolew-Normen $\|\cdot\|_s$ in $M \times M$ (oder, genauer, für die äquivalenten Normen $\|\cdot\|_s'$):

$$\left(\left\| \frac{\partial^q}{\partial t^q} K_m(t,\cdot,\cdot) - \frac{\partial^q}{\partial t^q} K_{m'}(t,\cdot,\cdot) \right\|_s'\right)^2 =$$

$$= 2^s \sum_{m < i \leq m'} e^{-2t\mu_i} \cdot \mu_i^{s+2q} \leq$$

$$\leq 2^s \sum_{m < i \leq m'} e^{-2\varepsilon\mu_i} \cdot \mu_i^{s+2q} = \delta(m,m')$$

falls $t \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fest; dabei hängt $\delta(m,m')$ auch von s, q, ε, aber nicht von t ab. Da $\sum_{i \geq 0} e^{-2\varepsilon\mu_i} \cdot \mu_i^{s+2q} < \infty$, haben wir $\delta(m,m') \xrightarrow[m,m' \to \infty]{} 0$. Andererseits ist, für jedes $k \geq 0$ und s groß genug, die Norm $\|\cdot\|_{C^k(M\times M)}$ durch $\|\cdot\|_s'$ abgeschätzt; also $\left\| \frac{\partial^q}{\partial t^q} K_m(t,\cdot,\cdot) - \frac{\partial^q}{\partial t^q} K_{m'}(t,\cdot,\cdot) \right\|_{C^k(M\times M)} \leq$

$\leq \tilde{\delta}_{q,k,\varepsilon}(m,m') \xrightarrow[m',m \to \infty]{} 0$, für alle $t \geq \varepsilon$, wobei $\tilde{\delta}_{q,k,\varepsilon}(m,m')$ von t nicht abhängt. Somit bilden die Funktionen K_m eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{C^l((\varepsilon,\infty)\times M \times M)}$ für jedes l (diese Norm hat Sinn, obwohl die K_m keine kompakten Träger haben).

Da $K_m \xrightarrow[m \to \infty]{} K$ punktweise in $(0,\infty) \times M \times M$, folgt die erwünschte Konvergenz unserer Reihe gegen K, sowie (i), (iv) und (v) (da die Reihe, bei festem t, auch in $L^2(M \times M)$ konvergieren muß). Da $K(t,y,\cdot) = e^{-t\Delta}\delta_y$, haben wir sofort (ii) (Satz 18). Andererseits ist $K(t,y,\cdot) = \sum_{i \geq 0} e^{-t\mu_i} \varphi_i(y)\varphi_i$ ($C^\infty(M)$-Konvergenz), woher, für $v \in C^\infty(M)^*$, $v(K(t,y,\cdot)) = \sum_{i\geq 0} e^{-t\mu_i}\varphi_i(y)\hat{v}(i) = (e^{-t\Delta}v)(y)$. Somit ist der Satz bewiesen.

q. e. d.

<u>Bemerkung</u>. Man kann Satz 19 auch direkt von Lemma 20 ableiten. Es ist nämlich, auf $M \times M$, $\mathcal{K}(2t,\cdot,\cdot) = e^{-t\Delta}\delta_{diag}$, wobei Δ der Laplace-Operator von $(M \times M, g \times g)$ ist und $\delta_{diag} \in C^\infty(M\times M)^*$ die "diagonale" Distribution ist mit $\delta_{diag}(\varphi) = \int_M \varphi(y,y)\, V_g(y)$ für $\varphi \in C^\infty(M \times M)$.

Betrachten wir nun den physikalischen Begriff der Wellenbewegung (z. B. Meeres- oder Druckwellen). Als Modell haben wir dafür eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) (wo sich die Wellen verbreiten) mit einer Funktion $f: \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$. Dabei entspricht $f(t,y)$ der Amplitude (bzw. dem Druck) der Welle im Punkt y und im Moment t. Nach physikalischen Gesetzen muß f die Gleichung

$$\partial_t^2 f + \Delta f = 0$$

(die <u>Wellengleichung</u>) erfüllen; dabei ist $\Delta f = \Delta(f(t,\cdot))$, und man setzt voraus, daß die vorkommenden Ableitungen existieren.

<u>Invarianten</u> der Wellengleichung. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in C^2(\mathbb{R} \times M)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_t^2 f + \Delta f = 0.$$

Dann sind die folgenden Größen konstant, d.h. von $t \in \mathbb{R}$ unabhängig (was man sofort sieht, indem man, wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz, die Differentiation ∂_t mit der Integration auf M vertauscht):

a) Die Gesamtenergie der Welle:

$$E = \frac{1}{2}\left[\int_M (\partial_t f)^2 + \int_M |\nabla f|^2\right]$$

(wobei $\nabla f = \nabla(f(t,\cdot))$).

b) Der Gesamtimpuls der Welle:

$$\int_M \partial_t f .$$

Man darf ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit immer annehmen, daß der Gesamtimpuls Null ist. Die Wellengleichung besitzt nämlich die trivialen Lösungen $f(t,y) = bt + a$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wenn man eine beliebige Lösung f durch $\tilde{f}(t,\cdot) = f(t,\cdot) - bt$ ersetzt, wobei

$$b = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M \partial_t f(0,\cdot) ,$$

dann hat die neue Lösung $\tilde{f}$ den Gesamtimpuls $\int_M \partial_t \tilde{f} = 0$.

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren zwei Kurven $\mathbb{R} \ni t \mapsto F_t, G_t$ von Funktionen $F_t, G_t : \operatorname{Spec} \Delta \to \mathbb{R}$ durch

$$F_t(\mu) = \cos(t\sqrt{\mu}),$$

$$G_t(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(t\sqrt{\mu}) , & \mu > 0 \\ t , & \mu = 0 . \end{cases}$$

Also, $|F_t(\mu)| \leq 1$ und $|G_t(\mu)| \leq \mu^{-1/2}$ für $\mu > 0$. Nach Lemma 19 besitzen die Abbildungen $F_t(\Delta), G_t(\Delta) : V \to V$, für jedes $s \in \mathbb{Z}$, stetige Fortsetzungen $F_t(\Delta) : L^2_s(M) \to L^2_s(M)$ und $G_t(\Delta) : L^2_{s-1}(M) \to L^2_s(M)$ mit

$$F_t(\Delta)v = \sum_{i \geq 0} \cos(t\sqrt{\mu_i})\, \hat{v}(i)\, \varphi_i$$

und

$$G_t(\Delta)w = t\,\hat{w}(0)\varphi_0 + \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \sin(t\sqrt{\mu_i})\, \hat{w}(i)\, \varphi_i$$

(konvergente Reihen in $L^2_s(M)$). Für $v, w \in C^\infty(M)$ ist also $F_t(\Delta)v, G_t(\Delta)w \in C^\infty(M)$ und die obigen Reihen konvergieren in $C^\infty(M)$.

SATZ 20. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $v, w \in C^\infty(M)$.

(i) Es gibt genau eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}\times M)$ mit

a) $\partial_t^2 f + \Delta f = 0$,

b) $f(0,\cdot) = v$, $\partial_t f(0,\cdot) = w$.

(ii) Die einzige Lösung f von (i)a), (i)b) hat die folgenden Eigenschaften:

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times M)$,

b) $f(t,\cdot) = F_t(\Delta)v + G_t(\Delta)w$,

c) Der Gesamtimpuls von f ist $\int_M \partial_t f(0,\cdot) = \int_M w$. Ist $\int_M w = 0$, so existiert, für jedes $k \geq 0$, eine Konstante C_k mit

$$\|f(t,\cdot)\|_{C^k} \leq C_k$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Eindeutigkeit der Lösung f von (i)a) - (i)b): Sei $a_i(t) = (f(t,\cdot))^\wedge(i)$. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz, existieren die Ableitungen $\frac{d}{dt}a_i(t)$, $\frac{d^2}{dt^2}a_i(t)$ und

$$\frac{d}{dt}a_i(t) = \int_M \partial_t f\cdot\varphi_i\,,\quad \frac{d^2}{dt^2}a_i(t) =$$

$$= \int_M \partial_t^2 f\cdot\varphi_i = -\int_M \Delta f\cdot\varphi_i = -\mu_i a_i(t).$$

Da $a_i(0) = \hat v(i)$, $\frac{d}{dt}a_i(0) = \hat w(i)$, haben wir also $a_i(t) = F_t(\mu_i)\hat v(i) + G_t(\mu_i)\hat w(i)$, wodurch f eindeutig bestimmt ist.

Existenz und Eigenschaften der Lösung. Wir behaupten, daß $f(t,\cdot) = F_t(\Delta)v + G_t(\Delta)w$ unsere Lösung ist und die Eigenschaften (i)a), (i)b), (ii)a)-c) hat. Dazu dürfen wir annehmen, daß $\hat w(0) = 0$, d. h. $\int_M w = 0$; wir ersetzen nämlich w durch $\tilde w = w - \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M w$, so daß $F_t(\Delta)v + G_t(\Delta)w =$

$$= F_t(\Delta)v + G_t(\Delta)\tilde w + \frac{t}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M w.$$

Sei also $\hat{w}(0) = 0$. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ ist $F_t(\Delta)v = \lim_{m\to\infty} \psi_m(t,\cdot)$, $G_t(\Delta)w = \lim_{m\to\infty} \chi_m(t,\cdot)$ ($C^\infty(M)$-Konvergenz), wobei $\psi_m(t,\cdot) = \sum_{i=0}^{m} \cos(t\sqrt{\mu_i})\,\hat{v}(i)\varphi_i$,

$\chi_m(t,\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \sin(t\sqrt{\mu_i})\,\hat{v}(i)\varphi_i$.

Da, für jedes $q \geq 0$ und $\mu > 0$, $\left|\frac{d^q}{dt^q} F_t(\mu)\right| \leq \mu^{q/2}$ und $\left|\frac{d^q}{dt^q} G_t(\mu)\right| \leq \mu^{\frac{q-1}{2}}$, haben wir, für $m < m'$ und alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\left(\left\|\frac{d^q}{dt^q}\psi_m(t,\cdot) - \frac{d^q}{dt^q}\psi_{m'}(t,\cdot)\right\|_s'\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{m<i\leq m'} \mu_i^{s+q}|\hat{v}(i)|^2 = \varepsilon_{s,q}(m,m') \xrightarrow[m,m'\to\infty]{} 0$$

und genauso $\left(\left\|\frac{d^q}{dt^q}\chi_m(t,\cdot) - \frac{d^q}{dt^q}\chi_{m'}(t,\cdot)\right\|_s'\right)^2 \leq$

$$\leq \sum_{m<i\leq m'} \mu_i^{s+q-1}|\hat{w}(i)|^2 = \tilde{\varepsilon}_{s,q}(m,m') \xrightarrow[m,m'\to 0]{} 0$$

($\varepsilon_{s,q}(m,m')$, $\tilde{\varepsilon}_{s,q}(m,m')$ von t unabhängig).

Wie im Beweis von Lemma 20 (oder von

Satz 19) folgt nun, daß $\psi_m(t,\cdot) \xrightarrow[m\to\infty]{} F_t(\Delta)v$ und $\chi_m(t,\cdot) \xrightarrow[m\to\infty]{} G_t(\Delta)w$ gleichmäßig mit allen Ableitungen in $\mathbb{R}\times M$, woher die Funktion f mit $f(t,\cdot) = F_t(\Delta)v + G_t(\Delta)w$ C^∞-differenzierbar auf $\mathbb{R}\times M$ sein muß; außerdem kann man in den $F_t(\Delta)v$ und $G_t(\Delta)w$ definierenden Reihen die Differentiationen nach t mit der Summierung vertauschen, also

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,\cdot) = \sum_{i\geq 0} \frac{d^2}{dt^2}\cos(t\sqrt{\mu_i})\,\hat{v}(i)\varphi_i +$$

$$+ \sum_{i\geq 1} \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\sin(t\sqrt{\mu_i})\,w(i)\varphi_i =$$

$$= -\sum_{i\geq 0} \mu_i\cdot\cos(t\sqrt{\mu_i})\,\hat{v}(i)\varphi_i -$$

$$- \sum_{i\geq 1} \mu_i\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\sin(t\sqrt{\mu_i})\,\hat{w}(i)\varphi_i =$$

$= -\Delta(f(t,\cdot))$, woraus (ii) b) folgt.

Für jedes $s \in \mathbb{Z}$ ist $(\|F_t(\Delta)v\|_s')^2 \leq$

$$\leq \sum_{i\geq 0} \mu_i^s|\hat{v}(i)|^2 \leq (\|v\|_s')^2 = \tilde{C}_s,$$

$$(\|G_t(\Delta)w\|_s')^2 \leq \sum_{i \geq 1} \mu_i^{s-1} |\hat{w}(i)|^2 \leq$$

$$\leq (\|w\|_{s-1}')^2 = \tilde{\tilde{C}}_s ,$$ wobei $\tilde{C}_s, \tilde{\tilde{C}}_s$ von t nicht abhängen. Nach dem Lemma von Sobolew ist also, für jedes $k \geq 0$ und $s = s(k)$ groß genug, $\|f(t,\cdot)\|_{C^k} \leq$

$$\leq C' \cdot \|f(t,\cdot)\|_s' \leq C'(\|F_t(\Delta)v\|_s' + \|G_t(\Delta)w\|_s') \leq$$

$$\leq C' \sqrt{\tilde{C}_s} \cdot \sqrt{\tilde{\tilde{C}}_s} ,$$ für alle t, was (ii) c) beweist.

q. e. d.

Bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^n_+$ den Halbraum $\{(x^1, \ldots, x^n) : x^n \geq 0\}$ in $\mathbb{R}^n$. Sei M ein Hausdorffscher topologischer Raum. Unter einem $\mathbb{R}^n_+$-Koordinatensystem in M verstehen wir ein Paar (U, φ), wobei $U \subset M$ eine offene Teilmenge und $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n_+$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge $\varphi(U)$ von $\mathbb{R}^n_+$ ist (d. h. $\varphi(U)$ ist offen

in $\mathbb{R}^n_+$ bezüglich der relativen Topologie, also $\varphi(U) = \mathbb{R}^n_+ \cap U'$, wobei U' offen in $\mathbb{R}^n$ ist). Unter einem $\mathbb{R}^n_+$-Atlas auf M versteht man eine Menge $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in T}$ von $\mathbb{R}^n_+$-Koordinatensystemen auf M mit der Eigenschaft, daß* für alle $\alpha, \beta \in T$, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{R}^n$ eine C^∞-Abbildung ist (für eine _beliebige_ Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine Abbildung $F : A \to \mathbb{R}^p$ C^∞-differenzierbar, wenn es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^∞-Abbildung $\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^p$ gibt mit $A \subset U$ und $\tilde{F} = F$ auf A). Zwei $\mathbb{R}^n_+$-Atlasse auf M nennt man äquivalent, wenn ihre Vereinigung wieder ein $\mathbb{R}^n_+$-Atlas ist; dies ist eine Äquivalenzrelation (man sieht auch leicht, daß jede Äquivalenzklasse von $\mathbb{R}^n_+$-Atlassen auf M

---

* und daß $\bigcup_{\alpha \in T} U_\alpha = M$.

genau einen maximalen $\mathbb{R}^n_+$-Atlas enthält, der die Vereinigung aller Atlasse in der Äquivalenzklasse ist). Unter einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand versteht man einen* topologischen Hausdorff-Raum M mit einer Äquivalenzklasse von $\mathbb{R}^n_+$-Atlassen auf M (d. h., mit einem maximalen $\mathbb{R}^n_+$-Atlas auf M). Insbesondere ist jede n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit automatisch eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Sind M, N Mannigfaltigkeiten mit Rand (von beliebigen Dimensionen), so heißt eine stetige Abbildung $F: M \to N$ C^k-differenzierbar, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, wenn sie bezüglich beliebiger Koordinatensysteme in M und N als C^k-differenzierbar erscheint.

In jedem Punkt y einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand M kann man die Tangentialvektoren definieren. So wird ein Vektor X dadurch erklärt, daß man jedem Koordinatensystem (x^i) um y die Komponenten X^i zuordnet und

* zusammenhängenden

verlangt, daß bei Koordinatenwechsel die Transformationsregel $X^{i'} = A^{i'}_i X^i$ erfüllt ist. Somit entsteht in jedem Punkt $y \in M$ der Tangentialraum T_yM, der aus allen Tangentialvektoren in y besteht. T_yM ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Ist $\gamma: [a,b] \to M$ eine C^1-Kurve (d. h. eine C^1-Abbildung der 1-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit $[a,b]$ nach M), so entsteht, für jedes $t \in [a,b]$, der Tangentialvektor $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Genauso (durch die entsprechende Transformationsregel) kann man in jedem Punkt $y \in M$ die Tensoren vom beliebigen Typ (p,q) definieren, die einen Vektorraum der Dimension n^{p+q} bilden.

Für einen Punkt y der n-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit M sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Für jedes Koordinatensystem $(U, (x^i))$ um y ist $x^n(y) = 0$.

(ii) Es existiert ein Koordinatensystem $(U, (x^i))$ um y mit $x^n(y) = 0$.

(iii) Es gibt $\varepsilon > 0$ und eine C^1 Kurve $\gamma : [-\varepsilon, 0] \to M$ mit $\gamma(0) = y$ und $\dot{\gamma}(0) \neq 0$, die keine C^1-Fortsetzung über 0 hinaus besitzt (d. h. es gibt keine C^1 Kurve $\tilde{\gamma} : [-\varepsilon, \delta] \to M$ mit $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ für $t \in [-\varepsilon, 0]$, wobei $\delta > 0$).

Tatsächlich, man sieht leicht daß für beliebige feste Koordinaten x^i um y, (iii) mit $x^n(y) = 0$ äquivalent ist (indem man γ als eine Kurve in $\mathbb{R}^n_+$ betrachtet), womit die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) entstehen.

Unter dem <u>Rand</u> der n-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit M versteht man die Menge ∂M aller Punkte $y \in M$ die der Bedingung (i) (bzw. (ii) oder (iii)) oben genügen. Es kann passieren, daß ∂M leer ist (genau dann, wenn M eine "gewöhnliche" n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist). Im allgemeinen ist die Menge $\partial M \subset M$ abgeschlossen (ist $y_m \in \partial M$, $y_m \to y$, so, in Koordinaten (x^i) um y, $x^n(y) = \lim_m x^n(y_m) = 0$).

∂M braucht nicht zusammenhängend zu sein (für $M = [a, b]$, $\partial M = \{a, b\}$). Bezüglich der Topologie von ∂M sind jedoch alle Zusammenhangskomponenten von ∂M gleichzeitig abgeschlossen und offen (in ∂M). Jeder Punkt von ∂M besitzt nämlich eine zusammenhängende Umgebung in ∂M (wie man in lokalen Koordinaten leicht feststellt), während die Abgeschlossenheit der Komponenten eine allgemein gültige Tatsache ist. Jede (nichtleere) Komponente von ∂M ist außerdem eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand ($n = \dim M$), genauer, eine Untermannigfaltigkeit von M; für $y \in \partial M$ und beliebige Koordinaten x^i in M um y, bilden die Funktionen $x^1, \ldots, x^{n-1}$ ein Koordinatensystem in (einer Komponente von) ∂M, und die entsprechenden Übergangsabbildungen sind offenbar C^∞-differenzierbar. Insbesondere ist, für $y \in \partial M$, $T_y \partial M \subset T_y M$ ein Unterraum der Kodimension 1; das Komplement $T_y M \setminus T_y \partial M$ hat also zwei zusammen-

hängende Komponenten, die sich immer kanonisch voneinander unterscheiden lassen.
Für beliebige Koordinaten x^i um y und $X \in T_y M$ ist nämlich $X \in T_y \partial M$ genau dann, wenn $X^n = 0$. Die zwei Komponenten von $T_y M \setminus T_y \partial M$ können also durch $X^n < 0$ (bzw. $X^n > 0$) definiert werden. Man sagt dabei, daß die entsprechenden Vektoren nach außen (bzw. nach innen) gerichtet sind. Diese Bedingungen sind koordinatenunabhängig, weil $X^n < 0$ genau dann, wenn es eine C^1 Kurve $\gamma : [-\varepsilon, 0] \to M$ gibt ($\varepsilon > 0$) mit $\gamma(0) = y$, $X = \dot\gamma(0) \notin T_y \partial M$.

Ist M eine *kompakte* berandete Mannigfaltigkeit, so hat ∂M nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, die alle kompakt sind (wäre $y_m \in \partial M$ eine Folge von Punkten, die jeweils in verschiedenen Komponenten von ∂M lägen, so könnte man, für eine Teilfolge, $y_m \to y$ annehmen, und man

bekommt einen Widerspruch, indem man Koordinaten um y betrachtet).

Sei (M, g) eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand* (so daß die *Metrik* g ein C^∞-Tensorfeld vom Typ $(0,2)$ auf M ist, das in jedem Punkt symmetrisch und positiv definit ist). Jede Komponente von ∂M trägt also (als Untermannigfaltigkeit von M) die induzierte Metrik ∂g. Außerdem entsteht *das äußere Normalenfeld* ν *längs* ∂M, das jedem $y \in \partial M$ den einzigen nach außen gerichteten, zu $T_y \partial M$ normalen Einheitsvektor $\nu(y) \in T_y M$ zuordnet. Das Feld ν ist C^∞-differenzierbar (d.h. die Komponenten von $\nu(y)$ bezüglich lokalen Koordinaten in M sind C^∞-Funktionen der lokalen ∂M-Koordinaten von y). In lokalen Koordinaten um y entsteht ν nämlich dadurch, daß man in dem C^∞-kovarianten Vektorfeld $-\dfrac{dx^n}{|dx^n|}$ den Index bezüglich

g heraufzieht.

SATZ 21 (Die Greensche Formel).
Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand, X ein C^1 Vektorfeld auf M. Dann ist

$$\int_M \delta X \cdot V_g = -\int_{\partial M} g(X,\nu)\cdot V_{\partial g}$$

(wobei man auf der rechten Seite die endlich vielen Integrale über die einzelnen Komponenten von ∂M summiert).

Beweis. Da die Formel linear bezüglich X ist, dürfen wir annehmen, daß X einen "kleinen" Träger hat, d. h. daß Träger (X) im Definitionsbereich $\mathcal{U}$ eines Koordinatensystems $(\mathcal{U},(x^i))$ liegt, wobei entweder

a) $\mathcal{U} \cap \partial M = \emptyset$,

oder

b) $\mathcal{U} \cap \partial M = \{y \in \mathcal{U} : x^n(y) = 0\}$,
$\nu = -\partial_n$ in $\partial M \cap \mathcal{U}$.

Solche Koordinatensysteme (und, wegen

Kompaktheit, auch endlich viele davon) überdecken nämlich ganz M (siehe das folgende Argument). Wählt man dazu eine entsprechende endliche Zerlegung der Eins, so wird jedes X zu einer endlichen Summe von Feldern mit solchen "kleinen" Trägern.

Jedes $y_0 \in M$ liegt in einem Koordinatensystem $(\mathcal{U},(x^i))$ vom Typ a) oder b): Ist $y_0 \notin \partial M$, so hat man a) für eine kleine Umgebung $\mathcal{U}$ von y_0. Sei nun $y_0 \in \partial M$, $(\mathcal{U}_{y_0}, x^1, \dots, x^{n-1}) = (\mathcal{U}_{y_0}, \psi)$ ein Koordinatensystem in ∂M um y (relativ kompakt). Definieren wir

$$\Phi : \psi(\mathcal{U}_{y_0}) \times [0,\varepsilon) \to M$$

durch $\Phi(x^1,\dots,x^n) =$

$$= \exp_{\psi^{-1}(x^1,\dots,x^{n-1})}\left(-x^n \cdot \nu(\psi^{-1}(x^1,\dots,x^{n-1}))\right)$$

wobei exp die (geodätische) Exponentialabbildung von (M,g) ist. Wegen der relativen Kompaktheit von $(\mathcal{U}_{y_0},\psi)$ ist es möglich, $\varepsilon > 0$ so zu wählen, daß Φ sinnvoll definiert und differenzierbar ist; nehmen wir auch an, daß $\psi(y_0) = 0$.

Nun ist, für $i < n$, $(d\Phi)_0(\partial_i) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(0,\dots,0,\underset{(i)}{t},0,\dots,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^{-1}(0,\dots,t,\dots,0) =$$

$= (d\psi^{-1})_0(\partial_i) \in T_{y_0}\partial M$, sowie $(d\Phi_0)(\partial_n) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(0,\dots,0,t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_{y_0}(-t\nu(y_0)) =$$

$= -\nu(y_0)$, d.h. $(d\Phi)_0$ ist ein Isomorphismus. Also, für eine Umgebung U von y_0, $(U, \Phi^{-1}) = (U, x^1,\dots,x^n)$ ist ein Koordinatensystem und offenbar $U \cap \partial M = \{y \in U : x^n(y) = 0\}$. Sei nun $y \in U \cap \partial M$, d.h. $\Phi^{-1}(y) = (x^1,\dots,x^{n-1},0)$. Wir haben $d\Phi_{(x^1,\dots,x^{n-1},0)}(\partial_n) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(x^1,\dots,x^{n-1},t) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_y(-t\nu(y)) = -\nu(y),$$

was nichts anderes bedeutet, als daß $\nu = -\partial_n$ in $\partial M \cap U$, womit b) gelten muß.

Sei nun X ein C^1-Vektorfeld auf M, dessen Träger im Koordinatensystem (U, x^i) wie oben liegt. Es ist

$$\delta X \cdot \sqrt{\det[g_{kl}]} = -X^i{}_{,i} \sqrt{\det[g_{kl}]} =$$

$$= -\partial_i\left(\sqrt{\det[g_{kl}]} \cdot X^i\right)$$

(vgl. Aufgabe $\underline{\mathrm{VI}}.2$), woher

$$\int_M \delta X \cdot V_g = \int_U \delta X \cdot \sqrt{\det[g_{kl}]} = 0, \text{ im Fall a)},$$

da $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i f = 0$ für $f \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$. Die Greensche Formel gilt also im Fall a), weil dann $X = 0$ auf ∂M. Für C^1-Funktionen f mit kompakten Trägern in $\mathbb{R}^n_+$ ist offenbar $\int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_i f = 0$ für $i < n$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_n f = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x^1,\dots,x^{n-1},0)\,dx^1\dots dx^{n-1}.$$

Im Fall b) ergibt dies, für $f = X^1,\dots,X^n$,

$$\int_M \delta X \cdot V_g = \int_U \delta X \cdot \sqrt{\det[g_{kl}]} =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_i \left(\sqrt{\det[g_{kl}]} \cdot X^i \right) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} X^n \sqrt{\det[g_{kl}]} \,,$$

wobei $\mathbb{R}^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n_+ : x^n = 0 \}$. Betrachtet man $x^1, \dots, x^{n-1}$ als Koordinaten für ∂M, so ist $\det[\partial g_{kl}]_{k,l \le n-1} = \det[g_{kl}]_{k,l \le n}$, da $g_{in} = 0$ für $i < n$ und $g_{nn} = 1$ (weil $\partial_n = -\nu$) auf $U \cap \partial M$. Da andererseits $X^n = -g(X,\nu)$, haben wir

$$\int_M \delta X \cdot V_g = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(X,\nu) \cdot \sqrt{\det[\partial g_{kl}]} =$$

$$= -\int_{\partial M} g(X,\nu) \cdot V_{\partial g} \,.$$

Somit ist der Satz bewiesen. q.e.d.

LEMMA 23. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (ohne Rand), f eine C^2-Funktion auf $\mathbb{R} \times M$ mit

$$\partial_t^2 f + \Delta f = 0,$$

$y \in M$, $c_0 > 0$ eine Zahl mit der Eigenschaft, daß

$$\exp_y : \overline{B}_{T_yM}(0,c_0) \longrightarrow \overline{B}_M(y,c_0)$$

ein Diffeomorphismus ist, wobei $\overline{B}_{T_yM}(0,c_0)$ (bzw. $\overline{B}_M(y,c_0)$) der abgeschlossene Ball mit Radius c_0 und Mittelpunkt 0 (bzw. y) in T_yM (bzw. in M) ist; c_0 ist also kleiner als der Injektivitätsradius von M in y. Ist $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $f(t_0,\cdot) = \partial_t f(t_0,\cdot) = 0$ auf $B_M(y,c_0)$, so ist, für alle $\varepsilon \in [0,c_0)$,

$$f(t_0+\varepsilon,\cdot) = \partial_t f(t_0+\varepsilon,\cdot) = 0$$

auf $B_M(y, c_0 - \varepsilon)$.

<u>Bemerkung</u>. Lemma 23 entspricht der physikalischen Tatsache, daß sich Wellen mit endlicher Geschwindigkeit verbreiten. Herrscht nämlich im Ball $B_M(y, c_0)$ im Zeitpunkt t_0 Ruhe, so kann die Störung (die irgendwo außerhalb des Balles vorhanden ist) den Ball $B_M(y, c_0 - \varepsilon)$ bis zum Zeitpunkt $t_0 + \varepsilon$ nicht erreichen; die Geschwindigkeit der Wellenbewegung ist also nicht größer als 1. Das entsprechende globale Resultat beweisen wir später (Satz 22).

<u>Beweis</u>. Für $\varepsilon \in [0, c_0)$, sei $B_\varepsilon = B_M(y, c_0 - \varepsilon)$ und

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(\int_{B_\varepsilon} [\partial_t f(t_0+\varepsilon, \cdot)]^2 + \int_{B_\varepsilon} |\nabla(f(t_0+\varepsilon, \cdot))|^2 \Big).$$

Allgemeiner, setzen wir

$$E_{\varepsilon,\sigma} = \int_{B_\varepsilon} F(\sigma, y)\, V_g(y)$$

für $\varepsilon, \sigma \in [0, c_0)$, wobei $F : [0, c_0) \times M \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion ist. Was wir jetzt beweisen, werden wir auf $F(\sigma, \cdot) = \frac{1}{2}[\partial_t f(t_0+\sigma, \cdot)]^2 + \frac{1}{2}|\nabla(f(t_0+\sigma, \cdot))|^2$ anwenden.

(i) Die Funktion $(\varepsilon, \sigma) \mapsto E_{\varepsilon,\sigma}$ ist stetig (wobei nur die Stetigkeit von F wesentlich ist).

Tatsächlich, $|E_{\varepsilon,\sigma} - E_{\varepsilon_0,\sigma_0}| \leq$

$$\leq |E_{\varepsilon,\sigma} - E_{\varepsilon,\sigma_0}| + |E_{\varepsilon,\sigma_0} - E_{\varepsilon_0,\sigma_0}| \leq$$

$$\leq \int_{B_\varepsilon} |F(\sigma,\cdot) - F(\sigma_0,\cdot)| + \int_{(B_{\varepsilon_0} \setminus B_\varepsilon) \cup (B_\varepsilon \setminus B_{\varepsilon_0})} |F(\sigma_0, \cdot)|$$

Da $\int_{B_\varepsilon} |F(\sigma,\cdot) - F(\sigma_0,\cdot)| \leq \int_{B_0} |F(\sigma,\cdot) - F(\sigma_0,\cdot)|$, konvergiert das erste Integral oben gegen Null für $\sigma \to \sigma_0$ (Satz von der majorisierten Konvergenz). Im zweiten Integral dürfen wir annehmen, daß $\varepsilon \to \varepsilon_0$ monoton von oben (oder von unten), und das Integral muß auch gegen Null konvergieren (Stetigkeit des Integrals bezüglich der Integrationsmenge).

(ii) Bei festem ε ist $\sigma \mapsto E_{\varepsilon,\sigma}$ eine C^1 Funktion und $\frac{\partial}{\partial\sigma} E_{\varepsilon,\sigma} = \int\limits_{B_\varepsilon} \partial_\sigma F(\sigma,\cdot)$

(so daß, nach (i), die Zuordnung $(\varepsilon,\sigma) \mapsto$ $\mapsto \frac{\partial}{\partial\sigma} E_{\varepsilon,\sigma}$ stetig ist). Dies folgt sofort aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

(iii) Bei festem σ ist $\varepsilon \to E_{\varepsilon,\sigma}$ eine C^1 Funktion und $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} E_{\varepsilon,\sigma} = -\int\limits_{\partial B_\varepsilon} F(\sigma,\cdot) V_{\partial g}$

(wobei man (B_ε, g) als eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand betrachtet). Die Funktion $(\varepsilon,\sigma) \to \frac{\partial}{\partial\varepsilon} E_{\varepsilon,\sigma}$ ist wieder stetig.

Um (ii) zu beweisen, dürfen wir annehmen, daß $F(\sigma,\cdot) = 0$ in einer kleinen Umge-

bung von y (wenn man $F(\sigma,\cdot)$ in dieser Weise in einer Umgebung von y modifiziert, ändert sich die Funktion $\varepsilon \to E_{\varepsilon,\sigma}$ nur durch eine additive Konstante, falls ε weit genug von c_0 liegt), sowie, daß $F(\sigma,\cdot)$ einen kleinen Träger hat (man kann unser $F(\sigma,\cdot)$ in eine Summe von solchen zerlegen). Um den Träger von $F(\sigma,\cdot)$ gibt es dann ein Koordinatensystem (U, x^i) mit $U \cap B_\varepsilon = \{z \in U : x^n(z) \geq \varepsilon\}$, $U \cap \partial B_\varepsilon =$ $= \{z \in U : x^n(z) = \varepsilon\}$, und $g_{nn} = 1$ sowie $g_{ni} = 0$ auf U für $i < n$. Ist nämlich ε_0 fest, $(\tilde{U}, \psi) = (\tilde{U}, x^1, \dots, x^{n-1})$ ein Koordinatensystem in $\partial B_{\varepsilon_0}$ und ν das äußere Normalenfeld längs $\partial B_{\varepsilon_0} \subset B_{\varepsilon_0}$, so definiert die gleiche Formel wie auf S. 340 (lokal) einen Diffeomorphismus $\Phi : \psi(\tilde{U}) \times (-\delta,\delta) \to \mathrm{Bild}(\Phi) \subset M$ und somit ein Koordinatensystem $(\mathrm{Bild}(\Phi), \Phi^{-1}) = (U, \tilde{x}^i)$ in M. Setzt man $x^i = \tilde{x}^i$ für $i < n$, $x^n =$ $= \tilde{x}^n + \varepsilon_0$, so erhält man die gewünschten

Koordinaten x^i (weil, nach dem Lemma von Gauss, die von y ausgehenden Geodätischen die kleinen metrischen Sphären ∂B_ε um y senkrecht schneiden). Insbesondere ist, in diesen Koordinaten, $\det[g_{kl}]_{k,l\le n} = \det[\partial g_{kl}]_{k,l<n}$, wobei ∂g die induzierte Metrik der jeweiligen Sphäre $\partial B_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ ist. Ist $F(\sigma, z) = \tilde F(\sigma, x^1(z), \dots, x^n(z))$, so

$$E_{\varepsilon,\sigma} = \int_{x^n\geq\varepsilon} dx^n \left(\int_{R^{n-1}} \tilde F(\sigma, x^1,\dots,x^n)\sqrt{\det[g_{kl}]}\,dx^1\dots dx^{n-1}\right)$$

woher offenbar die Ableitung

$$\frac{d}{d\varepsilon}E_{\varepsilon,\sigma} = -\int_{R^{n-1}} \tilde F(\sigma, x^1,\dots,\varepsilon)\sqrt{\det[g_{kl}]}\Big|_{x^n=\varepsilon} dx^1\dots dx^{n-1}$$

existieren muß, und $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}E_{\varepsilon,\sigma} = -\int_{\partial B_\varepsilon} F(\sigma,\cdot)\,V_{\partial g}$ (weil $\det[g_{kl}] = \det[\partial g_{kl}]$). Diese Ableitung hängt von (ε,σ) stetig ab (weil $\int_{\partial B_\varepsilon} F(\sigma,\cdot)\,V_{\partial g(\varepsilon)} = \int_{\partial B_{\varepsilon_0}} \hat F(\sigma,\varepsilon,\cdot)\,V_{\partial g(\varepsilon_0)}$, $(\sigma,\varepsilon,z)\to\hat F(\sigma,\varepsilon,z)$ stetig).

Wegen (i), (ii), (iii) ist nun $\varepsilon \mapsto E_{\varepsilon,\varepsilon}$ eine C^1-Funktion und $\frac{d}{d\varepsilon}E_{\varepsilon,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}E_{\varepsilon,\sigma}\Big|_{\sigma=\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial\sigma}E_{\varepsilon,\sigma}\Big|_{\sigma=\varepsilon} = -\int_{\partial B_\varepsilon} F(\varepsilon,\cdot)\,V_{\partial g} + \int_{B_\varepsilon}\partial_\sigma F(\varepsilon,\cdot)\,V_g$.

Nimmt man für F die auf S. 346 angegebene Funktion, so ist $\varepsilon\mapsto E_\varepsilon = E_{\varepsilon,\varepsilon}$ C^1-differenzierbar und

$$\frac{d}{d\varepsilon}E_\varepsilon = \int_{B_\varepsilon}\partial_\sigma F(\varepsilon,\cdot)\,V_g - \int_{\partial B_\varepsilon} F(\varepsilon,\cdot)\,V_{\partial g},$$

F wie auf S. 346. Nun ist aber

$$\partial_\sigma F(\varepsilon,\cdot) = \partial_t f(t_0+\varepsilon,\cdot)\cdot\partial_t^2 f(t_0+\varepsilon,\cdot) + g\big(\nabla(\partial_t f(t_0+\varepsilon,\cdot)),\nabla(f(t_0+\varepsilon,\cdot))\big).$$

Nach Satz 21 ist aber $\int_{B_\varepsilon} g(\nabla h,\nabla\varphi)\,V_g =$

$$= \int_{B_\varepsilon} h_{,i}\varphi_,{}^i = \int_{B_\varepsilon}(h\varphi_,{}^i)_{,i} - \int_{B_\varepsilon} h\,\varphi_,{}^i{}_i =$$

$$= -\int_{B_\varepsilon}\delta(h\nabla\varphi) + \int_{B_\varepsilon} h\,\Delta\varphi =$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon} h\cdot g(\nabla\varphi,\nu)\,V_{\partial g} + \int_{B_\varepsilon} h\cdot\Delta\varphi.$$

Wendet man dies auf $h = \partial_t f(t_0+\varepsilon, \cdot)$, $\varphi = f(t_0+\varepsilon,\cdot)$ an, so $\int_{B_\varepsilon} \partial_\sigma F(\varepsilon,\cdot) V_g =$

$$= \int_{B_\varepsilon} \partial_t f(t_0+\varepsilon,\cdot)\cdot \partial_t^2 f(t_0+\varepsilon,\cdot) +$$

$$+ \int_{B_\varepsilon} \partial_t f(t_0+\varepsilon,\cdot)\, \Delta(f(t_0+\varepsilon,\cdot)) + \int_{\partial B_\varepsilon} h\cdot g(\nabla\varphi,\nu) V_{\partial g} =$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon} h\cdot g(\nabla\varphi,\nu)\, V_{\partial g} \quad (\text{da } \partial_t^2 f + \Delta f = 0).$$

Wegen der Schwarzschen Ungleichung mit $|\nu| = 1$ ist also

$$\int_{B_\varepsilon} \partial_\sigma F(\varepsilon,\cdot) V_g \leq \int_{\partial B_\varepsilon} |h|\cdot|\nabla\varphi|\cdot V_{\partial g} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\partial B_\varepsilon} (h^2 + |\nabla\varphi|^2)\, V_{\partial g} = \int_{\partial B_\varepsilon} F(\varepsilon,\cdot) V_{\partial g}.$$

Deshalb $\frac{d}{d\varepsilon} E_\varepsilon = \int_{B_\varepsilon} \partial_\sigma F(\varepsilon,\cdot) V_g -$

$- \int_{\partial B_\varepsilon} F(\varepsilon,\cdot) V_{\partial g} \leq 0$. Die Funktion $\varepsilon \longrightarrow E_\varepsilon$ nimmt also ab in $[0, c_0)$ (physikalisch ist E_ε der in B_ε enthaltene Teil der Gesamtenergie der Welle; daß E_ε abnimmt, bedeutet wieder nichts anderes als endliche Geschwindigkeit der Wellenverbreitung). Es ist aber $E_0 = 0$ (Voraussetzung) und $E_\varepsilon \geqslant 0$ (Definition von E_ε), woher nun $E_\varepsilon = 0$ für alle $\varepsilon \in [0, c_0)$. Also, $\partial_t f(t_0+\varepsilon,\cdot) =$ $= 0$ in B_ε, $\varepsilon \in [0, c_0)$.

Sei $z \in B_\varepsilon$, $s \in [0,\varepsilon]$. Da $z \in B_\varepsilon \subset B_s$, ist $\partial_t f(t_0+s, z) = 0$. Die Funktion $[0,\varepsilon] \ni s \longmapsto f(t_0+s, z) \in \mathbb{R}$ ist also konstant (Ableitung gleich Null!), woher $f(t_0+s,z) = 0$ für $s \in [0,\varepsilon]$, da dies nach Voraussetzung für $s = 0$ gilt. Mit $s = \varepsilon$ haben wir nun $f(t_0+\varepsilon, z) = 0$, $z \in B_\varepsilon$ beliebig, d.h. $f(t_0+\varepsilon,\cdot) = 0$ auf B_ε. Somit ist das Lemma bewiesen.

SATZ 22. Sei $f \in C^2(\mathbb{R} \times M)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_t^2 f + \Delta f = 0$$

auf der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) (ohne Rand). Sei $A = \overline{A} \subset M$, $t_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{Träger } f(t_0, \cdot) \subset A, \quad \text{Träger } \partial_t f(t_0, \cdot) \subset A.$$

Für $\varepsilon > 0$ sei

$$A_\varepsilon = \{y \in M : d(y, A) \leq \varepsilon\}$$

("die abgeschlossene metrische ε-Hülle" um A; d ist die Abstandsfunktion).

Dann gilt, für jedes $\varepsilon > 0$,

$$\text{Träger } f(t_0+\varepsilon, \cdot) \subset A_\varepsilon, \quad \text{Träger } \partial_t f(t_0+\varepsilon, \cdot) \subset A_\varepsilon.$$

[Siehe auch Bemerkung auf S. 345].

<u>Beweis</u>. Sei zunächst $\varepsilon > 0$ kleiner als der Injektivitätsradius in jedem Punkt von M; da M kompakt ist, muß es so ein ε geben. Ist $y \in M$ mit $y \notin A_\varepsilon$, so

verschwinden $f(t_0, \cdot)$ und $\partial_t f(t_0, \cdot)$ identisch im ε-Ball um y. Wegen Lemma 23 (Grenzwert für $\varepsilon = c_0$) ist $f(t_0+\varepsilon, y) = \partial_t f(t_0+\varepsilon, y) = 0$. Da $y \notin A_\varepsilon$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung des Satzes für jedes ε, das kleiner ist als der (globale) Injektivitätsradius von (M, g). Für solche ε sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt mit $t_0 + \varepsilon$ statt t_0 und A_ε statt A.

Da, offenbar, $(A_\varepsilon)_\varepsilon \subset A_{2\varepsilon}$, haben wir also Träger $(|f(t_0+2\varepsilon, \cdot)| + |\partial_t f(t_0+2\varepsilon, \cdot)|) \subset (A_\varepsilon)_\varepsilon \subset A_{2\varepsilon}$ und genauso (Induktion!)

Träger $(|f(t_0+k\varepsilon, \cdot)| + |\partial_t f(t_0+k\varepsilon, \cdot)|) \subset A_{k\varepsilon}$ für jedes natürliche k und $\varepsilon > 0$ klein genug. Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es aber $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ und $\varepsilon' > 0$, kleiner als der globale Injektivitätsradius von (M, g), mit $\varepsilon = k\varepsilon'$. Somit gilt unsere Behauptung für jedes $\varepsilon > 0$.

q.e.d.

5.04.1984

VEKTORBÜNDEL

Seien E und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi : E \to M$ eine C^∞-Abbildung. Setzen wir voraus, daß jede *Faser* $\pi^{-1}(y)$ (d.h. das π-Urbild eines beliebigen Punktes $y \in M$) die Struktur eines reellen (bzw. komplexen) Vektorraumes einer festen (von y unabhängigen) Dimension m besitzt (also muß π surjektiv sein, weil jedes $\pi^{-1}(y)$ nichtleer ist). Ein solches System, das aus E, M, π sowie den Vektorraumstrukturen in jeder Faser $\pi^{-1}(y)$ besteht, nennt man ein *m-dimensionales reelles* (bzw. *komplexes*) *Vektorbündel*, wenn es für jedes $y \in M$ eine Umgebung U von y in M und einen Diffeomorphismus

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{F}^m$$

gibt (wobei $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\Phi = (\pi, \dots)$, d.h. die U-Komponente von Φ ist π;

(ii) Für jedes $z \in U$ ist

$$\Phi : \pi^{-1}(z) \longrightarrow \{z\} \times \mathbb{F}^m$$

ein linearer Isomorphismus, wobei man $\{z\} \times \mathbb{F}^m$ kanonisch mit $\mathbb{F}^m$ identifiziert (indem man z vergißt).

Terminologie. In der obigen Situation bezeichnet man das Vektorbündel (das aus E, M, π und den Vektorraumstrukturen in den Fasern besteht) einfach mit E. Die Faser $\pi^{-1}(y)$ wird auch mit E_y bezeichnet. E heißt der *Totalraum* (*Bündelraum*), M die *Basis* (*Basismannigfaltigkeit*), π die *Projektion*, $\mathbb{R}^m$ (bzw. $\mathbb{C}^m$) der *Fasertyp* (die *Standardfaser*) des Bündels, m die Faserdimension. Ein Diffeomorphismus Φ mit den genannten Eigenschaften wird eine <u>lokale</u> <u>Trivialisierung</u> des Bündels (über U) genannt.

<u>Beispiel</u>. Sei $E = M \times \mathbb{F}^m$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $\pi: E \to M$ die Projektion auf den ersten Faktor. Ist jede Faser $\pi^{-1}(y) = \{y\} \times \mathbb{F}^m \approx \mathbb{F}^m$ mit der Vektorraumstruktur des $\mathbb{F}^m$ versehen, so wird E zu einem Vektorbündel, dem sogenannten <u>Produktbündel</u>. Als eine <u>globale</u> Trivialisierung (mit $U = M$) kann man die Identitätsabbildung $E \to M \times \mathbb{F}^m$ nehmen.

Sei nun E ein Vektorbündel mit Basis M und Fasertyp $\mathbb{F}^m$. Sind Φ, Φ' zwei lokale Trivialisierungen von E (über U, bzw. U'), so hat man

$$\Phi' \circ \Phi^{-1} : (U \cap U') \times \mathbb{F}^m \to (U \cap U') \times \mathbb{F}^m$$

mit $\Phi' \circ \Phi^{-1}(y, \xi) = (y, F(y)\xi)$,

wobei $F: U \cap U' \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^m)$ wegen (i), (ii) auf Seite 356. Die Gruppe

$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}^m)$ der linearen Automorphismen des $\mathbb{F}^m$ ist eine offene Teilmenge des Endomorphismenraumes $\mathrm{End}(\mathbb{F}^m)$ (d.h. des m^2-dimensionalen Raumes aller $(m \times m)$-Matrizen über $\mathbb{F}$). Da $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ C^∞-differenzierbar ist, muß auch F es sein: ist ξ_i eine Basis von $\mathbb{F}^m$ und ξ^i die dazu duale Basis des dualen Raumes $(\mathbb{F}^m)^*$, so haben wir die Kette von C^∞-Abbildungen

$$y \to F(y)\xi_i \to \xi^j(F(y)\xi_i) = F_i{}^j(y)$$

und somit hängen die Matrixkomponenten $F_i{}^j(y)$ von $F(y)$ differenzierbar von y ab.

In vielen geometrisch wichtigen Fällen entstehen Vektorbündel dadurch, daß man zunächst den Totalraum E als eine Menge beschreibt, wobei π und die Vektorraumstrukturen der Fasern in natürlicher Weise definiert sind. Was dann umständlich sein kann, ist die Beschreibung der Mannigfaltigkeitsstruktur auf E. Wir können uns davon befreien, indem wir bemerken, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit E folgendermaßen definiert werden kann.

Sei E eine Menge, $\{U_t\}_{t\in T}$ eine Familie ihrer Teilmengen mit $\bigcup_{t\in T} U_t = E$ und $\{\varphi_t\}_{t\in T}$ eine Familie von Bijektionen $\varphi_t : U_t \to M_t$, wobei M_t C^∞-Mannigfaltigkeiten einer festen Dimension k sind. Nehmen wir an, daß für beliebige $t, t' \in T$, $\varphi_t(U_t \cap U_{t'})$ eine offene Teilmenge von M_t ist und

$$\varphi_{t'} \circ \varphi_t^{-1} : \varphi_t(U_t \cap U_{t'}) \to \varphi_{t'}(U_t \cap U_{t'})$$

eine C^∞-Abbildung. Dann gibt es auf E genau eine Topologie, für die die Mengen U_t offen sind und die φ_t Homöomorphismen. In dem so entstandenen topologischen Raum E ist nun $\{(U_t, \varphi_t)\}_{t\in T}$ ein Atlas von Koordinatensystemen mit differenzierbaren Übergangsfunktionen. Somit wird E beinahe zu einer k-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit; was fehlen kann, ist die Hausdorff-Eigenschaft (die Trennbarkeit jedes Paares von verschiedenen Punkten durch disjunkte Umgebungen) und, außerdem, braucht E nicht zusammenhängend zu sein. Diese beiden Eigenschaften müssen wir also jedesmal direkt prüfen, wenn wir eine Mannigfaltigkeit allein durch einen Atlas von Koordinatensystemen bestimmen wollen (die den obengenannten Bedingungen genügen), ohne die Topologie anzugeben.

Insbesondere kann ein Vektorbündel durch folgendes eindeutig bestimmt werden:

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, E eine Menge, $\pi : E \to M$ eine Abbildung. Jede Faser $\pi^{-1}(y)$, $y \in M$, sei mit der Struktur eines m-dimensionalen reellen (bzw. komplexen) Vektorraumes versehen. Nehmen wir an, daß es für jedes $y \in M$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von y in M und eine Bijektion

$$\Phi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times \mathbb{F}^m$$

gibt ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), die die Bedingungen (i), (ii) von S. 356 erfüllt. Für zwei solche Paare $(\mathcal{U}, \Phi)$, $(\mathcal{U}', \Phi')$ (natürlich nicht ganz beliebige, sondern aus unserem "Atlas" von Paaren $(\mathcal{U}, \Phi)$, deren "Definitionsbereiche" $\mathcal{U}$ ganz M überdecken) setzen wir voraus, daß $\Phi' \circ \Phi^{-1} : (\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \times \mathbb{F}^m \to (\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \times \mathbb{F}^m$ die Form $\Phi' \circ \Phi^{-1}(y, \xi) = (y, F(y)\xi)$ hat, wobei $F : \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^m)$ C^∞-differenzierbar ist (hier ist die Differenzierbarkeit wichtig; sonst muß $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ immer diese Form haben).

Dann wird E zu einem m-dimensionalen reellen (bzw. komplexen) Vektorbündel mit Basis M und Projektion π. Unsere Paare $(\mathcal{U}, \Phi)$ sind lokale Trivialisierungen dieses Bündels. Tatsächlich, für solche $(\mathcal{U}, \Phi)$, sind $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \Phi)$ Koordinatensysteme für die Menge E, die die Bedingungen von S. 359 erfüllen. Zwei verschiedene Punkte von E liegen entweder in verschiedenen Fasern – und dann trennt man sie durch π-Urbilder disjunkter Umgebungen ihrer Projektionen – oder in der gleichen Faser, und dann folgt das Hausdorff-Axiom aus der Existenz der lokalen Trivialisierung. Außerdem ist E, mit der eingeführten Topologie, automatisch zusammenhängend: zwei Punkte können durch stetige Kurven mit den Null-Vektoren ihrer Fasern verbunden werden, die man ihrerseits als Punkte von M betrachtet und somit in M verbindet. Ein Vektorbündel ist also allein durch Angaben wie auf S. 360-361 eindeutig bestimmt.

Beispiel. Das Tangentialbündel $E = TM$ einer beliebigen n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Die Fasern $E_y = T_yM$ $(y \in M)$ sind die Tangentialräume, die man als paarweise disjunkt betrachtet (z. B. mit der Konvention $T_yM = \{y\} \times T_yM$), mit ihren Strukturen der n-dimensionalen reellen Vektorräume. Den Totalraum definiert man durch $E = \bigcup_{y \in M} T_yM$ (disjunkt) und die Projektion $\pi : E \to M$ durch $\pi(T_yM) = \{y\}$ ($\pi(X) = y$ falls $X \in T_yM$).

Jedes Koordinatensystem (U, x^i) in M definiert eine lokale Trivialisierung

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$$

mit

$$\Phi(X) = (\pi(X), X^1, \dots, X^n)$$

(man ordnet jedem Vektor $X \in T_yM$, $y \in U$, den Punkt $y = \pi(X)$ und die Komponenten X^i von X bezüglich x^i zu). Für ein anderes Koordinatensystem $(U', x^{i'})$ und das entsprechende Φ', gilt in $U \cap U'$

$$\Phi' \circ \Phi^{-1}(y, (\xi^i)_{i=1,\dots,n}) =$$

$$= (y, (A^{i'}_i(y)\xi^i)_{i'=1,\dots,n})$$

(Transformationsregel für Vektoren). Da die Zuordnung $y \to A^{i'}_i(y) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(y)$ C^∞-differenzierbar ist, wird TM zu einem Vektorbündel.

Beispiel. Das Vektorbündel T^p_qM aller Tensoren vom Typ (p, q) auf der n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Die Menge $T^p_q M$ ist die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{y \in M} (T^p_q M)_y$, wobei $(T^p_q M)_y$ der n^{p+q}-dimensionale Raum aller Tensoren vom Typ (p,q) in y ist. Die Projektion $\pi : T^p_q M \to M$ ordnet jedem Tensor in $(T^p_q M)_y$ den Punkt y zu. Jedes Koordinatensystem (U, x^i) in M bestimmt eine "lokale Trivialisierung" $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{n^{p+q}}$ mit

$$\Phi(H) = (\pi(H), (H_{j_1 \dots j_q}{}^{i_1 \dots i_p})_{i_1,\dots,i_p, j_1,\dots,j_q = 1,\dots,n}).$$

Die Übergangsabbildung zwischen zwei solchen Trivialisierungen hat die richtige (differenzierbare) Form wegen der Transformationsregel für Tensoren. Nach der Konstruktion von S. 360-361 wird $T^p_q M$ zu einem n^{p+q}-dimensionalen reellen Vektorbündel über M.

Statt aller Tensoren vom Typ (p,q) kann man nur die Tensoren betrachten, die einer festen koordinatenunabhängigen linearen Bedingung genügen; somit entsteht auch

ein Vektorbündel mit den gleichen lokalen Trivialisierungen wie oben. Beispiele: das Vektorbündel der symmetrischen Tensoren vom Typ $(0,2)$, das Bündel der Tensoren vom Typ $(1,1)$ deren Spur verschwindet, sowie, für jedes k, das Vektorbündel $\Lambda^k M$ aller Tensoren H vom Typ $(0,k)$ die schiefsymmetrisch sind ($H_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} = \varepsilon(\sigma) H_{i_1 \dots i_k}$ für jede Permutation σ von $\{1, \dots, k\}$, wobei $\varepsilon(\sigma)$ das Vorzeichen von σ ist). Die schiefsymmetrischen Tensoren vom Typ $(0,k)$ werden auch (alternierende) k-Formen genannt.

Seien E, E' zwei Vektorbündel mit derselben Basismannigfaltigkeit M. Unter einem M-Isomorphismus zwischen E und E' versteht man einen Diffeomorphismus $F : E \to E'$ der Totalräume, der die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\pi' \circ F = \pi$, wobei π und π' die Projektionen von E bzw. E' sind (d.h., $F(E_y) \subset E'_y$ für jedes $y \in M$).

(ii) Für jedes $y \in M$ ist die Einschränkung $F\colon E_y \to E'_y$ ein linearer Isomorphismus.

Die Vektorbündel E, E' über M heißen M-isomorph, wenn es einen M-Isomorphismus zwischen E und E' gibt. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Ein Vektorbündel E über M heißt <u>trivial</u>, wenn es mit einem Produktbündel isomorph ist.

<u>Bemerkung</u>. Einen M-Isomorphismus F zwischen Vektorbündeln E, E' über M kann man auch als eine C^∞-Abbildung $F\colon E \to E'$ definieren, die den Bedingungen (i), (ii) oben genügt (ohne vorauszusetzen, daß F diffeomorph ist). Nach (i) und (ii) ist F nämlich bijektiv. Wählt man für E und

E' lokale Trivialisierungen Φ, Φ' über einer gemeinsamen offenen Teilmenge $U \subset M$, so muß die C^∞-Abbildung

$$\varphi = \Phi' \circ F \circ \Phi^{-1} \colon U \times \mathbb{F}^m \to U \times \mathbb{F}^m$$

die Form $\varphi(y, \xi) = (y, h(y)\xi)$ haben, wobei $h\colon U \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^m)$ C^∞-differenzierbar ist (das gleiche Argument wie auf S. 358). Also, $\varphi^{-1}(y, \xi) = (y, h(y)^{-1}\xi)$, woher auch φ^{-1} (und somit F^{-1}) differenzierbar ist, weil die Transformation $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}^m) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^m)$ bekanntlich durch eine algebraische Formel beschrieben ist.

Sei E ein Vektorbündel über M. Unter einem stetigen (bzw. C^∞-differenzierbaren) <u>Schnitt</u> von E versteht man eine Abbildung $\sigma\colon M \to E$, die stetig (bzw. C^∞-differenzierbar) ist und die Gleichung $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$ erfüllt;

σ ordnet also jedem $y \in M$ ein Element $\sigma(y)$ der Faser E_y zu. Für $E = TM$ oder $E = T^p_q M$ sind die stetigen (bzw. C^∞-differenzierbaren) Schnitte nichts anderes als die stetigen (bzw. differenzierbaren) Vektor- oder Tensorfelder auf M. Für das Produktbündel $E = M \times \mathbb{F}^m$ sind die Schnitte Abbildungen der Form

$$y \longmapsto (y, f(y))$$

die man mit $f : M \to \mathbb{F}^m$ identifizieren darf; die stetigen (bzw. C^∞-differenzierbaren) Schnitte des Produktbündels können also als stetige (bzw. C^∞-differenzierbare) Abbildungen der Basis in die Standardfaser betrachtet werden.

Ein m-dimensionales reelles oder komplexes Vektorbündel E über M ist trivial genau dann, wenn es C^∞-Schnitte $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ zuläßt, die in jedem Punkt $y \in M$ eine Basis der Faser E_y bilden.

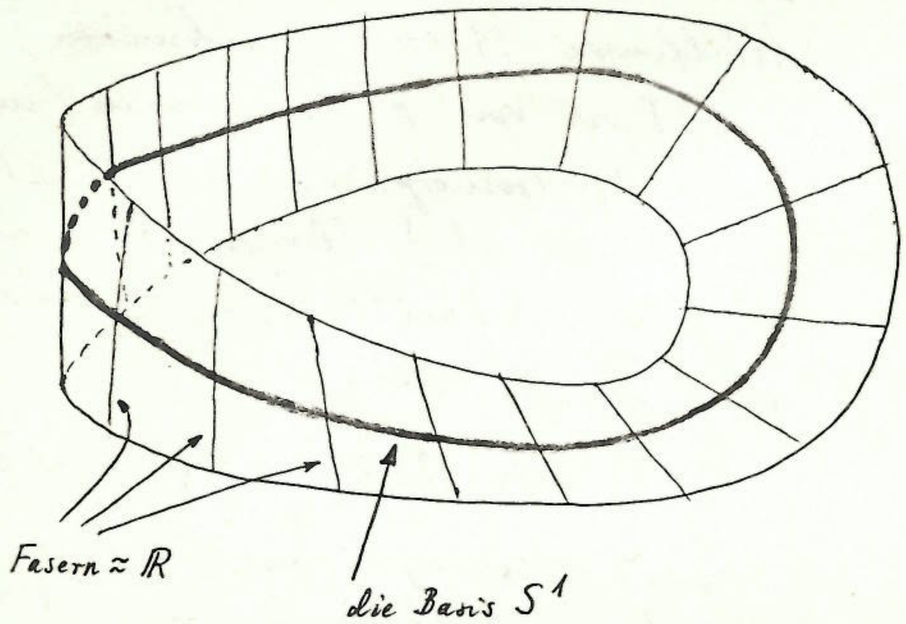
Im Produktbündel $M \times \mathbb{F}^m$ kann man nämlich solche Schnitte als konstante Abbildungen $M \to \mathbb{F}^m$ definieren, die einer Basis von $\mathbb{F}^m$ entsprechen (und jeder M-Isomorphismus bildet Schnitte in Schnitte ab). Umgekehrt, wenn E solche Schnitte $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ zuläßt, muß die Abbildung

$$M \times \mathbb{F}^m \ni (y, \xi^1, \dots, \xi^m) \mapsto \xi^1 \sigma_1(y) + \dots + \xi^m \sigma_m(y) \in E$$

ein M-Isomorphismus sein (vgl. die Bemerkung, S. 367).

<u>Beispiel</u> <u>eines</u> <u>nicht</u>-<u>trivialen</u> <u>Vektorbündels</u>: das Möbiussche Band. Dies ist ein reelles Geradenbündel (= eindimensionales Vektorbündel) über dem Kreis S^1; vgl. die Abbildung auf S. 371. Die Basis wird mit dem Null-Schnitt identifiziert, der jedem y den Vektor $0 \in E_y$ zuordnet; für jedes Vektorbün-

Totalraum E = das Band (ohne Randkurve)



del kann man somit die Basis als eine Untermannigfaltigkeit des Totalraumes betrachten, nämlich als das Bild des Null-Schnittes (übrigens ist jeder C^∞-Schnitt, wegen der Definition, eine injektive Immersion, d.h. eine Einbettung).

Die Basis

$$\mathbb{RP}^1 = \{L : L \subset \mathbb{R}^2,\ L \text{ ist eine Gerade},\ 0 \in L\}$$

kann man bijektiv auf

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

abbilden, in dem man aus jeder Geraden $L \in \mathbb{RP}^1$ einen Einheitsvektor v nimmt und der Geraden die komplexe Zahl $v^2 \in S^1$ (komplexe Multiplikation) zuordnet. Damit wird $\mathbb{RP}^1$ zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit. Den Totalraum definieren wir als die Menge

$$E = \{(L, v) \in \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2 : v \in L\}$$

mit der Projektion $\pi(L, v) = L$; die Faser $E_L = \{L\} \times L$ trägt die Vektorraumstruktur der Geraden L.

Lokale Trivialisierungen: Sei $L_1 \in \mathbb{RP}^1$ (bzw. $L_2 \in \mathbb{RP}^1$) die x-Achse (bzw. die y-Achse), $\mathcal{U}_1 = \mathbb{RP}^1 \setminus \{L_1\}$, $\mathcal{U}_2 = \mathbb{RP}^1 \setminus \{L_2\}$. Jedes $L \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_1)$ (bzw. $L \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_2)$) enthält genau einen

Einheitsvektor v_L mit $\operatorname{Im} v_L > 0$ (bzw. $\operatorname{Re} v_L > 0$). Die lokalen Trivialisierungen $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, definieren wir durch

$\Phi_i(L, v) = (L, \lambda)$, wobei $v = \lambda v_L$.

Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ hat zwei Komponenten, und $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R} \to (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}$ hat die Form $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(L, \lambda) = (L, \pm\lambda)$, wobei das Vorzeichen in jeder Komponente von $U_1 \cap U_2$ konstant ist. Somit wird E zu einem Vektorbündel (vgl. S. 360-361).

Wäre E trivial, so könnte $E \setminus \mathbb{R}P^1$ (das Komplement des 0-Schnittes) nicht zusammenhängend sein (vgl. das Produktbündel $M \times \mathbb{R}$) und zwar, würden für jedes $L \in \mathbb{R}P^1$ und $\xi \in E_L$ mit $\xi \neq 0$ die Vektoren ξ und $-\xi$ in verschiedenen Komponenten von $E \setminus \mathbb{R}P^1$ liegen.

Dies ist aber nicht der Fall. Wir haben die stetige Abbildung $S^1 \ni z \longmapsto (L(z), v(z)) = (\mathbb{R}z, z) \in E$, die Werte in $E \setminus \mathbb{R}P^1$ annimmt, während ihr Bild mit jedem $(L, v) = (\mathbb{R}z, z)$ auch $(L, -v) = (\mathbb{R}(-z), -z)$ enthält, so daß (L, v) und $(L, -v)$ in derselben Komponente von $E \setminus \mathbb{R}P^1$ liegen. <u>Das</u> <u>Möbiussche</u> <u>Band</u> <u>ist</u> also <u>ein</u> <u>nichttriviales</u> <u>Geradenbündel</u> <u>über</u> S^1.

Sei E ein m-dimensionales ($m > 0$) <u>reelles</u> Vektorbündel über M. E heißt <u>orientierbar</u>, wenn man jedem Punkt $y \in M$ eine Orientierung der Faser E_y zuordnen kann, die stetig von y abhängt, d.h. jeder Punkt $y \in M$ besitzt eine Umgebung $U \subset M$ mit auf U definierten C^∞-Schnitten $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, die in jedem Punkt von U eine Basis der Faser bilden, so daß diese Basis die vorgeschriebene Orientierung bestimmt.

<u>Bemerkung</u>. Wegen der Existenz der lokalen Trivialisierungen, gibt es für jedes Vektorbündel E über M und jedes $y \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ von y, auf welcher C^∞-Schnitte $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ existieren, die in jedem Punkt von U eine Basis der Faser bilden (solche "lokalen" Schnitte σ sind C^∞-Abbildungen $\sigma: U \to E$ mit $\pi \circ \sigma = Id_U$). Somit kann man die Orientierungen der Fasern "stetig auf U" wählen, d. h. jedes Vektorbündel ist <u>lokal orientierbar.</u>

Man sieht leicht, daß das triviale Bündel orientierbar ist. Man kann auch ohne größere Schwierigkeiten beweisen, daß das Möbiussche Geradenbündel nicht orientierbar ist, was die eigent-

liche Ursache seiner Nichttrivialität ist. Es gibt aber auch orientierbare Vektorbündel, die nicht trivial sind.

<u>Beispiel</u>. Das Tangentialbündel TS^2 der 2-dimensionalen Sphäre S^2 ist nicht trivial, aber orientierbar. Betrachten wir S^2 als die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Für $y \in S^2$ hat man also die Identifizierung

$$T_y S^2 = y^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle y, v\rangle = 0\}.$$

Wählt man eine Orientierung in $\mathbb{R}^3$, so kann man jedem $y \in S^2$ kanonisch eine Orientierung (Drehungssinn) der Ebene $y^\perp$ zuordnen. Somit ist TS^2 orientierbar.

Betrachten wir die Teilmenge $T_1 S^2$ des Totalraumes TS^2, die aus allen Einheitsvektoren besteht. Obwohl $T_1 S^2$ eigentlich eine 3-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von TS^2

ist, ist es einfacher T_1S^2 als eine Menge zu definieren:

$$T_1S^2 = \{(y,v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 : |v| = 1, \langle y,v\rangle = 0\}.$$

Somit wird T_1S^2 zu einer kompakten Teilmenge von $S^2 \times \mathbb{R}^3$ (genauer, von $S^2 \times S^2$), insbesondere zu einem kompakten topologischen Raum.

Im (orientierten) Raum $\mathbb{R}^3$ haben wir die <u>Vektormultiplikation</u>, die insbesondere jedem Paar $(y,v) \in T_1S^2$ den einzigen Vektor $z \in \mathbb{R}^3$ zuordnet, für den (y,v,z) eine orientierte (d.h. mit der Orientierung verträgliche) Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Deshalb ist T_1S^2 homöomorph mit dem Raum V_3 aller orientierten Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^3$ (Zuordnung: $T_1S^2 \ni (y,v) \mapsto (y,v,z) \in V_3$, mit z wie oben). Dabei wird V_3 als

eine kompakte Teilmenge von $S^2 \times S^2 \times S^2$ betrachten. Hier und im folgenden verwenden wir immer die Tatsache, daß eine stetige bijektive Abbildung zwischen kompakten topologischen Räumen ein Homöomorphismus sein muß.

Sei $SO(3)$ die Gruppe aller orientierungstreuen linearen Isometrien von $\mathbb{R}^3$. Betrachtet man $SO(3)$ als die Menge aller orthogonalen (3×3)-Matrizen mit Determinante 1, so wird sie zu einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^9$. Ist $(e_1, e_2, e_3) \in V_3$ eine feste Orthonormalbasis, so ist die Zuordnung

$$SO(3) \ni [A_i^{\,j}] \mapsto (A_1^{\,j}e_j, A_2^{\,j}e_j, A_3^{\,j}e_j) \in V_3$$

ein Homöomorphismus (stetig und bijektiv). Somit sind die Räume T_1S^2, V_3 und $SO(3)$ homöomorph.

Sei B^3 die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$. In B^3 definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$x \sim y$ wenn $x = y$ oder $x, y \in \partial B^3 = S^2$ und $x = -y$.

Man sieht leicht, daß der Quotientenraum $B^3/\sim$ ein kompakter Hausdorff-Raum ist.

Wir definieren die Abbildung

$$\rho : B^3 \to SO(3)$$

indem wir $x \in B^3$ die Drehung ρ_x mit der nach x orientierten Achse $\mathbb{R}x$ um den orientierten Winkel $\pi|x|$ zuordnen, also: $\rho_x(y) = \langle y, x\rangle x + \cos(\pi|x|)\cdot(y - \langle y, x\rangle x) + \sin(\pi|x|)(x \times y)$, wobei "$\times$" die Vektormultiplikation ist. Bildet man die Matrix $(\rho_x)_{ij} = \langle \rho_x e_i, e_j\rangle$ von ρ_x bezüglich einer festen Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3, so sieht man leicht, daß ρ stetig ist. Außerdem ist ρ surjektiv: jede orientierungstreue lineare Isometrie von $\mathbb{R}^3$ be-

steht aus der Drehung um eine Achse, wobei der geeignet orientierte Drehungswinkel in $[0, \pi]$ liegt. Man sieht auch leicht, daß für $x, y \in B^3$, $\rho_x = \rho_y$ genau dann, wenn $x \sim y$. Man hat also eine durch ρ bestimmte Bijektion $\bar{\rho} : B^3/\sim \to SO(3)$, die stetig sein muß (Definition der Quotiententopologie), also homöomorph (weil $B^3/\sim$ kompakt ist).

Sei $\mathbb{R}P^n$ die Menge aller durch 0 gehenden Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$. Da jede solche Gerade die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in genau 2 Punkten schneidet, haben wir eine kanonische Bijektion $\mathbb{R}P^n \approx S^n/\equiv$ wobei, für $x, y \in S^n$, $x \equiv y$ genau dann, wenn $x = \pm y$. Mit der Quotiententopologie wird $\mathbb{R}P^n = S^n/\equiv$ zu einem kompakten topologischen Raum, den man den n-dimensionalen reellen projektiven Raum nennt.

Man hat die stetige Abbildung

$F: B^3 \to S^3 \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$F(x^1,x^2,x^3) = \left(x^1,x^2,x^3,\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2}\right).$$

Ist $x \sim y$ in B^3, so $F(x) \equiv F(y)$ in S^3; somit bestimmt F eine stetige Abbildung $\bar{F}: B^3/_\sim \to S^3/_\equiv = \mathbb{R}P^3$, die, wie man leicht sieht, bijektiv ist. Deshalb sind die Räume T_1S^2, V_3, $SO(3)$, $B^3/_\sim$, $\mathbb{R}P^3$ untereinander homöomorph. Für uns wichtig ist die topologische Äquivalenz $T_1S^2 \approx$ $\approx \mathbb{R}P^3$.

Wir behaupten nun, daß es auf S^2 kein stetiges Vektorfeld X ohne Nullstellen gibt. Setzen wir also das Gegenteil voraus. Man darf $|X| = 1$ annehmen, indem man X durch $X/|X|$ ersetzt. X ist also eine stetige Abbildung $X: S^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $|X(y)| = 1$, $\langle y, X(y)\rangle = 0$ für alle $y \in S^2$.

Sei $Y(y) = y \times X(y)$ (Vektormultiplikation).

Also $Y: S^2 \to \mathbb{R}^3$ ist stetig und y, $X(y)$, $Y(y)$ sind orthonormal für alle $y \in S^2$.

Sei $S^1 = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2+\beta^2 = 1\}$.

Die Abbildung $S^1 \times S^2 \ni ((\alpha,\beta), y) \mapsto$ $\mapsto (y, \alpha X(y) + \beta Y(y)) \in T_1S^2$ müßte nun ein Homöomorphismus sein, weil sie stetig und bijektiv wäre. Es kann aber keinen Homöomorphismus zwischen $S^1 \times S^2$ und $\mathbb{R}P^3$ geben, weil $S^1 \times S^2$ eine unendliche Fundamentalgruppe hat (Aufgaben XIII.7, XIII.8), während die von $\mathbb{R}P^3$ aus zwei Elementen besteht (Aufgabe XIII.6). Dieser Widerspruch beweist, daß das Vektorfeld X nicht existiert.

Wir werden später sehen, daß ein stetiges Vektorfeld X ohne Nullstellen auf keiner gerade-dimensionalen Sphäre S^{2k} existieren kann. Dagegen gibt es solche Vektorfelder auf jeder ungerade-dimensionalen Sphäre S^{2k-1}: sie ist die Einheitssphäre im komplexen Raum $\mathbb{C}^k$, und man kann setzen $X(y) = iy$ (komplexe Multiplikation mit i) für $y \in S^{2k-1}$. In reellen Koordinaten: $X(y^1, y^2, \dots, y^{2k-1}, y^{2k}) = (-y^2, y^1, -y^4, y^3, \dots, -y^{2k}, y^{2k-1})$. Da $\langle X(y), y \rangle = 0$, ist X tatsächlich ein (C^∞-differenzierbares) Feld von Tangentialvektoren auf S^{2k-1}.

Die Sphären der Dimensionen S^{4k-1} ($k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$) lassen drei C^∞-Vektorfelder zu, die in jedem Punkt linear unabhängig sind. S^{4k-1} ist nämlich die Einheitssphäre im k-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{H}^k$ über dem (nicht kommutativen) Körper der Quaternionen $\mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ besitzt drei unabhängige "imaginäre Einheiten" i, j, k und die Felder $X_1, X_2, X_3 : S^{4k-1} \to \mathbb{H}^k$ können durch $X_1(y) = iy$, $X_2(y) = jy$, $X_3(y) = ky$ definiert werden (Quaternionen-Multiplika-

tion). Genauso* beweist man, daß die Sphären S^{7k-1} sieben C^∞-Vektorfelder besitzen, die in jedem Punkt linear unabhängig sind. Die Frage, wieviele überall unabhängige stetige Vektorfelder eine beliebige Sphäre S^n zulassen kann wurde erst 1962 von Adams vollständig beantwortet.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension n heißt <u>parallelisierbar</u>, wenn M C^∞-Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$ zuläßt, die in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes bilden, d.h. (vgl. S. 369), wenn das Tangentialbündel TM trivial ist.

<u>Beispiele</u>. (i) Die Mannigfaltigkeiten $\mathbb{R}^n$, S^1, S^3, S^7 sind parallelisierbar (S. 385-386)

(ii) Jeder Torus T^n ist parallelisierbar (man hat die globalen Basisfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$). Allgemeiner ist es leicht zu sehen daß das Produkt von parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten immer parallelisierbar sein muß.

(iii) S^2 ist nicht parallelisierbar.

*indem man die Cayleyschen Zahlen (Oktonionen) betrachtet.

DIFFERENTIALFORMEN

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, k eine natürliche Zahl. Wir haben das Vektorbündel $\Lambda^k M$ definiert (S. 366), dessen Faser $(\Lambda^k M)_y$ in jedem Punkt $y \in M$ aus allen schief-symmetrischen $(0,k)$-Tensoren (alternierenden k-Formen) in y besteht.

Für $\omega \in (\Lambda^k M)_y$ ist $\omega(\underset{1}{X}, \dots, \underset{k}{X}) = 0$ falls die Vektoren $\underset{1}{X}, \dots, \underset{k}{X} \in T_y M$ linear abhängig sind (weil dann einer dieser Vektoren eine Kombination der anderen ist). Deshalb ist $(\Lambda^k M)_y = \{0\}$ für $k > n = \dim M$. Ebenfalls setzen wir $(\Lambda^k M)_y = \{0\}$ für $k < 0$; somit ist das Bündel $\Lambda^k M$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert, obwohl seine Faser trivial (0-dimensional) ist für $k < 0$ oder $k > n$. Mit $\Omega^k M$ bezeichnen wir den Vektorraum aller C^∞-Schnitte von $\Lambda^k M$; also $\Omega^k M =$

$= \{0\}$ falls $k < 0$ oder $k > n = \dim M$, während, für $k = 0, \dots, n$, $\Omega^k M$ ist unendlich dimensional.

<u>Beispiele.</u> (i) $(\Lambda^0 M)_y = \mathbb{R}$ (die $(0,0)$-Tensoren werden kanonisch mit Zahlen identifiziert). Somit ist $\Omega^0 M$ identisch mit dem Raum aller C^∞-Funktionen auf M, weil $\Lambda^0 M = M \times \mathbb{R}$ das Produktbündel ist.

(ii) $(\Lambda^1 M)_y = T^*_y M$, der Raum aller kovarianten Vektoren in y; also $\Lambda^1 M = T^0_1 M$ und $\Omega^1 M$ ist der Raum aller kovarianten Vektorfelder der Klasse C^∞ auf M.

Sei nun $y \in M$, $\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{k}{\xi} \in (\Lambda^1 M)_y = T^*_y M$. Wir definieren <u>das</u> <u>äußere</u> <u>Produkt</u> $\overset{1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{k}{\xi} \in (\Lambda^k M)_y$ von $\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{k}{\xi}$ als die k-lineare schiefsymmetrische Abbildung mit

$$(\overset{1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{k}{\xi})(\underset{1}{X}, \dots, \underset{k}{X}) = \det_{1 \le p, q \le k} [\overset{p}{\xi}(\underset{q}{X})]$$

für $\underset{1}{X},\dots,\underset{k}{X} \in T_yM$. Wegen der bekannten Eigenschaften der Determinante ist die Zuordnung $(\overset{1}{\xi},\dots,\overset{k}{\xi}) \mapsto \overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi}$ ebenfalls k-linear und schiefsymmetrisch. Bezüglich eines Koordinatensystems (x^i) um y hat $\overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi}$ also die Komponenten

$$(\overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi})_{i_1\dots i_k} = \det_{1\le p,q\le k}[\overset{p}{\xi}_{i_q}],$$

z. B.

$$(\xi\wedge\eta)_{ij} = \begin{vmatrix}\xi_i & \xi_j\\ \eta_i & \eta_j\end{vmatrix} = \xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i \quad \text{und}$$

$$(\xi\wedge\eta\wedge\zeta)_{ijk} = \begin{vmatrix}\xi_i & \xi_j & \xi_k\\ \eta_i & \eta_j & \eta_k\\ \zeta_i & \zeta_j & \zeta_k\end{vmatrix} = \xi_i\eta_j\zeta_k+\eta_i\zeta_j\xi_k + \xi_j\eta_k\zeta_i - \xi_k\eta_j\zeta_i - \xi_j\eta_i\zeta_k - \xi_i\eta_k\zeta_j$$

für $\xi,\eta,\zeta\in(\Lambda^1M)_y$.

<u>Bemerkung</u>. Für $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{k}{\xi}\in(\Lambda^1M)_y$ ist $\overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi}=0$ genau dann, wenn $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{k}{\xi}$ linear abhängig sind. Sind sie nämlich abhängig, so ist eine der Formen $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{k}{\xi}$ eine Kombination der anderen, und

$\overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi}=0$, weil die äußere Multiplikation schief-symmetrisch ist. Sind $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{k}{\xi}$ dagegen unabhängig, so kann man sie zu einer Basis $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{n}{\xi}$ von $(\Lambda^1M)_y$ vervollständigen. Ist nun $\underset{1}{X},\dots,\underset{n}{X}$ die duale Basis von T_yM, so $(\overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi})(\underset{1}{X},\dots,\underset{k}{X})=\det[\delta_{pq}]=1$, woher $\overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi}\neq0$.

Für $y\in M$ und jede Basis $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{n}{\xi}$ von $(\Lambda^1M)_y$ bilden die k-Formen

$$\{\overset{i_1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{i_k}{\xi}\}_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}$$

eine Basis von $(\Lambda^kM)_y$. Es ist nämlich, für $\omega=\sum_{j_1<\dots<j_k}\omega_{j_1\dots j_k}\overset{j_1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{j_k}{\xi}$ und $i_1<\dots<i_k$,

$$\omega(\underset{i_1}{X},\dots,\underset{i_k}{X}) = \omega_{i_1\dots i_k}$$

wobei $\underset{1}{X},\dots,\underset{n}{X}$ die zu $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{n}{\xi}$ duale Basis von T_yM ist. Ist also $\omega=$

$= \sum_{j_1<\dots<j_k} \omega_{j_1\dots j_k} \overset{j_1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{j_k}{\xi} = 0$, so $0 = \omega(\underset{i_1}{X},\dots,\underset{i_k}{X}) = \omega_{i_1\dots i_k}$ für alle $i_1,\dots,i_k$ mit $i_1<\dots<i_k$. Somit sind unsere k-Formen linear unabhängig. Für $\omega\in(\Lambda^k M)_y$ ist außerdem $\omega = \sum_{j_1<\dots<j_k} \omega_{j_1\dots j_k} \overset{j_1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{j_k}{\xi}$ mit $\omega_{j_1\dots j_k} = \omega(\underset{j_1}{X},\dots,\underset{j_k}{X})$, weil die beiden Seiten die selben Werte auf $\underset{i_1}{X},\dots,\underset{i_k}{X}$ geben $(i_1<\dots<i_k)$ und schief-symmetrisch sind.

Wir haben also $\dim(\Lambda^k M)_y = \binom{n}{k}$, wobei $n=\dim M$; insbesondere $\dim(\Lambda^n M)_y = 1$.

Für $y\in M$ und beliebige $k,l\geqslant 0$ gibt es genau eine bilineare Abbildung $(\Lambda^k M)_y \times (\Lambda^l M)_y \ni (\omega,\eta) \mapsto \omega\wedge\eta \in (\Lambda^{k+l}M)_y$ (die wir ebenfalls mit $\wedge$ bezeichnen und die äußere Multiplikation nennen) mit der Eigenschaft, daß

$\omega\wedge\eta = \overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi}\wedge\overset{k+1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k+l}{\xi}$

falls $k,l\geqslant 1$, $\omega = \overset{1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k}{\xi}$, $\eta = \overset{k+1}{\xi}\wedge\dots\wedge\overset{k+l}{\xi}$ $(\overset{i}{\xi}\in(\Lambda^1 M)_y)$, oder

$\omega\wedge\eta = \omega\cdot\eta$ (bzw. $\omega\wedge\eta = \eta\cdot\omega$)

falls $\omega\in(\Lambda^0 M)_y = \mathbb{R}$ (bzw. $\eta\in(\Lambda^0 M)_y$).

Es kann nämlich höchstens eine solche Abbildung geben, weil sie auf äußeren Produkten von 1-Formen eindeutig bestimmt ist, aus deren man Basen in $(\Lambda^k M)_y$ und $(\Lambda^l M)_y$ bilden kann. Ist nun $\overset{1}{\zeta},\dots,\overset{n}{\zeta}$ eine feste Basis von $(\Lambda^1 M)_y$ und setzen wir* $\omega\wedge\eta = \sum_{\substack{i_1<\dots<i_k\\ j_1<\dots<j_l}} \omega_{i_1\dots i_k}\eta_{j_1\dots j_l} \overset{i_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{i_k}{\zeta}\wedge\overset{j_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{j_l}{\zeta}$, so ist $\wedge$ bilinear und $(\overset{i_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{i_k}{\zeta})\wedge(\overset{j_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{j_l}{\zeta}) = \overset{i_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{i_k}{\zeta}\wedge\overset{j_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{j_l}{\zeta}$ für beliebige (nicht unbedingt wachsende) Folgen $i_1,\dots,i_k$, $j_1,\dots,j_l$, woher $\wedge$ die zu erwartenden Eigenschaften haben muß.

* falls $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k} \overset{i_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{i_k}{\zeta}$, $\eta = \sum_{j_1<\dots<j_l} \eta_{j_1\dots j_l} \overset{j_1}{\zeta}\wedge\dots\wedge\overset{j_l}{\zeta}$

Die äußere Multiplikation von Formen beliebiger Grade ist assoziativ (weil dies für die Faktoren gilt, die äußere Produkte von 1-Formen sind). Außerdem ist

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

für $\omega \in (\Lambda^k M)_y$, $\eta \in (\Lambda^l M)_y$, was man leicht sieht, indem man für ω und η äußere Produkte von 1-Formen einsetzt.

Für $\omega \in (\Lambda^k M)_y$, $\eta \in (\Lambda^l M)_y$ und $\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k+l}{X} \in T_y M$ ist

$$(\omega \wedge \eta)(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k+l}{X}) =$$

$$= \sum \varepsilon(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l)\, \omega(\underset{p_1}{X}, \ldots, \underset{p_k}{X})\, \eta(\underset{q_1}{X}, \ldots, \underset{q_l}{X}),$$

wobei über alle Folgen $p_1 < \ldots < p_k$, $q_1 < \ldots < q_l$ summiert wird, die eine Permutation $\{p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l\}$ von $\{1, \ldots, k+l\}$ bilden, und $\varepsilon(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l)$ ist das Vorzeichen dieser Permutation. Die letzte Summe ist nämlich gleich dem Ausdruck

$$\frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\, \omega(\underset{\sigma(1)}{X}, \ldots, \underset{\sigma(k)}{X})\, \eta(\underset{\sigma(k+1)}{X}, \ldots, \underset{\sigma(k+l)}{X})$$

($\mathfrak{S}_{k+l}$ ist die Gruppe aller Permutationen von $\{1, \ldots, k+l\}$), weil jedes $\varepsilon(\sigma)\omega(\underset{\sigma(1)}{X}, \ldots, \underset{\sigma(k)}{X})\eta(\underset{\sigma(k+1)}{X}, \ldots, \underset{\sigma(k+l)}{X})$ in der obigen Summe genau $k!\,l!$ Mal auftritt. Somit ist die Rechte Seite unserer Formel eine alternierende $(k+l)$-Form, die bilinear von ω und η abhängt, und deshalb genügt es unsere Formel in dem Fall zu beweisen, wo $\omega = \overset{1}{\xi} \wedge \ldots \wedge \overset{k}{\xi}$, $\eta = \overset{k+1}{\xi} \wedge \ldots \wedge \overset{k+l}{\xi}$ mit 1-Formen $\overset{i}{\xi}$. Dann aber ist die Rechte Seite

$$\sum \varepsilon(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l) \det_{1 \le i,j \le k} [\overset{i}{\xi}(\underset{p_j}{X})] \cdot \det_{1 \le s,t \le l} [\overset{k+s}{\xi}(\underset{q_t}{X})]$$

nichts anderes als die Laplacesche Formel für die Determinante $\det\limits_{1 \le a,b \le k+l} [\overset{a}{\xi}(\underset{b}{X})] =$

$= (\overset{1}{\xi} \wedge \ldots \wedge \overset{k+l}{\xi})(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k+l}{X})$, womit auch unsere Formel bewiesen ist. Daraus erhalten wir insbesondere eine Formel für die lokalen Komponenten $(\omega\wedge\eta)_{i_1\dots i_{k+l}} = (\omega\wedge\eta)(\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_{k+l}})$ von $\omega\wedge\eta$ bezüglich eines Koordinatensystems (x^i) um y. So ist, z. B.,

$$(\omega\wedge\eta)_{ij} = \omega_i\eta_j - \omega_j\eta_i \quad \text{für } \omega,\eta\in(\Lambda^1 M)_y,$$

$$(\omega\wedge\eta)_{ijk} = \omega_i\eta_{jk} + \omega_j\eta_{ki} + \omega_k\eta_{ij}$$
$$\text{für } \omega\in(\Lambda^1 M)_y,\ \eta\in(\Lambda^2 M)_y,$$

$$(\omega\wedge\eta)_{ijkl} = \omega_{ij}\eta_{kl} + \omega_{ik}\eta_{lj} + \omega_{il}\eta_{jk} + \omega_{kl}\eta_{ij} + \omega_{lj}\eta_{ik} + \omega_{jk}\eta_{il}$$
$$\text{für } \omega,\eta\in(\Lambda^2 M)_y, \text{ usw.}$$

Seien nun M, N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $y\in M$, $z\in N$, und sei $A: T_yM \to T_zN$ eine lineare Abbildung (wir werden uns vor allem für den Fall interessieren, wo $A = dF_y$

das Differential in y einer C^∞ Abbildung $F: M\to N$ mit $F(y) = z$ ist). Dann haben wir die lineare Abbildung ($k\geq 0$ beliebig)

$$A^*: (\Lambda^k N)_z \to (\Lambda^k M)_y \quad \text{mit}$$

$$(A^*\omega)(\underset{1}{X},\dots,\underset{k}{X}) = \omega(A\underset{1}{X},\dots,A\underset{k}{X})$$

für $\underset{1}{X},\dots,\underset{k}{X}\in T_yM$. Wegen der Formel für $\omega\wedge\eta$ auf S. 391 ist

$$A^*(\omega\wedge\eta) = A^*\omega \wedge A^*\eta$$

für $\omega\in(\Lambda^k N)_z$, $\eta\in(\Lambda^l N)_z$, $k,l\geq 0$ beliebig, und $A^*: (\Lambda^0 N)_z = \mathbb{R} \to (\Lambda^0 M)_y = \mathbb{R}$ ist die Identitätsabbildung.

Unter einer <u>reellen graduierten Algebra</u> verstehen wir eine associative Algebra A über $\mathbb{R}$ mit einer festen Zerlegung (als Vektorraum) in eine direkte Summe von Unterräumen A_k ($k\in\mathbb{Z}$):

$$A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$$

mit der Eigenschaft, daß $\omega \cdot \eta \in A_{k+l}$ für $\omega \in A_k$, $\eta \in A_l$ (Multiplikation in A). Die graduierte Algebra A heißt <u>graduiert-kommutativ</u> falls $\omega \cdot \eta = (-1)^{kl} \eta \cdot \omega$ für $\omega \in A_k$, $\eta \in A_l$.

Unter einem <u>graduierten</u> Homomorphismus $T: A \to A'$ von graduierten Algebren $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$, $A' = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A'_k$ verstehen wir einen Algebra-Homomorphismus T mit $T(A_k) \subset A'_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Beispiele</u>. (i) Die Algebra A aller Polynome einer reellen Veränderlichen x ist eine graduierte Algebra: $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$, $A_k = \{0\}$ für $k<0$ und $A_k = \mathbb{R}\cdot x^k$ für $k \geq 0$. Diese Algebra ist kommutativ (nicht graduiert-kommutativ).

(ii) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $y \in M$. Die direkte Summe

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\Lambda^k M)_y = (\Lambda^0 M)_y \oplus \ldots \oplus (\Lambda^n M)_y = (\Lambda^* M)_y$$

($n = \dim M$) wird zu einer graduiert-kommutativen graduierten Algebra, wenn man die äußere Multiplikation in der eindeutig möglichen Weise auf $(\Lambda^* M)_y$ fortsetzt. Für eine andere Mannigfaltigkeit N, $z \in N$ und eine lineare Abbildung $A: T_y M \to T_z N$ wird $A^*: (\Lambda^* N)_z \to (\Lambda^* M)_y$ zu einem graduierten Homomorphismus.

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Mit $\Omega^k M$ haben wir den Raum aller C^∞-Schnitte von $\Lambda^k M$ bezeichnet (wobei $\Omega^k M = \{0\}$ falls $k<0$ oder $k > n = \dim M$). Für $\omega \in \Omega^k M$, $\eta \in \Omega^l M$ ist $\omega \wedge \eta$ in jedem Punkt y durch $(\omega \wedge \eta)_y =$

$= \omega_y \wedge \eta_y$ definiert. Wegen der Formeln für die Komponenten von $\omega_y \wedge \eta_y$ (S. 391, 393) ist $\omega \wedge \eta$ auch C^∞-differenzierbar. Somit wird $\Omega^* M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k M$ zu einer graduiert-kommutativen graduierten Algebra.

Für eine C^∞-Abbildung $F : M \to N$ zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten M, N definieren wir

$$F^* : \Omega^* N \to \Omega^* M$$

durch

$$(F^*\omega)_y = (dF_y)^* \omega_{F(y)}, \quad \omega \in \Omega^k N, \; y \in M$$

(vgl. S. 393-394). Um zu beweisen, daß $F^*\omega$ tatsächlich C^∞-differenzierbar ist, nehmen wir lokale Koordinaten x^i (bzw. x^α) in M um y_0 (bzw. in N um $F(y_0)$) und setzen wir, nahe y_0, $F^\alpha =$

$= x^\alpha \circ F$, so daß die F^α C^∞-Funktionen sind. Für y dicht genug bei y_0,

$$(dF_y)(\partial_i(y)) = \partial_i F^\alpha(y) \cdot \partial_\alpha(F(y))$$

(Darstellung von ∂_i, ∂_α durch Koordinatenlinien), woher, für $\omega \in \Omega^k N$,

$$(F^*\omega)_{i_1 \dots i_k}(y) = \partial_{i_1} F^{\alpha_1}(y) \cdots \partial_{i_k} F^{\alpha_k}(y)\, \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(F(y)),$$

d. h., $(F^*\omega)_{i_1 \dots i_k} = \partial_{i_1} F^{\alpha_1} \cdots \partial_{i_k} F^{\alpha_k} (\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ F)$ muß ebenfalls C^∞-differenzierbar sein.

Nach Beispiel (ii), S. 396, ist $F^* : \Omega^* N \to \Omega^* M$ ein graduierter Homomorphismus von graduierten Algebren; dabei, für C^∞-Funktionen $f \in \Omega^0 N$,

$$F^* f = f \circ F.$$

Ist P eine dritte Mannigfaltigkeit und $G : N \to P$ eine C^∞-Abbildung, so

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : \Omega^* P \to \Omega^* M.$$

Ebenso $(Id_M)^* = Id_{\Omega^* M} : \Omega^* M \to \Omega^* M$.

SATZ 23. Für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M gibt es genau eine lineare Abbildung $d : \Omega^* M \to \Omega^* M$ mit den folgenden vier Eigenschaften:

(i) $d(\Omega^k M) \subset \Omega^{k+1} M$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $d \circ d = 0$.

(iii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ für $\omega \in \Omega^k M$, $\eta \in \Omega^l M$.

(iv) Für C^∞-Funktionen $\omega \in \Omega^0 M$ stimmt $d\omega$ mit dem Differential von ω überein (das wir ebenfalls mit $d\omega$ bezeichnet haben).

Die Operation d nennt man <u>die äußere Ableitung</u>. Außerdem gilt:

(a) In jedem lokalen Koordinatensystem (x^i) hat jedes $\omega \in \Omega^k M$ die Darstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

und dann

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \partial_i \omega_{i_1 \dots i_k} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(wobei $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$).

(b) Für $\omega \in \Omega^k M$ und lokale Koordinaten (x^i) hat $d\omega$ die Komponenten

$$(d\omega)_{i_0 \dots i_k} = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \partial_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i_q} \dots i_k}$$

("$\hat{\ }$" über i_q bedeutet, daß i_q wegzulassen ist). Ist ∇ ein beliebiger symmetrischer Zusammenhang auf M, so

$$(d\omega)_{i_0 \dots i_k} = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \nabla_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i_q} \dots i_k}.$$

Für $\omega \in \Omega^k M$ und C^∞-Vektorfelder $\underset{0}{X}, \dots, \underset{k}{X}$ auf M ist

$$d\omega(\underset{0}{X}, \dots, \underset{k}{X}) = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \underset{q}{X} \left(\omega(\underset{0}{X}, \dots, \hat{\underset{q}{X}}, \dots, \underset{k}{X})\right) -$$

$$- \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\, \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k).$$

(v) Ist $F: M \to N$ eine C^∞-Abbildung zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten M, N, so sind die Operatoren F^* und d vertauschbar: $F^* \circ d = d \circ F^* : \Omega^* N \to \Omega^* M$.

<u>Beweis</u>. 1. <u>Eindeutigkeit</u> von d. Eine Operation d mit (i) – (iv) muß <u>lokal</u> sein: ist $U \subset M$ offen und $\omega \in \Omega^k M$ mit $\omega = 0$ auf U, so $d\omega = 0$ auf U. Wählen wir nämlich, für $y \in U$, eine C^∞-Funktion $\eta \in \Omega^0 M$ mit $\eta = 0$ nahe y und $\eta = 1$ auf einer Umgebung von $M \setminus U$, so $\omega = \omega \wedge \eta = \eta\omega$ und, nach (iii), $0 = d(\omega \wedge \eta)_y = (d\omega)_y$. Somit definiert d, für jede offene Untermannigfaltigkeit $U \subset M$, eine lineare Operation $d : \Omega^* U \to \Omega^* U$

mit den gleichen Eigenschaften (i) – (iv): Für $\omega \in \Omega^k U$ und $y \in U$ wählen wir Umgebungen U', U'' mit $y \in U' \subset U'' \subset \overline{U''} \subset U$ und mit einer C^∞-Funktion $\varphi \in C^\infty(M)$, für die $\varphi = 1$ auf U' und $\varphi = 0$ auf $M \setminus U''$. Damit ist $\tilde{\omega} = \varphi\omega$ auf ganz M C^∞ differenzierbar und $\tilde{\omega} = \omega$ auf U'. Setzen wir in U' $d\omega = d\tilde{\omega}$, so hängt dies wegen der Lokalität von d nicht von der Fortsetzung $\tilde{\omega}$, was unser $d : \Omega^* U \to \Omega^* U$ vollständig definiert.

Sei nun $(U, (x^i))$ ein Koordinatensystem in M. Für $\omega \in \Omega^k M$ gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(vgl. S. 389), weil die Basis ∂_i in jedem Tangentialraum zu dx^i dual ist. Wegen (ii), (iii) (Induktion), müssen wir nun haben

$$d\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} d\omega_{i_1\dots i_k} \wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

in U, was bedeutet, daß die Operation d durch (i) - (iv) eindeutig bestimmt ist.

2. Existenz und Eigenschaften von d.

In jedem lokalen Koordinatensystem $(U,(x^i))$ definieren wir $d: \Omega^* U \to \Omega^* U$ durch $d\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} d\omega_{i_1\dots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, falls $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$.

Daraus folgt, daß $d\omega = df_{i_1\dots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ falls $\omega = f_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, wobei die Funktionen $f_{i_1\dots i_k}$ gar nicht schiefsymmetrisch in $i_1,\dots,i_k$ zu sein brauchen, also auch $d\omega = \partial_i f_{i_1\dots i_k} dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, weil $df = \partial_i f\cdot dx^i$, für $f\in\Omega^0 U$.

Dieses d erfüllt offenbar (i) und (iv).

Für $\omega = f_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ ($f_{i_1\dots i_k}$ nicht unbedingt schief-symmetrisch) ist

$d\omega = \partial_i f_{i_1\dots i_k} dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$

und $dd\omega = \partial_j\partial_i f_{i_1\dots i_k} dx^j\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$.

Da hier über i,j summiert wird, wobei $\partial_j\partial_i$ symmetrisch und $dx^j\wedge dx^i$ schief-symmetrisch von i,j abhängen, ist $dd\omega = 0$, was (ii) beweist.

Für $\omega = f_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, $\eta = h_{j_1\dots j_l} dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}$ ist $\omega\wedge\eta =$

$= f_{i_1\dots i_k} h_{j_1\dots j_l} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}$,

also $d(\omega\wedge\eta) = (\partial_i f_{i_1\dots i_k}) h_{j_1\dots j_l} dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l} +$

$+ f_{i_1\dots i_k}\partial_i h_{j_1\dots j_l} dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}$

$= d\omega\wedge\eta + (-1)^k f_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\partial_i h_{j_1\dots j_l} dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l} = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta$.

Somit erfüllt $d : \Omega^* U \to \Omega^* U$ (i)–(iv).
Ist $(U', (x^{i'}))$ ein anderes Koordinatensystem, das genauso einen Operator d' bestimmen muß, so kann man d und d' wie auf S. 401–402 auf $U \cap U'$ "lokalisieren". Wegen der Eindeutigkeit stimmen diese Lokalisierungen überein, d. h. $d\omega = d'\omega$ für $\omega \in \Omega^*(U \cap U')$, so daß unsere Definition von d *koordinaten-unabhängig* ist. Dies beweist die Existenz von d und (a).

In lokalen Koordinaten (x^i) ist, für $\omega \in \Omega^k M$, $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$= \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, woher

$$d\omega = \frac{1}{k!} \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Der Ausdruck $\sum_{q=0}^{k} (-1)^q \partial_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_q \dots i_k}$ ist schief-symmetrisch in $i_0, \dots, i_k$ (was man

leicht sieht, indem man zwei *benachbarte* Indizes vertauscht). Da $dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ebenso schief-symmetrisch von $i_0, \dots, i_k$ abhängt, ist $\left(\sum_{q=0}^{k} (-1)^q \partial_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_q \dots i_k} \right) dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$

$= (k+1)\, \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, also

$$d\omega = \frac{1}{(k+1)!} \left[\sum_{q=0}^{k} (-1)^q \partial_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_0 \dots i_q} \right] dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Nach (a) ist auch $d\omega = \frac{1}{(k+1)!} (d\omega)_{i_0 \dots i_k} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ was, wegen der genannten Schief-symmetrie, $(d\omega)_{i_0 \dots i_k} = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \partial_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i}_q \dots i_k}$ ergibt.

Die Formel für $(d\omega)(\underset{0}{X}, \dots, \underset{k}{X})$ mit beliebigen C^∞-Vektorfeldern $\underset{0}{X}, \dots, \underset{k}{X}$ folgt nun leicht, wenn man in lokalen Koordinaten $\underset{s}{X} = \underset{s}{X}{}^i \partial_i$ setzt und bedenkt, daß $[\underset{s}{X}, \underset{t}{X}]^i = \underset{s}{X}{}^j \partial_j \underset{t}{X}{}^i - \underset{t}{X}{}^j \partial_j \underset{s}{X}{}^i$.

Ist nun ∇ ein symmetrischer Zusammenhang auf M, so gibt es um jedes

$y \in M$ die Normalkoordinaten (x^i), für die $x^i(y) = 0$ und die Kurven $t \mapsto \gamma(t)$ mit $x^i(\gamma(t)) = t\underset{0}{x}^i$, $\underset{0}{x}^i$ konstant, Geodätische sind (der Koordinatendiffeomorphismus ist hier das lokale Inverse der Exponentialabbildung).

Die geodätische Gleichung gibt $0 = \Gamma^k_{ij}(t\underset{0}{x}^1, \dots, t\underset{0}{x}^n)\underset{0}{x}^i\underset{0}{x}^j$ für alle feste $\underset{0}{x}^i$ und jedes kleine t (dabei werden Γ^k_{ij} als Funktionen im euklidischen Raum betrachtet), woher $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$, d. h., genauer, $\Gamma^k_{ij}(y) = 0$. In diesen Koordinaten stimmen also, im Punkt y, die kovarianten Ableitungen mit den partiellen überein. Daher

$$(d\omega)_{i_0 \dots i_k} = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \nabla_{i_q} \omega_{i_0 \dots \hat{i_q} \dots i_k}$$

weil die beiden Seiten Tensorfelder definieren und in jedem Punkt y gibt

es Koordinaten, wo ihre Komponenten übereinstimmen. Dies beweist (b).

Sei nun $F: M \to N$ eine C^∞-Abbildung. Für Funktionen $f \in \Omega^0 N$ ist $F^*f = f \circ F$, also, für $X \in T_yM$ und eine C^1-Kurve γ mit $\gamma(0) = y$, $\dot\gamma(0) = X$,

$$d(F^*f)(X) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (F^*f)(\gamma_t) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(F(\gamma_t)) = df_{F(y)}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_0 F(\gamma_t)\Big) = df_{F(y)}(dF_y X) = (F^*df)_y(X),$$ weshalb

$F^*df = d(F^*f)$. Nun hat jede k-Form ω in N lokal die Gestalt $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ mit <u>Funktionen</u> $\omega_{i_1 \dots i_k}, x^{i_1}, \dots, x^{i_k}$, woher (da F^* multiplikativ ist, vgl. S. 398)

$$F^*d\omega = \sum F^*(d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge F^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge F^*(dx^{i_k}) = \sum d(F^*\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge d(F^*x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(F^*x^{i_k}) =$$

$= d\left(\sum F^*\omega_{i_1\ldots i_k}\, dF^*x^{i_1}\wedge\ldots\wedge dF^*x^{i_k}\right) =$

$= d\left(F^*\sum \omega_{i_1\ldots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\right) =$

$= dF^*\omega$, womit (c) und der ganze Satz bewiesen ist. q.e.d.

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine k-Form $\omega \in \Omega^k M$ heißt <u>geschlossen</u> (bzw. <u>exakt</u>), wenn sie im Kern von $d: \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$ (bzw. im Bild von $d: \Omega^{k-1} M \to \Omega^k M$) liegt. $\Omega^k M$ enthält also den Unterraum

$$Z^k M = \{\omega \in \Omega^k M : d\omega = 0\}$$

der geschlossenen k-Formen, sowie den Raum

$$B^k M = \{\omega \in \Omega^k M : \text{es gibt } \eta \in \Omega^{k-1} M \text{ mit } d\eta = \omega\}$$

der exakten k-Formen. Da wir $\Omega^k M = \{0\}$ für $k < 0$ oder $k > n = \dim M$ ge-

setzt haben, ist auch $Z^k M = B^k M = \{0\}$ für $k < 0$ oder $k > n$, sowie $Z^n M = \Omega^n M$ $(n = \dim M)$ und $B^0 M = \{0\}$. Nach (ii) von Satz 23 ist jede exakte Form geschlossen, d. h. $B^k M \subset Z^k M$. Für $k = 0$ besteht $Z^0 M = \mathbb{R}$ genau aus konstanten Funktionen, also $B^0 M = \{0\} \neq Z^0 M$. Dagegen kann der Unterraum $B^k M$ von $Z^k M$ für $k > 0$ unterschiedlich aussehen.

LEMMA von Poincaré. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die sternförmig bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ ist (also, mit jedem x die geradlinige Strecke tx, $0 \le t \le 1$, enthält). Für $k \geq 0$ ist jede geschlossene $(k+1)$-Form ω auf U exakt.

Beweis. Sei, für $x \in U$

$$\eta(x) = \frac{1}{k!}\left(x^{i_0}\int_0^1 \omega_{i_0 i_1 \dots i_k}(tx)t^k dt\right) dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}.$$

Also, $\eta \in \Omega^k U$ und

$$k!\, d\eta(x) = \left(\int_0^1 \omega_{i_0 \dots i_k}(tx)t^k dt\right) dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} +$$

$$+\left(\int_0^1 x^i \partial_{i_0}\omega_{i i_1\dots i_k}(tx)t^{k+1}dt\right) dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

(wir haben die Koeffizientenfunktion in der Formel für η differenziert und im zweiten Teil die Namen der Summierungsindizes i, i_0 vertauscht).

Da $d\omega = 0$, haben wir

$$\partial_i \omega_{i_0\dots i_k} = \partial_{i_0}\omega_{i i_1\dots i_k} - \partial_{i_1}\omega_{i i_0 i_2\dots i_k} + - \dots + (-1)^k \partial_{i_k}\omega_{i i_0 \dots i_{k-1}}$$

woher

$$\partial_i \omega_{i_0\dots i_k}(tx)\, dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} =$$

$$= (k+1)\,\partial_{i_0}\omega_{i i_1\dots i_k}(tx)\, dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

(die benachbarten Terme in der obigen Summe, wenn mit $dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ summiert, werden gleich).

Also,

$$k!\, d\eta(x) = \left[\int_0^1 \omega_{i_0\dots i_k}(tx)t^k dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k+1}\int_0^1 x^i \partial_i \omega_{i_0\dots i_k}(tx)t^{k+1}dt\right] dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{1}{k+1}\frac{d}{dt}\left[\omega_{i_0\dots i_k}(tx)t^{k+1}\right]dt\right) dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\omega_{i_0\dots i_k}(x)\, dx^{i_0}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} =$$

$$= k!\,\omega(x)$$

(Integration der Ableitung!), d.h. $d\eta = \omega$, womit das Lemma bewiesen ist.

q.e.d.

Wegen des Poincaréschen Lemmas sind die geschlossenen k-Formen $(k>0)$ lokal exakt (aber nicht immer global).

Beispiel. Die Projektion

$$R \ni t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t \in S^1$$

ist eine lokal diffeomorphe Abbildung von R auf den Kreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Die Koordinatenfunktion t auf R kann man nicht als Funktion auf S^1 betrachten; die lokal auf S^1 definierten "Zweige" von t unterscheiden sich voneinander durch additive Konstanten. Somit ist die 1-Form dt auf S^1 definiert (und geschlossen, sowie jede n-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit es ist). Da $dt \neq 0$ überall in S^1, hat jede 1-Form ω auf S^1

die Gestalt $\omega = f\,dt$ mit einer Funktion f, was einen Isomorphismus

$$\Omega^1 S^1 = Z^1 S^1 \ni \omega \leftrightarrow f \in C^\infty(S^1)$$

definiert. Für eine 0-Form $\eta \in \Omega^0 S^1$ haben wir, im lokalen Koordinatensystem $(t) = (x^i)$

$$d\eta = \partial_i \eta \cdot dx^i = \eta'(t)\,dt$$

Also entspricht $f \in C^\infty(S^1) \approx \Omega^1 S^1$ einer exakten Form genau dann wenn f, als 2π-periodische Funktion auf R mittels unserer Projektion betrachtet, eine Stammfunktion besitzt, die ebenfalls 2π-periodisch ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist $\int_0^{2\pi} f = 0$; also ist $B^1 S^1 \subset Z^1 S^1$ der Kern eines nicht trivialen linearen Funktionals (des Integrationsoperators), woher B^1S^1 ein Unterraum der Kodimension 1 in Z^1S^1 ist. Die 1-Form dt in S^1 ist z. B. geschlossen, aber nicht exakt.

Die Größe der Quotientenräume

$$Z^kM / B^kM$$

ist ein wichtiges Maß der topologischen Eigenschaften der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Man setzt

$$Z^kM / B^kM = H^k(M, \mathbb{R})$$

und nennt $H^k(M, \mathbb{R})$ (kürzere Bezeichnung: H^kM) den k-ten <u>de Rhamschen</u> <u>Kohomologieraum</u> von M. Nach dem Poincaréschen Lemma ist $H^0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ und $H^k\mathbb{R}^n = 0$ für $k \neq 0$.

Für $\omega \in Z^kM$, $\eta \in Z^lM$ ist $\omega \wedge \eta \in Z^{k+l}M$, weil $d(\omega \wedge \eta) = 0$ nach (iii) von Satz 23. Ist dagegen $\omega \in Z^kM$ und $\eta \in B^lM$, so $\omega \wedge \eta \in B^{k+l}M$: aus $d\omega = 0$ und $\eta = d\theta$ folgt $\omega \wedge \eta = (-1)^k d(\omega \wedge \theta)$. Bezeichnet man mit $[\omega] \in H^kM$ die Restklasse von $\omega \in Z^kM$, so kann man nun eine bilineare Multiplikation $\cup : H^kM \times H^lM \to H^{k+l}M$ definieren mit

$$[\omega] \cup [\eta] = [\omega \wedge \eta]$$

Die Restklasse des Produkts $\omega \wedge \eta$ hängt nämlich nur von $[\omega]$, $[\eta]$ ab: ist $[\omega] = [\omega']$, $[\eta] = [\eta']$, so $\omega' = \omega + d\zeta$, $\eta' = \eta + d\theta$ und

$$\omega' \wedge \eta' = \omega \wedge \eta +$$
$$+ d[\zeta \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \theta + \zeta \wedge d\theta]$$

(falls $\omega \in Z^k M$). Somit wird die direkte Summe

$$H^*M = H^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M, \mathbb{R})$$

zu einer graduiert-kommutativen, (assoziativen) graduierten Algebra, die man die <u>Kohomologie-Algebra</u> von M nennt. Wir haben natürlich $H^k M = 0$ für $k < 0$ oder $k > n = \dim M$, sowie $H^0 M \approx \mathbb{R}$, weil $Z^0 M = \mathbb{R}$ (konstante Funktionen) und $B^0 M = \{0\}$. Wie wir auf S. 414–415 festgestellt haben, ist $H^1 S^1 \approx \mathbb{R}$, was die Kohomologie-Algebra $H^* S^1$ von S^1 völlig

bestimmt (in $H^0 S^1 = \mathbb{R}$ sowie zwischen $H^0 S^1$ und $H^1 S^1 = \mathbb{R}$ haben wir die Standardmultiplikation, während die Multiplikation in $H^1 S^1$ trivial ist).

Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $F: M \to N$ eine C^∞-Abbildung. Da der graduierte Homomorphismus $F^*: \Omega^* N \to \Omega^* M$ mit d vertauschbar ist ((c) von Satz 23), ist, für jedes k, $F^*(B^k N) \subset B^k M$ und $F^*(Z^k N) \subset Z^k M$. Somit bestimmt F^* einen (ebenfalls mit F^* bezeichneten) graduierten Homomorphismus $F^*: H^* N \to H^* M$ der Kohomologie-Algebren, wobei

$$F^*[\omega] = [F^* \omega]$$

für $\omega \in Z^k N$. Auf $H^0 N = H^0 M = \mathbb{R}$

operiert F^* als Identitätsabbildung. Für C^∞-Abbildungen $F: M \to N$, $G: N \to P$ haben wir $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*: H^*P \to H^*M$, während $(Id_M)^* = Id_{H^*M}: H^*M \to H^*M$. Somit definieren die Zuordnungen $M \mapsto H^*M$, $F \mapsto F^*$ einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und C^∞-Abbildungen in die Kategorie der graduiert-kommutativen graduierten Algebren und der graduierten Homomorphismen.

Seien M, N topologische Räume, $F_0, F_1: M \to N$ stetige Abbildungen. Wir sagen, daß F_0 und F_1 homotop sind (Bezeichnung: $F_0 \sim F_1$) falls es eine Homotopie zwischen F_0 und F_1 gibt, d. h. eine stetige Abbildung

$$h: [0,1] \times M \to N$$

mit $F_0 = h_0$, $F_1 = h_1$, falls wir für $t \in [0,1]$ mit $h_t: M \to N$ die Abbildung $y \mapsto h(t,y)$ bezeichnen (die Homotopie h ist also eine Art stetige Kurve $[0,1] \ni t \mapsto h_t$ von stetigen Abbildungen $M \to N$, die F_0 mit F_1 verbindet). In der Menge aller stetigen Abbildungen $M \to N$ ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation: aus $F_0 \sim F_1$ (Homotopie $t \mapsto h_t$) und $F_1 \sim F_2$ (Homotopie $\tilde{h}_t$) folgt, daß $F_1 \sim F_0$ (Homotopie $t \mapsto h_{1-t}$) und $F_0 \sim F_2$ (Homotopie $t \mapsto h_{2t}$ für $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $t \mapsto \tilde{h}_{2t-1}$ für $t \in [\frac{1}{2}, 1]$), während $F_0 \sim F_0$ (Homotopie $t \mapsto F_0$). Außerdem, für topologische Räume M, N, P und stetige Abbildungen $F_0, F_1 : M \to N$, $G_0, G_1 : N \to P$ mit $F_0 \sim F_1$ und $G_0 \sim G_1$, gilt auch $G_0 \circ F_0 \sim G_1 \circ F_1$ (Homotopie $t \mapsto h'_t \circ h_t$, wobei h bzw. h' eine Homotopie zwischen F_0 und F_1, bzw. zwischen G_0 und G_1 ist).

Sind M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $F_0, F_1 : M \to N$ C^∞-Abbildungen, so nennt man F_0, F_1 C^∞-*homotop* (Bezeichnung: $F_0 \underset{C^\infty}{\sim} F_1$), wenn es eine Homotopie $h : [0,1] \times M \to N$ zwischen F_0 und F_1 gibt, die eine C^∞-Abbildung ist (wobei man $[0,1] \times M$ in natürlicher Weise als differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand betrachtet).

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. In der Produktmannigfaltigkeit

$[0,1] \times M$ (mit Rand) kann jeder Tangentialraum $T_{(t,y)}([0,1] \times M)$ bekanntlich mit der direkten Summe $T_t([0,1]) \oplus T_y M$ identifiziert werden. Eine k-Form $\zeta \in (\Lambda^k([0,1] \times M))_{(t,y)}$ heißt M-*tangential*, wenn $\zeta(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls einer der Vektoren $X_1, \dots, X_k$ im Unterraum $T_t([0,1]) \oplus \{0\}$ des Tangentialraumes liegt.

Betrachtet man in M ein Koordinatensystem $x^1, \dots, x^n$ ($n = \dim M$) und bezeichnet mit t die Projektionsfunktion $[0,1] \times M \to [0,1]$, so ist $x^0 = t, x^1, \dots, x^n$ ein Koordinatensystem in $[0,1] \times M$ (sog. Produktkoordinaten). Schreibt man eine k-Form ζ in solchen Koordinaten als $\zeta = \sum_{0 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \zeta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

so ist ζ M-tangential genau dann, wenn $\zeta = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \zeta_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ (also, wenn $\zeta_{i_1 \ldots i_k} = 0$ falls einer der Indices $i_1, \ldots, i_k$ Null ist). Nach Definition sind alle 0-Formen M-tangential.

Für jede k-Form ω in jedem Punkt (t_0, y_0) von $[0,1] \times M$ gibt es eine eindeutig bestimmte M-tangentiale k-Form ω_1 in (t_0, y_0) und eine eindeutig bestimmte M-tangentiale $(k-1)$-Form η in (t_0, y_0) ($\eta = 0$ falls $k=0$) mit

$$\omega = \omega_1 + dt \wedge \eta$$

(t ist die obige Projektionsfunktion). Eindeutigkeit: ist außerdem $\omega = \omega_1' + dt \wedge \eta'$, so $\overline{\omega}_1 = dt \wedge \overline{\eta}$, wobei $\overline{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_1'$ und $\overline{\eta} = \eta' - \eta$ M-tangential sind.

Für beliebige Vektoren $\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k-1}{X} \in T_{y_0} M$ und den Basisvektor $\partial_t \in T_{t_0}[0,1]$ (mit $dt(\partial_t) = 1$), kann man $\partial_t, \underset{1}{X}, \ldots, \underset{k-1}{X}$ kanonisch als Elemente von $T_{(t_0, y_0)}([0,1] \times M)$ betrachten. Nun $0 = \overline{\omega}_1(\partial_t, \underset{1}{X}, \ldots, \underset{k-1}{X}) = (dt \wedge \overline{\eta})(\partial_t, \underset{1}{X}, \ldots, \underset{k-1}{X}) = \overline{\eta}(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k-1}{X})$; also, $\overline{\eta} = 0$ (da $\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k-1}{X}$ beliebig waren) und somit $\overline{\omega}_1 = 0$.

Existenz der Zerlegung von ω: in Produktkoordinaten $t = x^0, x^1, \ldots, x^n$ wie oben (um (t_0, y_0)) ist

$$\omega = \sum_{0 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \zeta_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \zeta_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} +$$

$$+ dt \wedge \sum_{1 \le i_2 < \ldots < i_k \le n} \zeta_{0 i_2 \ldots i_k} dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

was unsere Zerlegung ist (S. 423); dabei haben wir die Summe $\sum\limits_{0\le i_1<\dots<i_k\le n}$ in $\sum\limits_{i_1\ge 1} + \sum\limits_{i_1=0}$ zerlegt. Wir haben also nicht nur die Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung von ω bewiesen, sondern auch eine lokale Koordinatenbeschreibung dafür, aus welcher sofort folgt, daß ω_1 und η C^∞-Formen sind falls ω es ist (und man ω in jedem einzelnen Punkt zerlegt).

Für $t\in[0,1]$ haben wir die differenzierbare Einbettung $\underset{t}{\iota}: M\to[0,1]\times M$ mit $\underset{t}{\iota}(y)=(t,y)$. Nun definieren wir für jedes k eine lineare Abbildung

$$\Gamma:\Omega^k([0,1]\times M)\to\Omega^{k-1}M$$

durch

$$(\Gamma\omega)_y(\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X})=$$

$$=\int_0^1\eta_{(t,y)}\big((d\underset{t}{\iota})_y\underset{1}{X},\dots,(d\underset{t}{\iota})_y\underset{k-1}{X}\big)\,dt$$

für $y\in M$, $\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X}\in T_yM$, wobei $\omega=\omega_1+dt\wedge\eta$ die auf S. 423 beschriebene Zerlegung von ω ist (wegen der Eindeutigkeit hängt η offenbar linear von ω ab).

LEMMA 24. Unter den obigen Voraussetzungen ist, für jedes $\omega\in\Omega^k([0,1]\times M)$,

$$\underset{1}{\iota}^*\omega-\underset{0}{\iota}^*\omega=d(\Gamma\omega)+\Gamma(d\omega).$$

Beweis. Da Γ semi-lokal definiert ist (nur bezüglich $t\in[0,1]$ wird auf ganz $[0,1]$ integriert), genügt es die Behauptung in Produktkoordinaten x^i zu beweisen, wobei $t = x^0$ ganz $[0,1]$ durchläuft.

1. Fall: Sei $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n = \dim M$. Hier ist $\omega_1 = \omega$ und $\eta = 0$, also $\Gamma\omega = 0$, $d(\Gamma\omega) = 0$. Dagegen

$$d\omega = (d\omega)_1 + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Das "durch $d\omega$ bestimmte η" ist also $\frac{\partial f}{\partial t} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, woher

$$[\Gamma(d\omega)]_y = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,y)\,dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= [f(1,y) - f(0,y)]\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$= (\iota_1^*\omega)_y - (\iota_0^*\omega)_y$. Unsere Behauptung gilt also in diesem Fall.

2. Fall: sei $\omega = f\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$,

$1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq n$. Hier ist $\iota_1^*\omega = \iota_0^*\omega = 0$, während $d\omega =$

$$= -\partial_i f\, dt \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

(über $i = 1, \ldots, n$ summiert), also

$$[\Gamma(d\omega)]_y = -\left(\int_0^1 \partial_i f(t,y)\,dt\right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

andererseits, $(\Gamma\omega)_y = \left(\int_0^1 f(t,y)\,dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$, woher $(d(\Gamma\omega))_y = \left(\int_0^1 \partial_i f(t,y)\,dt\right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$ und $\Gamma(d\omega) + d(\Gamma\omega) = 0 = \iota_1^*\omega - \iota_0^*\omega$.

Allgemeiner Fall: jede k-Form ist eine endliche Summe von Formen der beiden besprochenen Typen. Die Behauptung folgt also aus der Linearität von d, Γ, ι_1^* und ι_0^*. q.e.d.

SATZ 24. Seien $F_0, F_1 : M \to N$ C^∞-Abbildungen zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M, N. Sind F_0, F_1 C^∞-homotop, so sind die entsprechenden Homomorphismen der Kohomologie-Algebren gleich, d. h.

$$F_0^* = F_1^* : H^*N \to H^*M.$$

<u>Beweis</u>. Wir konstruieren eine <u>algebraische Homotopie</u> zwischen $F_0^* : \Omega^*N \to \Omega^*M$ und $F_1^* : \Omega^*N \to \Omega^*M$, d. h., für jedes k, eine lineare Abbildung

$$\tilde{\Gamma} : \Omega^k N \to \Omega^{k-1} M \quad \text{mit}$$

$$F_1^*\omega - F_0^*\omega = d(\tilde{\Gamma}\omega) + \tilde{\Gamma}(d\omega)$$

für jedes k und jede k-Form ω in N. Falls $d\omega = 0$, wird nun folgen, daß $F_1^*[\omega] - F_0^*[\omega] =$

$$= [F_1^*\omega - F_0^*\omega] = [d(\tilde{\Gamma}\omega)] = 0,$$

was unsere Behauptung ergibt.

Um $\tilde{\Gamma}$ zu definieren, nehmen wir eine C^∞-Homotopie $h : [0,1] \times M \to N$ zwischen $F_0 = h_0$ und $F_1 = h_1$. Sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma \circ h^*$ (Γ wie auf S. 426). Nun ist $F_1 = h \circ z_1$, $F_0 = h \circ z_0$, also, nach Lemma 24,

$$F_1^*\omega - F_0^*\omega = z_1^*(h^*\omega) - z_0^*(h^*\omega) =$$
$$= d(\Gamma h^*\omega) + \Gamma(dh^*\omega) = d(\Gamma h^*\omega) +$$
$$+ \Gamma(h^* d\omega) = d(\tilde{\Gamma}\omega) + \tilde{\Gamma}(d\omega).$$

q. e. d.

Eine C^∞-Abbildung $F : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M, N heißt eine C^∞-<u>Homotopieäquivalenz</u>, falls es eine C^∞-

Abbildung $G: N \to M$ gibt mit

$$G \circ F \underset{C^\infty}{\sim} Id_M \,, \quad F \circ G \underset{C^\infty}{\sim} Id_N$$

(G ist ein sog. Homotopie-Inverses zu F). In diesem Fall muß nach Satz 24 $F^*: H^*N \to H^*M$ ein Isomorphismus sein (mit dem Inversen $G^*: H^*M \to H^*N$). Also: C^∞-Homotopieäquivalente Mannigfaltigkeiten haben isomorphe Kohomologiealgebren. Z. B. ist, für $n \geq 1$, die Identitätseinbettung

$$F: S^n_c \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

der Sphäre von jedem festen Radius c eine Homotopieäquivalenz (mit $G: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n_c$, $G(x) = c \cdot \frac{x}{|x|}$, sodaß $G \circ F = Id_{S^n_c}$, während $F \circ G \underset{C^\infty}{\sim} Id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$

durch die Homotopie $t \mapsto h_t$,

$$h_t(x) = tx + (1-t)c\frac{x}{|x|} \,, \quad t \in [0,1]).$$

<u>Beispiel</u>. Für $n \geq 1$ ist $H^0(S^n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$, $H^n(S^n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$ und $H^k(S^n, \mathbb{R}) = 0$ für $k \neq 0, n$ (wodurch auch die Kohomologie-<u>Algebra</u> von S^n eindeutig bestimmt wird).

Beweis: 1) $H^1(S^n, \mathbb{R}) = 0$ für $n \geq 2$. Sei nämlich $\omega \in Z^1 S^n$. Wählen wir in S^n zwei verschiedene feste Punkte y, z. Da $S^n \setminus \{y\}$ mit $\mathbb{R}^n$ diffeomorph ist, gibt es (weil $H^1\mathbb{R}^n = \{0\}$ nach dem Lemma von Poincaré) eine Funktion $f_1 \in \Omega^0(S^n \setminus \{y\})$ mit $df_1 = \omega$ is $S^n \setminus \{y\}$ und, ebenso, eine Funktion $f_2 \in \Omega^0(S^n \setminus \{z\})$ mit $df_2 = \omega$ in $S^n \setminus \{z\}$.

Also, $d(f_1 - f_2) = 0$ in $S^n \setminus \{y,z\}$.

Da $S^n \setminus \{y,z\}$ zusammenhängend ist (weil $n \geq 2$), ist $c = f_1 - f_2$ eine konstante Funktion in $S^n \setminus \{y,z\}$.

Die Funktion

$$f = \begin{cases} f_1 & \text{auf } S^n \setminus \{y\} \\ f_2 + c & \text{auf } S^n \setminus \{z\} \end{cases}$$

ist auf S^n differenzierbar und $\omega = df$, also $[\omega] = 0$.

2) Für $n \geq 1$, $k \geq 1$ gibt es einen Isomorphismus

$$\Psi : H^k S^n \to H^{k+1} S^{n+1}.$$

Seien $y, z \in S^{n+1}$ verschiedene feste Punkte. Bis auf Diffeomorphismus

ist $S^{n+1} \setminus \{y\} = S^{n+1} \setminus \{z\} = \mathbb{R}^{n+1}$, also ist $U = S^{n+1} \setminus \{y,z\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\text{Punkt}\}$ mit S^n C^∞-Homotopieäquivalent (S. 431), d. h. $H^k S^n \approx H^k U$. Wir werden den Isomorphismus $\Psi : H^k U \to H^{k+1} S^{n+1}$ definieren. Sei $\omega \in Z^k U$. Es gibt $\omega_1 \in \Omega^k(S^{n+1} \setminus \{z\})$, $\omega_2 \in \Omega^k(S^{n+1} \setminus \{y\})$ mit $\omega = \omega_1 - \omega_2$ in U (nehmen wir z. B. $\varphi \in C^\infty(S^{n+1})$ mit $\varphi = 0$ nahe y, $\varphi = 1$ nahe z, $\omega_1 = \varphi\omega$, $\omega_2 = (\varphi - 1)\omega$).

Für <u>beliebige</u> solche ω_1, ω_2, $d\omega_1 - d\omega_2 = d(\omega_1 - \omega_2) = d\omega = 0$ in U. Also ist

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} d\omega_1 & \text{in } S^{n+1} \setminus \{z\} \\ d\omega_2 & \text{in } S^{n+1} \setminus \{y\} \end{cases}$$

eine $(k+1)$-Form der Klasse C^∞ auf S^{n+1}, die geschlossen ist (weil lokal exakt). Setzen wir

$$\Psi[\omega] = [\tilde{\omega}] \in H^{k+1} S^{n+1}.$$

Wir müssen beweisen, daß diese Definition von Ψ von der Zerlegung $\omega = \omega_1 - \omega_2$ nicht abhängt, sowie vom Vertreter ω der Kohomologieklasse $[\omega]$. Ist $\omega = \eta_1 - \eta_2$ eine andere derartige Zerlegung von ω, so ist

$$\zeta = \begin{cases} \omega_1 - \eta_1 & \text{in } S^{n+1} \setminus \{z\} \\ \omega_2 - \eta_2 & \text{in } S^{n+1} \setminus \{y\} \end{cases}$$

eine C^∞-Form auf S^{n+1}. Ist nun $\tilde{\tilde{\omega}}$ die mit η_1, η_2 analog zu $\tilde{\omega}$ gebildete Form, so $\tilde{\omega} - \tilde{\tilde{\omega}} = d\zeta$ auf S^{n+1} und $[\tilde{\omega}] = [\tilde{\tilde{\omega}}]$.

Nehmen wir nun statt ω einen

anderen Vertreter der gleichen Kohomologieklasse, der nach Definition die Form $\omega + d\theta$ haben muß, $\theta \in \Omega^{k-1} U$. Es gibt $\theta_1 \in \Omega^{k-1}(S^{n+1} \setminus \{z\})$, $\theta_2 \in \Omega^{k-1}(S^{n+1} \setminus \{y\})$ mit $\theta = \theta_1 - \theta_2$ in U. Also hat $\omega + d\theta$ die Zerlegung $\omega + d\theta = (\omega_1 + d\theta_1) - (\omega_2 + d\theta_2)$. Deshalb ist $\widetilde{\omega + d\theta} = \tilde{\omega}$ (weil $d \circ d = 0$), also hängt $\Psi[\omega]$ tatsächlich nur von $[\omega]$ ab. Offenbar ist Ψ linear.

Ψ ist surjektiv: sei $[\zeta] \in H^{k+1} S^{n+1}$, $\zeta \in Z^{k+1} S^{n+1}$. In $S^{n+1} \setminus \{z\}$ (bzw. $S^{n+1} \setminus \{y\}$) ist $\zeta = d\omega_1$ (bzw. $\zeta = d\omega_2$), nach dem Lemma von Poincaré. Die k-Form $\omega = \omega_1 - \omega_2$ in U ist nun geschlossen und $\tilde{\omega} = \zeta$ ($\tilde{\omega}$

wie auf S. 434 gebildet), also $[\zeta] = \Psi[\omega]$.

Ψ ist injektiv: seien $\omega, \omega_1, \omega_2, \tilde{\omega}$ wie auf S. 434 und $\Psi[\omega] = 0$. Also, $\tilde{\omega} = d\eta$, $\eta \in \Omega^k S^{n+1}$, d. h.

$d(\omega_1 - \eta) = 0$ in $S^{n+1} \setminus \{z\}$,

$d(\omega_2 - \eta) = 0$ in $S^{n+1} \setminus \{y\}$.

Nach dem Lemma von Poincaré, gibt es $\theta_1 \in \Omega^{k-1}(S^{n+1} \setminus \{z\})$, $\theta_2 \in \Omega^{k-1}(S^{n+1} \setminus \{y\})$ mit $\omega_1 - \eta = d\theta_1$, $\omega_2 - \eta = d\theta_2$, also, in U, $\omega = \omega_1 - \omega_2 = d(\theta_1 - \theta_2)$, d. h. $[\omega] = 0$. Somit ist Ψ ein Isomorphismus.

Nun ist offenbar $H^k S^n = \{0\}$ für $k > n$. Für $k = n$, gibt es, nach dem Fall 2) oben, die Isomorphismen

$$H^n S^n \approx H^{n-1} S^{n-1} \approx \ldots \approx H^2 S^2 \approx H^1 S^1$$

während $H^1 S^1 \approx \mathbb{R}$ (S. 417). Andererseits, für $k = 1, \ldots, n-1$ ist nach Fall 2)

$$H^k S^n \approx H^{k-1} S^{n-1} \approx \ldots \approx H^1 S^{n-k+1}$$

Da $n-k+1 \geq 2$, ist also $H^k S^n = \{0\}$ (Fall 1)).

q. e. d.

Sei M eine Menge, N ein metrischer Raum mit Abstandsfunktion ρ. Für Abbildungen $F_0, F_1 : M \to N$ definieren wir den <u>Abstand</u>

$$\operatorname{dist}(F_0, F_1) = \sup_{y \in M} \rho(F_0(y), F_1(y)) \in [0, \infty]$$

Sind F_0, F_1 ρ-beschränkt (d. h. sind ihre Bilder ρ-beschränkte Teilmengen von N), so ist $\mathrm{dist}(F_0, F_1) < \infty$.

Im Raum aller ρ-beschränkten Abbildungen $M \to N$ ist dist offenbar eine Abstandsfunktion. Insbesondere kann man für M eine Mannigfaltigkeit, für N eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit der Riemannschen Abstandsfunktion) nehmen.

LEMMA 25. Sei M eine Mannigfaltigkeit, (N, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Sind $F_0, F_1 : M \to N$ stetige Abbildungen und $\mathrm{dist}(F_0, F_1) < \varepsilon$, so müssen F_0 und F_1 homotop sein.

(ii) Sind $F_0, F_1 : M \to N$ C^∞-Abbildungen und $\mathrm{dist}(F_0, F_1) < \varepsilon$, so

müssen F_0 und F_1 C^∞-homotop sein.

<u>Beweis</u>. Definieren wir $\Phi : TN \to N \times N$ durch $\Phi(X) = (\pi(X), \exp_{\pi(X)} X)$, wobei $\pi : TN \to N$ die Projektion des Tangentialbündels von N ist, $\exp_y : T_yN \to N$ die Exponentialabbildung der Metrik g. Im Punkt $O_y \in T_yN \subset TN$ (Null-Vektor in $y \in N$) ist $T_{O_y}TN$ kanonisch mit $T_yN \oplus T_yN$ isomorph (vgl. eine lokale Trivialisierung), so daß das Differential von Φ in O_y (Φ ist offenbar C^∞-differenzierbar) folgendermaßen aussieht:

$$d\Phi_{O_y}(Z \oplus Y) = Z \oplus (Y + Z) \in T_yN \oplus T_yN = T_{(y,y)}(N \times N).$$

Also ist $d\Phi_{O_y}$ ein Isomorphismus. In einer Umgebung des Nullschnittes $N \subset TN$ ist Φ deshalb lokal diffeomorph, und, da Φ auf der kompakten Untermannigfaltigkeit $N \subset TN$ injektiv ist, gibt es eine Umgebung W von N in TN, für die $\Phi(W)$ offen und $\Phi: W \to \Phi(W)$ ein Diffeomorphismus ist. Da $\Phi(W)$ die Diagonale $Diag_N = \{(y,y) : y \in N\}$ enthält, muß es $\varepsilon > 0$ mit $A_\varepsilon \subset \Phi(W)$, wobei $A_\varepsilon = \{(y,z) \in N \times N : \rho(y,z) < \varepsilon\}$, ρ die Riemannsche Abstandsfunktion (weil N kompakt ist).

Seien nun $F_0, F_1 : M \to N$ stetig mit $dist(F_0, F_1) < \varepsilon$. Die Homotopie

$$h_t(x) = \exp_{F_0(x)} \left\{ t \cdot \Phi^{-1}(F_0(x), F_1(x)) \right\}$$

ist stetig (bzw. differenzierbar, wenn

F_0, F_1 es sind). Dabei ist $t \in [0,1]$, $x \in M$, $\Phi^{-1}: \Phi(W) \to W$ das Inverse von Φ (man bedenke, daß $(F_0(x), F_1(x)) \in A_\varepsilon \subset \Phi(W)$), und $h_0 = F_0$, $h_1 = F_1$. Geometrisch gesehen, verbindet die Kurve $t \mapsto h_t(x)$ die Punkte $F_0(x)$, $F_1(x)$ längst der (einzigen) kürzesten Geodätischen, die, falls $\rho(F_0(x), F_1(x)) < \varepsilon$, differenzierbar von den Endpunkten abhängt.

q.e.d.

LEMMA 26 (schwache Form des Einbettungssatzes von Whitney, 1936; vgl. auch Aufgabe XI. 2. vii). Für jede kompakte Mannigfaltigkeit M gibt es eine Einbettung $F: M \to \mathbb{R}^m$ in einen euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$.

<u>Beweis</u>. Sei $n = \dim M$. Für jedes $y \in M$ gibt es eine C^∞-Abbildung $F_y : M \to \mathbb{R}^n$, die in einer Umgebung U_y von y eine Immersion ist (man nimmt $F_y = (f^1, \ldots, f^n)$, wobei die Funktionen $f^1, \ldots, f^n$ in U_y ein Koordinatensystem bilden, und auf ganz M definiert sind). Da M kompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_k$ mit $M = U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_k}$. Nun ist

$\tilde{F} = (F_{y_1}, \ldots, F_{y_k}) : M \to \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nk}$

eine Immersion. Da $\tilde{F}$ lokal eine Einbettung sein muß, gibt es eine Umgebung W der Diagonale $\mathrm{Diag}_M \subset M \times M$ mit $\tilde{F}(y) \neq \tilde{F}(z)$ falls $(y,z) \in W \setminus \mathrm{Diag}_M$.

Für $(y,z) \in (M \times M) \setminus W$ finden wir Umgebungen $V_{y,z}$ von y, $V'_{y,z}$ von z

und $f_{y,z} \in C^\infty(M)$ mit $f_{y,z}(V_{y,z}) \cap f_{y,z}(V'_{y,z}) = \emptyset$. Da $(M \times M) \setminus W$ kompakt ist, gibt es $y_1, z_1, \ldots, y_s, z_s$ mit $(M \times M) \setminus W = (V_{y_1,z_1} \times V'_{y_1,z_1}) \cup \ldots \cup (V_{y_s,z_s} \times V'_{y_s,z_s})$. Nun ist

$F = (\tilde{F}, f_{y_1,z_1}, \ldots, f_{y_s,z_s}) : M \to \mathbb{R}^{nk+s}$

eine Immersion (weil $\tilde{F}$ es war) und offenbar injektiv (also eine Einbettung): Ist $y \neq z$, so entweder $(y,z) \in W$ und $\tilde{F}(y) \neq \tilde{F}(z)$, oder $(y,z) \in V_{y_i,z_i} \times V'_{y_i,z_i}$ mit $i \in \{1, \ldots, s\}$, woher $f_{y_i,z_i}(y) \neq f_{y_i,z_i}(z)$.

q. e. d.

LEMMA 27. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es eine

Folge f_m von C^∞-Funktionen auf M, für die $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ gleichmäßig.

<u>Beweis</u>. Sei zunächst der Träger von f in einer kleinen Menge enthalten, die mit dem euklidischen Ball $2B$ vom Radius 2 um 0 in $\mathbb{R}^n$ diffeomorph ist, und dabei Träger f im Ball $B \subset 2B$ vom Radius 1 enthalten ist. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Träger $\varphi \subset B$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. Nun ist, für $0 < \varepsilon < 1$,

$$f * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(2B)$$ (S. Seiten 166-170)

und $$(f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_B [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\varphi(z)dz$$

(S. 171). Also, $\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_{C^0} \leq$

$\leq \|\varphi\|_{L^1} \sup_{x,z\in 2B} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|$, woher

$f*\varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f$ gleichmäßig, weil die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $4\overline{B}$ gleichmäßig stetig ist.

Nun kann $f*\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(2B)$ als eine Funktion auf M betrachtet werden. Somit ist das Lemma bewiesen, weil jedes f eine endliche Summe von stetigen Funktionen mit solchen kleinen Trägern ist.

q. e. d.

SATZ 25. Seien M, N kompakte Mannigfaltigkeiten.

(i) Jede stetige Abbildung $F: M \to N$ ist mit einer C^∞-Abbildung $\tilde{F}: M \to N$ homotop.

(ii) Sind C^∞-Abbildungen $F_0, F_1: M \to N$ homotop, so müssen sie auch "stückweise C^∞-homotop" sein im folgenden Sinn: es gibt C^∞-Abbildungen $G_1, \dots, G_s : M \to N$ mit

$$F_0 \underset{C^\infty}{\sim} G_1,\ G_1 \underset{C^\infty}{\sim} G_2, \dots, G_{s-1} \underset{C^\infty}{\sim} G_s,$$

$$G_s \underset{C^\infty}{\sim} F_1 .$$

<u>Beweis.</u> Wir behaupten, daß es für jedes stetige $F: M \to N$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine C^∞-Abbildung $\tilde{F}: M \to N$ gibt mit $\operatorname{dist}(F, \tilde{F}) < \varepsilon$ (für eine geeignete Riemannsche Metrik auf N). Behauptung (i) folgt dann sofort aus Lemma 25. Nach Lemma 26 dürfen wir annehmen, daß $N \subset \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^k$ ist; N wird mit der induzierten Riemannschen Metrik g versehen. Somit ist F eine stetige Abbildung von M nach $\mathbb{R}^k$, also ein k-Tu-

pel von stetigen Funktionen. Approximiert man jede dieser Funktionen mit einer Folge von C^∞-Funktionen wie in Lemma 27, so entstehen C^∞-Abbildungen $F_m : M \to \mathbb{R}^k$ mit

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{y \in M} |F_m(y) - F(y)| = 0$$

($|\cdot|$ ist die Norm in $\mathbb{R}^k$).

Wir definieren das Normalenbündel ν_N von N. Es ist ein Vektorbündel, dessen Faser in $x \in N$ aus allen Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^k$ besteht, die zum Unterraum $T_x N \subset \mathbb{R}^k$ orthogonal sind. Wir haben also den Totalraum ν_N (als Menge): er ist die disjunkte Vereinigung dieser Fasern, sowie die Projektion $\pi : \nu_N \to N$. Um daraus ein Vektorbündel zu machen, brauchen wir noch lokale Trivialisierungen mit C^∞-Übergangsfunktionen. Sei $y_0 \in N$ fest. Nahe y_0 haben wir lokale Basisschnitte $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ für TN ($n = \dim N$), die nichts anderes sind, als gewisse Abbildungen nach $\mathbb{R}^k$. Vervollständigt man $\sigma_1(y_0), \ldots, \sigma_n(y_0)$ zu einer Basis $\sigma_1(y_0), \ldots, \sigma_n(y_0), \sigma_{n+1}, \ldots, \sigma_k$ von $\mathbb{R}^k$, so haben die konstanten Abbildungen $\sigma_{n+1}, \ldots, \sigma_k : N \to \mathbb{R}^k$ die Eigenschaft, daß $\sigma_1(y), \ldots, \sigma_n(y), \sigma_{n+1}, \ldots, \sigma_k$ für alle y nahe y_0 eine Basis von $\mathbb{R}^k$ bilden. Wendet man auf diese Basis den Orthonormalisierungsprozeß, so entstehen C^∞-Abbildungen $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_k : U_{y_0} \to \mathbb{R}^k$, U_{y_0} eine Umgebung von y_0, die eine Orthonormalbasis $\tilde{\sigma}_1(y), \ldots, \tilde{\sigma}_n(y)$ von T_yN

sowie eine Basis $\tilde{\sigma}_{n+1}(y), \ldots, \tilde{\sigma}_k(y)$ von $(\nu_N)_y$ für alle $y \in U_{y_0}$ bilden. Wir haben also die lokalen Basisschnitte und somit eine lokale Trivialisierung von ν_N. Ist $\tilde{\tilde{\sigma}}_{n+1}(y), \ldots, \tilde{\tilde{\sigma}}_k(y)$ ein anderes derartiges System (für jedes y in $\mathbb{R}^k$ orthonormal, sowie C^∞ bezüglich y), so* $\tilde{\tilde{\sigma}}_\alpha(y) = A_\alpha{}^\beta(y)\,\tilde{\sigma}_\beta(y)$, wobei $A_\alpha{}^\beta(y) = \langle \tilde{\tilde{\sigma}}_\alpha(y), \tilde{\sigma}_\beta(y) \rangle$ eine C^∞-Funktion von y ist; unser ν_N ist also ein Vektorbündel.

Betrachten wir die C^∞-Abbildung $\Psi : \nu_N \to \mathbb{R}^k$ des Totalraumes ν_N mit $\Psi(\xi) = \pi(\xi) + \xi$ (wobei $\pi(\xi)$ und ξ als Vektoren in $\mathbb{R}^k$ betrachtet werden). Man sieht leicht (vgl. S. 440) daß Ψ längst des

---

*$\beta, \alpha = n+1, \ldots, k$

Nullschnittes $N \subset \nu_N$ lokal diffeomorph ist, also, da N kompakt ist, gibt es eine Umgebung V von N in ν_N für die $\Psi(V) \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\Psi : V \to \Psi(V)$ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $\delta > 0$ beliebig. Im Totalraum ν_N ist die euklidische Länge $|\cdot|$ eine stetige Funktion (weil, in unseren Trivialisierungen $\tilde{\sigma}_\alpha$, für $\xi = \xi^\alpha \tilde{\sigma}_\alpha(y)$ $|\xi|^2 = \sum_\alpha (\xi^\alpha)^2$ ist). Also, man darf annehmen, daß $|\xi| < \delta$ für alle $\xi \in V$ (indem man notfalls V durch die kleinere Umgebung $V \cap \{\xi \in \nu_N : |\xi| < \delta\}$ von N in ν_N ersetzt). Wegen der Definition von Ψ hat nun $\pi \circ \Psi^{-1} : \Psi(V) \xrightarrow[C^\infty]{} N$ die Eigen-

schaft, daß* $|\pi \circ \Psi^{-1}(z) - z| < \delta$ (weil, für $z = \Psi(\xi) = \pi(\xi) + \xi \in \Psi(V)$, $\pi \circ \Psi^{-1}(z) - z = \pi(\xi) - z = -\xi$ und $|\xi| < \delta$). In unserer Folge F_m von C^∞-Abbildungen $M \to \mathbb{R}^k$, die F approximieren, finden wir ein F_{m_0} mit $F_{m_0}(M) \subset \Psi(V)$. Setzen wir nämlich, für $\eta > 0$, $N_\eta = \{z \in \mathbb{R}^k : \mathrm{dist}(z, N) < \eta\}$ (dist = euklidischer Abstand). Es gibt $\eta > 0$ mit $N_\eta \subset \Psi(V)$; sonst finden wir, mit $\eta = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \ldots$, eine Folge $z_i \in N_{\frac{1}{i}} \setminus \Psi(V)$, also auch eine Folge $v_i \in N$ mit $|z_i - v_i| < \frac{1}{i}$. Da N kompakt ist, gilt für eine Teilfolge $\lim_{i\to\infty} z_i = \lim_{i\to\infty} v_i = v \in N$, woher $z_i \in \Psi(V)$ für große i, ein Widerspruch.

* für alle $z \in \Psi(V)$

Nehmen wir nun $\eta > 0$* mit $N_\eta \subset \Psi(V)$ und F_{m_0} mit $\sup_M |F_{m_0} - F| < \eta$, so ist $F_{m_0}(M) \subset N_\eta \subset \Psi(V)$, weil

$$\operatorname{dist}(F_{m_0}(y), N) \leq |F_{m_0}(y) - F(y)| < \eta$$

für jedes $y \in M$. Sei nun $\tilde{F} = \pi \circ \Psi^{-1} \circ F_{m_0} : M \to N$; somit ist $\tilde{F}$ C^∞-differenzierbar und, für alle $y \in M$, $|\tilde{F}(y) - F(y)| \leq |\pi \circ \Psi^{-1} \circ F_{m_0}(y) - F_{m_0}(y)| + |F_{m_0}(y) - F(y)| < \delta + \eta < 2\delta$, also

$$\sup_M |\tilde{F} - F| < 2\delta.$$

Nehmen wir nun unser vorgeschriebenes $\varepsilon > 0$ (S. 447). Es gibt dann $\delta > 0$ mit $\rho(y, z) < \varepsilon$ (Riemannscher Abstand in N) für alle $y, z \in N$ mit $|y - z| < 2\delta$. Sonst gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $y_i, z_i \in N$ mit $|y_i - z_i| < \frac{1}{i}$, aber $\rho(y_i, z_i) \geq \varepsilon_0$. Da N kompakt ist, gibt es konvergente Teilfolgen: $y_i \to z \in N$, $z_i \to z \in N$, also $\rho(z, z) \geq \varepsilon_0$; dieser Widerspruch beweist die Existenz von δ. Für dieses δ, nehmen wir das entsprechende $\tilde{F} : M \xrightarrow[C^\infty]{} N$ mit $\sup_M |\tilde{F} - F| < 2\delta$; also, $\operatorname{dist}_\rho(\tilde{F}, F) < \varepsilon$, woraus Behauptung (i) folgt (S. 447).

Seien nun $F_0, F_1 : M \to N$ C^∞-differenzierbar und (stetig) homotop, mit einer Homotopie $[0,1] \ni t \to h_t$,

* und dazu $\eta < \delta$

$h_0 = F_0,\ h_1 = F_1$. Sei auf N eine feste Riemannsche Metrik g gewählt und dazu eine Zahl $\varepsilon > 0$ wie in Lemma 25. Nun gibt es $\zeta > 0$ mit der Eigenschaft, daß $\operatorname{dist}(h_t, h_{t'}) \leq \varepsilon/3$ falls $t, t' \in [0,1]$ und $|t - t'| < \zeta$.

Sonst gibt es Folgen t_i, t_i' in $[0,1]$ und y_i in M mit $|t_i - t_i'| < \frac{1}{i}$ und $\rho(h_{t_i}(y_i), h_{t_i'}(y_i)) > \varepsilon/3$ (ρ ist die Abstandsfunktion von (M,g)). Da $[0,1] \times M$ kompakt ist, gibt es Teilfolgen mit $t_i \xrightarrow[i\to\infty]{} t_0$, $t_i' \xrightarrow[i\to\infty]{} t_0$, $y_i \longrightarrow y_0$, woher wir den Widerspruch $0 = \rho(h_{t_0}(y_0), h_{t_0}(y_0)) \geq \geq \frac{\varepsilon}{3}$ haben. Für dieses ζ, nehmen

wir $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s < t_{s+1} = 1$ mit $t_i - t_{i-1} < \zeta$, $i = 1, \ldots, s+1$. Für $i = 1, \ldots, s$ finden wir (S. 447) $G_i : M \xrightarrow[C^\infty]{} N$ mit $\operatorname{dist}(G_i, h_{t_i}) < \varepsilon/3$, während wir $G_0 = F_0$, $G_{s+1} = F_1$ setzen.

Also ist, für $i = 1, \ldots, s+1$,

$$\operatorname{dist}(G_i, G_{i-1}) \leq \operatorname{dist}(G_i, h_{t_i}) + $$
$$+ \operatorname{dist}(h_{t_i}, h_{t_{i-1}}) + \operatorname{dist}(h_{t_{i-1}}, G_{i-1}) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Nach unserer Auswahl von ε (Lemma 25) sind nun G_i und G_{i-1} C^∞-homotop, $i = 1, \ldots, s+1$, also $F_0 \underset{C^\infty}{\sim} G_1 \underset{C^\infty}{\sim} \ldots \underset{C^\infty}{\sim} G_s \underset{C^\infty}{\sim} F_1$, was Behauptung (ii) beweist.

q.e.d.

Seien nun M, N kompakte Mannigfaltigkeiten, $F: M \to N$ eine beliebige stetige Abbildung. Wir definieren den graduierten Homomorphismus

$$F^*: H^*N \to H^*M$$

folgendermaßen: nehmen wir zu F ein $\tilde{F}$ wie in (i) von Satz 25, und setzen $F^* = \tilde{F}^*$. Dies ist von der C^∞-Abbildung $\tilde{F}$ unabhängig: sind $\tilde{F}_0$, $\tilde{F}_1$ zwei solche Abbildungen, so sind sie (stetig) homotop (weil beide zu F homotop) und, für G_i wie in (ii) von Satz 25 ist, nach Satz 24,

$$\tilde{F}_0^* = G_1^* = G_2^* = \ldots = G_s^* = \tilde{F}_1^*.$$

Somit ist F^* eindeutig definiert.

Es ist wieder ein kontravarianter

Funktor: $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ für stetige Abbildungen $F: M \to N$, $G: N \to P$, wobei M, N, P kompakt sind, und $(Id_M)^* = Id_{H^*M}$.

Sind M, N kompakte Mannigfaltigkeiten und $F_0, F_1: M \to N$ homotope stetige Abbildungen, so ist $F_0^* = F_1^*: H^*N \to H^*M$, weil man für F_0, F_1 eine gemeinsame homotope C^∞-Abbildung $\tilde{F}$ nehmen kann.

Eine stetige Abbildung $F: M \to N$ heißt eine Homotopie-Äquivalenz, wenn es ein stetiges $G: N \to M$ gibt mit $G \circ F \sim Id_M$, $F \circ G \sim Id_N$. Insbesondere ist jeder Homöomorphismus eine Homotopie-Äquivalenz. Für kompakte

Mannigfaltigkeiten M, N und eine Homotopie-Äquivalenz $F: M \to N$ ist F^* offenbar ein graduierter Isomorphismus von Algebren. Homotopie-äquivalente kompakte Mannigfaltigkeiten müssen also isomorphe Kohomologie-Räume haben.

FOLGERUNG 24. Für $m, n \geqslant 1$ und $m \neq n$ sind die Sphären S^m, S^n nicht Homotopie-äquivalent, insbesondere nicht homöomorph.

Beweis. $H^n S^n \simeq \mathbb{R}$, $H^n S^m = \{0\}$ (S. 432).

q. e. d.

FOLGERUNG 25. Für $m \neq n$, $m, n \geqslant 0$, sind die euklidischen Räume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph.

Beweis. Sei $m < n$. Für $m = 0$ ist $\mathbb{R}^m$ ein Punkt, $\mathbb{R}^n$ dagegen unendlich. Für $m = 1$ hört $\mathbb{R}^m$ nach dem Entfernen eines Punktes auf, zusammenhängend zu sein, im Gegensatz zu $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. Sei nun $m \geqslant 2$. Wären $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ homöomorph, so würde dies auch für $\mathbb{R}^m \setminus \{\text{Punkt}\}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}$ der Fall sein, also wären die Sphären S^{m-1}, S^{n-1} Homotopie-äquivalent (S. 431), was mit Folgerung 24 unvereinbar ist.

q. e. d.

FOLGERUNG 26 (Der Fixpunktsatz von L.E.J. Brouwer, 1912). Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene n-dimensionale Kugel, $F: B \to B$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es $x \in B$ mit $F(x) = x$.

Beweis. Sei $F(x) \neq x$ für alle x. Ordnen wir jedem $x \in B$ den einzigen Schnittpunkt $\Phi(x)$ der von $F(x)$ aus durch x gehenden Halbgeraden mit der Randsphäre ∂B (für $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist $\Phi(x) = F(x) + t(x - F(x))$, wobei t die einzige positive Lösung der quadratischen Gleichung $|F(x) + t(x - F(x))|^2 = 1$ ist; somit hängt t und ebenso $\Phi(x)$ stetig von x ab). Also ist $\Phi: B \to \partial B$ stetig und die Einschränkung von Φ auf ∂B ist die Identität. Wir behaupten, daß es eine Abbildung Φ mit diesen Eigenschaften nicht geben kann. Klebt man zwei Kopien von B längs ∂B zusammen, so entsteht eine Sphäre S^n mit einer stetigen Abbildung $\bar{\Phi}: S^n \to S^{n-1}$ auf die Äquatorsphäre $S^{n-1} = \partial B$ (mit $\bar{\Phi} = \Phi$ auf jeder Kopie von B), für die die Einschränkung auf S^{n-1} die Identität ist (explizit: $S^n = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times B : t^2 + |x|^2 = 1\}$, $S^{n-1} = \{(0,x) \in S^n\}$, $\bar{\Phi}(t,x) = (0, \Phi(x))$). Sei $\iota: S^{n-1} \to S^n$ die Inklusionsabbildung, $[\omega] \in H^{n-1} S^{n-1}$ ein nichttriviales Element. Also $\bar{\Phi} \circ \iota = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$ und $0 \neq [\omega] = (\bar{\Phi} \circ \iota)^* [\omega] = \iota^* \bar{\Phi}^* [\omega] = 0$, weil $\bar{\Phi}^*[\omega] \in H^{n-1} S^n = \{0\}$. Dieser Widerspruch beweist die Nichtexistenz von Φ. q.e.d.

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $y \in M$. Jedes $\omega \in (\Lambda^n M)_y$ wird in jedem festen Koordinatensystem (x^i) um y durch die Komponente $\omega_{1\ldots n}$ eindeutig bestimmt. Bei Koordinatenwechseln ist
$$\omega_{1'\ldots n'} = A_{1'}^{i_1} \ldots A_{n'}^{i_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1'}^{\sigma_1} \ldots A_{n'}^{\sigma_n} \omega_{1\ldots n} = \det[A_{i'}^{i}]\,\omega_{1\ldots n}.$$
Ist nun M orientiert und mit einer festen Riemannschen Metrik g versehen, so definieren wir in jedem $y \in M$ eine Form $V = V_g \in (\Lambda^n M)_y$ durch
$$V(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{n}{X}) = 1$$

für eine orientierte (d.h. mit der Orientierung verträgliche) Orthonormalbasis $\underset{1}{X}, \ldots, \underset{n}{X}$ von $T_y M$. Für eine andere Basis $\underset{1}{Y}, \ldots, \underset{n}{Y}$ der gleichen Art ist $\underset{i}{Y} = A_i{}^j \underset{j}{X}$ mit $\det[A_i{}^j] = 1$ ($[A_i{}^j]$ ist eine Orthogonalmatrix), also $V(\underset{1}{Y}, \ldots, \underset{n}{Y}) =$
$$= A_1{}^{i_1} \ldots A_n{}^{i_n} V(\underset{i_1}{X}, \ldots, \underset{i_n}{X}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_1{}^{\sigma_1} \ldots A_n{}^{\sigma_n} V(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{n}{X}) =$$
$= \det[A_i{}^j] = 1$, so daß V von $\underset{1}{X}, \ldots, \underset{n}{X}$ unabhängig ist und somit allein durch die Metrik und die Orientierung in y bestimmt. Da M orientiert ist, gibt es auf M einen speziellen Koordinatenatlas, der aus solchen Koordinatensystemen besteht, deren Basisfelder $\partial_1, \ldots, \partial_n$ in jedem Punkt des Definitionsbereiches der vorgeschriebenen Orientierung entsprechen. Da $\partial_{i'} = A_{i'}^{i} \partial_i$, gilt für je zwei solche ("orientierte") Koordinatensysteme (x^i), $(x^{i'})$
$$\det[A_{i'}^{i}] > 0.$$
Für die Metrik g hat unsere Form $V = V_g$ in jedem orientierten Koordinatensystem (x^i) um den Punkt y die Komponente

$$V_{1\dots n} = \sqrt{\det[g_{kl}(y)]}.$$

Tatsächlich haben die beiden Seiten die gleiche Transformationsregel bei Koordinatenwechseln mit $\det[A_i^{i'}] > 0$, es genügt also die Gleichung in <u>einem</u> Koordinatensystem dieser Art zu beweisen. Wählen wir (x^i) so daß $\partial_i(y)$ orthonormal sind, so sind die beiden Seiten gleich 1. Unser $V = V_g$ ist in jedem $y \in M$ definiert und, nach der obigen Formel, hängt differenzierbar von y ab; also ist $V = V_g \in \Omega^n M$ eine n-Form, die man die <u>Volumenform</u> (das <u>Volumenelement</u>) der <u>orientierten</u> Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) nennt. In jedem Punkt ist $V \neq 0$. Kehrt man die Orientierung um, so ist für die unorientierte Riemannsche

Mannigfaltigkeit die Volumenform gleich $-V$. Die Volumenform $V = V_g$ ist immer parallel bezüglich des Riemannschen Zusammenhanges: $\nabla V = 0$. Seien nämlich $\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X}$ C^∞-Vektorfelder in einer kleinen offenen Teilmenge U von M, die in jedem Punkt von U orthonormal und orientiert sind (sie entstehen, z.B. durch die Orthonormalisierung von Basisfeldern eines Koordinatensystems). Da $g(\underset{i}{X}, \underset{i}{X}) = 1$, ist für jedes $X \in T_yM$, $y \in U$, $0 = X(g(\underset{i}{X}, \underset{i}{X})) = 2g(\nabla_X \underset{i}{X}, \underset{i}{X})$, d.h. $\nabla_X \underset{i}{X}$ ist eine Kombination von $\underset{1}{X}, \dots, \underset{i-1}{X}, \underset{i+1}{X}, \dots, \underset{n}{X}$. Also ist $0 = X(1) = X(V(\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X})) =$

$$= (\nabla_X V)(\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X}) + \sum_{i=1}^{n} V(\underset{1}{X}, \dots, \underset{i-1}{X}, \nabla_X \underset{i}{X}, \underset{i+1}{X}, \dots, \underset{n}{X}) =$$

$$= (\nabla_X V)(\underset{1}{X}, \dots, \underset{n}{X}),$$ woher $\nabla V = 0$.

Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit, ω eine n-Form auf M die nicht stetig zu sein braucht. ω heißt meßbar (bzw. nicht-negativ oder positiv) wenn in beliebigen (orientierten) Koordinaten x^i die Funktion $\omega_{1\ldots n}$ meßbar (bzw. nicht-negativ oder positiv) ist. Diese Begriffe sind geometrisch. Sei nun ω meßbar, $\omega \geq 0$ (nicht-negativ), $A \subset M$ eine kleine meßbare Menge (d.h. A sitzt in einem relativ kompakten orientierten Koordinatensystem $(\mathcal{U}, \varphi) = (\mathcal{U}, (x^i))$.

Das Integral

$$\int_A \omega = \int_{\varphi(A)} \omega_{1\ldots n} \circ \varphi^{-1} \in [0, \infty]$$

hängt von diesem System nicht ab: Nach der Transformationsformel für

das Lebesgue-Integral ist, für ein anderes solches System $(\mathcal{U}', \varphi') = (\mathcal{U}', (x^{i'}))$,

$$\int_{\varphi'(A)} \omega_{1'\ldots n'} \circ (\varphi')^{-1} = \int_{(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(A))} \omega_{1'\ldots n'} \circ (\varphi')^{-1} =$$

$$= \int_{\varphi(A)} (\omega_{1'\ldots n'} \circ \varphi^{-1}) \cdot |\det D(\varphi' \circ \varphi^{-1})| =$$

$$= \int_{\varphi(A)} \left(\omega_{1'\ldots n'} \cdot \det[A_i^{i'}]\right) \circ \varphi^{-1} =$$

$$= \int_{\varphi(A)} \omega_{1\ldots n} \circ \varphi^{-1},$$ wegen der Transformationsformel für $\omega_{1\ldots n}$ mit $\det[A_i^{i'}] > 0$. Somit ist $\int_A \omega$ Koordinatenunabhängig ($\omega \geq 0$, meßbar, A meßbar, klein).

Wie für die Integration von Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten könnte man nun $\int_A \omega$ für $\omega \geq 0$

und beliebige meßbare Mengen A definieren, usw. Stattdessen können wir es einfacher machen: für eine n-Form ω (z.B. stetige, mit kompaktem Träger) und eine meßbare Menge $A \subset M$, definieren wir $\int_A \omega \in \mathbb{R}$ indem wir eine Riemannsche Metrik g auf M wählen, mit Volumenform V, so daß $\omega = f \cdot V$ (f stetig, mit kompaktem Träger) und $\int_A \omega = \int_A f \cdot V_g$ (Riemannsches Integral) setzen. Dies ist von g unabhängig, weil es für kleine Mengen A so ist (Definition des Integrals in lokalen Koordinaten). Somit haben wir das <u>orientierte</u>

<u>Integral</u> von n-Formen auf orientierten n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, und die zu erwartenden Eigenschaften des Integrals (Linearität und Positivität bezüglich ω, σ-Additivität bezüglich A) sind offenbar erfüllt.

LEMMA von Stokes für kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand: Sei M eine kompakte, orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit, η eine $(n-1)$-Form der Klasse C^1 auf M. Dann ist

$$\int_M d\eta = 0.$$

<u>Beweis</u>. Wir dürfen annehmen, daß η einen kleinen Träger hat (in einem Koordinatenbereich $(U,(x^i))$, weil

jede Form η eine endliche Summe von solchen C^1-Formen ist). Dann ist aber (falls wir $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ annehmen)

$$\int_M d\eta = \int_{\mathcal{U}} (d\eta)_{1\ldots n} = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 \eta_{2\ldots n} - \partial_2 \eta_{1\ldots n} + \ldots - (-1)^n \partial_n \eta_{1\ldots n-1}) = 0$$

(das Integral einer partiellen Ableitung einer Funktion mit kompaktem Träger ist offenbar 0).

q.e.d.

Aus diesem Lemma folgt sofort, daß für jede kompakte, orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit M, $H^n(M,\mathbb{R}) \neq \{0\}$. Wählen wir nämlich eine Orientierung und eine Riemannsche Metrik g auf M,

so ist, für das Volumenelement V_g, $\int_M V_g = Vol(M,g) > 0$. Somit ist $V_g \in \Omega^n M = Z^n M$ nicht von der Gestalt $d\eta$, d. h. $[V_g] \neq 0$ in $H^n(M,\mathbb{R})$. Allgemeiner ist genauso $\int_M \omega > 0$ und $[\omega] \neq 0$ für jede Form $\omega \in \Omega^n M$ mit $\omega \geqslant 0$, die nicht identisch verschwindet (so ein ω kann z. B. einen sehr kleinen Träger haben).

Beispiel. Jede gerade-dimensionale Sphäre S^n läßt kein stetiges Vektorfeld X ohne Nullstellen zu. Betrachten wir nämlich S^n als die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$. Würde es so ein Feld X auf S^n geben, so kann man $|X| = 1$ annehmen (man ersetze X durch $\dfrac{X}{|X|}$). Somit wird X zu einer stetigen Abbildung $X: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle y, X(y)\rangle = 0$ für alle $y \in S^n$ und $|X(y)| = 1$.

Für $t \in [0,1]$ sei $h_t(y) = h(t,y) = \cos(\pi t)\cdot y + \sin(\pi t)\cdot X(y)$ (in $\mathbb{R}^{n+1}$). Also ist $h: [0,1]\times S^n \to S^n$ eine stetige Homotopie zwischen Id_{S^n} und $-Id: S^n \to S^n$ ($-Id(y) = -y$). $-Id$ ist eine lineare Isometrie von $\mathbb{R}^{n+1}$, die die Orientierung umkehrt*; somit ist, für die Volumenform V der induzierten Metrik auf S^n (mit der induzierten Orientierung),

*weil $n+1$ ungerade ist

$(-Id)^* V = -V$. Da $-Id \sim Id_{S^n}$ in S^n, ist (vgl. S. 458) $(-Id)^* = (Id)^*: H^n S^n \to H^n S^n$. Also $-[V] = (-Id)^*[V] = (Id)^*[V] = [V]$ in $H^n S^n$, was der Ungleichung $[V] \neq 0$ (S. 470) widerspricht. Deshalb darf so ein X nicht existieren.

SATZ 26. Sei M eine kompakte orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann hat, bei jeder festen Orientierung, das Integrationsfunktional

$$\int_M : \Omega^n M = Z^n M \longrightarrow \mathbb{R}$$

den Kern $B^n M$ und somit definiert es den ebenfalls mit $\int_M$

bezeichneten Isomorphismus

$$\int_M : H^n(M,\mathbb{R}) = Z^n M / B^n M \xrightarrow{\approx} \mathbb{R};$$

also ist $H^n(M,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.

Beweis. $\int_M : \Omega^n M \to \mathbb{R}$ ist nicht-trivial, also surjektiv (S. 470). Nach dem Lemma von Stokes ist $B^n M \subset \operatorname{Kern} \int_M$. Sei, umgekehrt, $\omega \in \operatorname{Kern} \int_M$. Wählen wir in M eine Riemannsche Metrik g. Also ist $\omega = f \cdot V_g$, wobei $f \in C^\infty(M)$ und $\int_M f \cdot V_g = 0$. Deshalb (vgl. Folgerung 20, S. 277) gibt es $h \in C^\infty(M)$ mit $f = \Delta h$, also, für das Vektorfeld $X = \nabla h$, $f = \delta X = -X^i{}_{,i}$.

Definieren wir $\eta \in \Omega^{n-1} M$ durch $\eta_{i_2 \dots i_n} = -X^i V_{i i_2 \dots i_n}$, wobei $V = V_g$. Also ist, nach (b) von Satz 23, $(d\eta)_{1\dots n} = \nabla_1 \eta_{2\dots n} - \nabla_2 \eta_{13\dots n} + \dots$ $\dots - (-1)^n \nabla_n \eta_{1\dots n-1}$, woher, wegen $\nabla V = 0$,

$$(d\eta)_{1\dots n} = -X^i{}_{,1} V_{i2\dots n} + X^i{}_{,2} V_{i13\dots n} - \dots + (-1)^n X^i{}_{,n} V_{i1\dots n-1} = \delta X \cdot V_{1\dots n}$$

(weil, z.B. $V_{i2\dots n} = 0$ für $i \neq 1$)

Somit ist $d\eta = \delta X \cdot V_g = f \cdot V_g = \omega$, also $\omega \in B^n M$. Die Behauptung folgt nun aus der Gleichung $B^n M = \operatorname{Kern} \int_M$.

q. e. d.

Seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension n, $F: M \to N$ eine C^∞-Abbildung. In jedem Punkt $y \in M$ wo das Differential $dF_y : T_y M \to T_{F(y)} N$ ein Isomorphismus ist, definieren wir

$$(\mathrm{sign}(dF))(y) = \begin{cases} +1, & \text{falls } dF_y \text{ die vorgeschriebenen Orientierungen erhält,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge $\{y \in M : dF_y \text{ ist ein Isomorphismus}\}$ ist offen, und die Funktion $\mathrm{sign}(dF)$ ist lokal konstant (der Wert $+1$ oder -1 für $\mathrm{sign}(dF)$ bedeutet, in lokalen Koordinaten, daß eine gewisse Determinante positiv bzw. negativ ist). Falls F lokal diffeomorph ist (dF_y isomorph für jedes $y \in M$), insbesondere für einen Diffeomorphismus F, ist $\mathrm{sign}(dF)$ auf ganz M definiert und konstant, und entweder F ist <u>orientierungstreu</u> ($\mathrm{sign}(dF) = 1$), oder F <u>kehrt die Orientierung um</u>

($\mathrm{sign}(dF) = -1$ überall). Das orientierte Integral ist <u>invariant unter Diffeomorphismen</u> im folgenden Sinn: ist $F: M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten der Dimension n und ω eine stetige n-Form mit kompaktem Träger auf N, so ist, für jede meßbare Menge $A \subset N$,

$$\int_{F^{-1}(A)} F^*\omega = \mathrm{sign}(dF) \cdot \int_A \omega .$$

Dies sieht man gleich, wenn man notfalls eine der Mannigfaltigkeiten umorientiert, um F orientierungstreu zu machen (dabei ändert sich eventuell das Vorzeichen eines der Integrale) und voraussetzt, daß A klein ist; dann kann man auf M und N Koordinaten verwenden, in denen F als Identitätsabbildung erscheint, woher die Integrale gleich sein müssen. Ein beliebiges A zerlegt man dann in abzählbar viele kleine meßbare Mengen.

Sei M eine kompakte, orientierbare, n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Jede feste Orientierung in M bestimmt nach Satz 26 einen Isomorphismus $\int_M : H^n M \to \mathbb{R}$; bei Umorientierung von M wechselt $\int_M$ das Vorzeichen.

Es gibt also genau eine Kohomologieklasse $\Omega_M \in H^n(M,\mathbb{R})$ mit $\int_M \Omega_M = 1$; Ω_M nennt man die Fundamentalklasse (oder Orientierungsklasse) der orientierten kompakten Mannigfaltigkeit M. Für die andere Orientierung von M ist die Fundamentalklasse gleich $-\Omega_M$. Da $\Omega_M \neq 0$, bildet Ω_M eine Basis von $H^n M$.

Seien nun M, N kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension n, $F: M \to N$ eine stetige Abbildung.

Wir definieren den Abbildungsgrad

$$\deg F \in \mathbb{R}$$

von F durch die Gleichung

$$F^*\Omega_N = \deg F \cdot \Omega_M$$

Für homotope Abbildungen $F_0, F_1 : M \to N$ ist also

$$\deg F_0 = \deg F_1$$

(vgl. S. 458).

Für $\omega \in \Omega^n N$ und eine C^∞-Abbildung $F: M \to N$ ist nun

$$\int_M F^*\omega = \deg F \cdot \int_N \omega$$

Tatsächlich, es ist $[\omega] = \lambda\,\Omega_N$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Also $\int_M F^*\omega = \int_M F^*[\omega] = \lambda \int_M F^*\Omega_N =$

$= \lambda \deg F \int_M \Omega_M = \deg F \cdot \lambda = \deg F \int_N \lambda\,\Omega_N =$

$= \deg F \int_N [\omega] = \deg F \int_N \omega.$

Ist $F: M \to N$ eine nicht-surjektive stetige Abbildung (M, N kompakt, orientiert, von derselben Dimension), so ist $\deg F = 0$: Da $F(M)$ kompakt ist, gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und $y \in N$ mit der Eigenschaft, daß der offene ε_0-Ball $B(y, \varepsilon_0)$ um y mit $F(M)$ leeren Durchschnitt hat. Finden wir $\varepsilon < \varepsilon_0/2$ wie in Lemma 25 und eine C^∞-Abbildung $\tilde{F}: M \to N$ mit $\operatorname{dist}(F, \tilde{F}) < \varepsilon$ (vgl. S. 447; das ganze wird für eine feste Riemannsche Metrik auf N gemacht, wie auf S. 447), so ist $F \sim \tilde{F}$, also $\deg F = \deg \tilde{F}$, und $\tilde{F}(M) \cap B(y, \varepsilon_0/2) = \emptyset$. Nehmen wir nun eine nicht-negative Form $\omega \in \Omega^n N$, $n = \dim N$, mit $\omega_y > 0$ und mit $\text{Träger}(\omega) \subset B(y, \varepsilon_0/2)$, so $\tilde{F}^*\omega = 0$, also, nach der obigen Formel mit $\int_N \omega > 0$, $\deg F = 0$.

Für kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten M, N, P der gleichen Dimension und stetige Abbildungen $F: M \to N$, $G: N \to P$ ist offenbar

$$\deg(G \circ F) = \deg G \cdot \deg F$$

und natürlich

$$\deg(\mathrm{Id}_M) = 1$$

(falls man in M nur eine Orientierung betrachtet). Ändert man eine der Orientierungen, in M oder N, so ändert der Grad von $F: M \to N$ sein Vorzeichen; somit ist, für $F: M \to M$ der Grad von der Orientierung unabhängig.

Ist $F: M \to N$ ein Diffeomorphismus, so $\deg F = \pm 1$; genauer, $\deg F = \operatorname{sign}(dF)$. Dies folgt aus der Formel auf S. 476 (mit $A = N$) mit der Integralformel auf S. 478.

Seien M, N (nicht unbedingt kompakte) Mannigfaltigkeiten (von beliebigen Dimensionen), $F: M \to N$ eine C^1-Abbildung. Man nennt $y \in M$ einen <u>kritischen Punkt</u> von F, falls $dF_y: T_yM \to T_{F(y)}N$ <u>nicht</u> surjektiv ist. Die Menge dieser Punkte bezeichnen wir mit $\operatorname{Krit}(F)$. Falls $\dim M < \dim N$ ist also jeder

Punkt für F kritisch: $\mathrm{Krit}(F) = M$. Einen Punkt $z \in N$ nennt man einen <u>regulären</u> <u>Wert</u> von F, falls $F^{-1}(z)$ keine kritischen Punkte von F enthält (dabei kann $F^{-1}(z)$ leer sein, so daß ein regulärer Wert nicht immer ein Wert von F ist).

SATZ 27. Seien M, N kompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $F: M \to N$ eine C^∞-Abbildung, $z \in N$ ein regulärer Wert von F. Dann ist $F^{-1}(z)$ endlich und

$$\deg F = \sum_{y \in F^{-1}(z)} (\mathrm{sign}(dF))(y) \in \mathbb{Z}$$

(Bezeichnungen wie auf S. 475).

<u>Beweis</u>. Da in einer Umgebung von jedem $y \in F^{-1}(z)$, F ein Diffeomorphismums ist, sind die Punkte von $F^{-1}(z)$ untereinander isoliert. Da M kompakt ist und $F^{-1}(z)$ in M abgeschlossen, folgt daraus, daß $F^{-1}(z)$ endlich sein muß. Für jedes $y \in F^{-1}(z)$ finden wir eine Umgebung U_y von y in M, die durch F auf eine Umgebung V_y von z in N diffeomorph abgebildet wird. Wir dürfen dabei annehmen, daß $V_y = V$ von

$y \in F^{-1}(z)$ nicht abhängt, indem wir $V = \bigcap_{y \in F^{-1}(z)} V_y$ setzen und jedes U_y durch $U_y \cap F^{-1}(V)$ ersetzen. Somit haben wir die Diffeomorphismen $F: U_y \to V$, $y \in F^{-1}(z)$, die man beliebig "verkleinern" dürfen, indem man statt V eine kleinere Umgebung V' von z nimmt und statt U_y, $U_y \cap F^{-1}(V')$. Also können wir voraussetzen, daß V eine zusammenhängende Koordinatenumgebung ist und die Mengen U_y, $y \in F^{-1}(z)$, paarweise disjunkt sind.

Ist V klein genug, so $F^{-1}(V) = \bigcup_{y \in F^{-1}(z)} U_y$. Sonst würde es Folgen $z_k \in N$, $y_k \in M$ geben mit $z_k \xrightarrow[k \to \infty]{} z$, $y_k \notin \bigcup_{y \in F^{-1}(z)} U_y$, $F(y_k) = z_k$. Da M kompakt ist, dürfen wir annehmen, daß $y_k \to y_0 \in M$, woher $y_0 \in F^{-1}(z)$ und fast alle y_k müssen in der Umgebung $\bigcup_{y \in F^{-1}(z)} U_y$ von y_0 liegen, was unserer Auswahl der y_k widerspricht.

Haben wir schon $F^{-1}(V) = \bigcup_{y \in F^{-1}(z)} U_y$, so wählen wir eine nicht-negative n-Form $\omega \in \Omega^n N$ mit $\text{Träger}(\omega) \subset V$ und $\omega(z) > 0$; somit ist $\int_N \omega > 0$. Nun ist

$\text{Träger}(F^*\omega) \subset \bigcup_{y \in F^{-1}(z)} U_y$. Da die U_y disjunkt sind, haben wir also

$$\int_M F^*\omega = \sum_{y \in F^{-1}(z)} \int_{U_y} F^*\omega .$$

Für $y \in F^{-1}(z)$ ist aber U_y zusammenhängend und $F: U_y \to V$ ein Diffeomorphismus. Deshalb ist $\text{sign}(dF) = (\text{sign}(dF))(y)$ auf U_y konstant (S. 475) und $\int_{U_y} F^*\omega = (\text{sign}(dF))(y) \int_V \omega = (\text{sign}(dF))(y) \int_N \omega$. Da $\int_N \omega > 0$, folgt unsere Behauptung nun sofort aus der Formel von S. 478.

q. e. d.

Die Bedeutung des obigen Satzes besteht u.a.

darin, daß jedes solche F reguläre Werte besitzt:

SATZ von A. Sard, 1942 (der Fall $\dim M \leq \dim N$). Ist $F: M \to N$ eine C^1-Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M, N mit $\dim M \leq \dim N$, die abzählbare Atlasse zulassen, so ist $F(\text{Krit}(F))$ eine Nullmenge in N.

<u>Beweis</u>: Siehe Aufgaben XIV.6 – XIV.8.

q. e. d.

FOLGERUNG 27. Seien F, M, N wie im Satz von Sard, M kompakt. Dann ist die Menge $N \setminus F(M)$ der regulären Werte von F offen und dicht in N.

q. e. d.

FOLGERUNG 28. Sei $F: M \to N$ eine C^1-Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten mit abzählbaren Atlassen, $\dim M < \dim N$. Dann ist $F(M)$ eine Nullmenge in N.

q. e. d.

Wegen des Satzes 27 haben wir auch

FOLGERUNG 29. Seien M, N kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension, $F: M \to N$ eine stetige Abbildung.

Dann ist
$$\deg F \in \mathbb{Z}.$$
Beweis. Es gibt eine C^∞-Abbildung $\tilde{F}: M \to N$ mit $\tilde{F} \sim F$, also $\deg \tilde{F} = \deg F$. Da $\tilde{F}$ einen regulären Wert z besitzen muß, folgt die Behauptung aus Satz 27. q.e.d.

FOLGERUNG 30. Seien M, N kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension, $F: M \to N$ eine (stetige) Homotopie-Äquivalenz. Dann ist $\deg F \in \{1, -1\}$.

Beweis. Für das Homotopie-Inverse G von F ist $\deg F \cdot \deg G = 1$. Da die beiden Grade ganzzahlig sind, ist $\deg F = \pm 1$. q.e.d.

Beispiele.

(i) Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und, für $k \geq 1$, definieren wir $F: S^1 \to S^1$ durch $F(z) = z^k$ (komplexe Potenz). Dann ist F lokal diffeomorph und orientierungstreu (die Projektion $\mathbb{R} \ni t \to e^{it} \in S^1$ bildet auf S^1 lokale Koordinaten, in welchen F als die Abbildung $t \mapsto kt$ dargestellt

werden kann. Nach Satz 27 ist also $\deg F = k$. Dagegen hat die Abbildung $S^1 \ni z \mapsto z^{-k} = \bar{z}^k \in S^1$ den Grad $-k$ (z. B. als Komposition $z \mapsto \bar{z} \mapsto (\bar{z})^k$, wobei der orientierungsumkehrende Diffeomorphismus $z \to \bar{z}$ nach der Bemerkung auf S. 480 den Grad -1 haben muß). Somit gibt es C^∞-Abbildungen $S^1 \to S^1$ vom beliebigen ganzzahligen Grad.

(ii) Die komplexe Ebene $\mathbb{C}$, erweitert um einen "unendlichen" Punkt ∞, kann als S^2 (die Gaußsche Sphäre) angesehen werden, so daß jedes komplexe Polynom $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu einer stetigen Abbildung $S^2 \to S^2$ wird. Genauer, entsteht unser S^2 dadurch, daß man mit $\mathbb{C}$ ein anderes Exemplar von $\mathbb{C}$ zusammenklebt, indem man die Teilmengen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ der beiden Exemplare durch den Diffeomorphismus $z \mapsto \frac{1}{z}$ identifiziert. Also $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathbb{C}$ unsere komplexe

Ebene ist, und ∞ dem Nullpunkt des anderen $\mathbb{C}$ entspricht. Sei nun $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom k-ten Grades: $P(z) = $ $= a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_k \neq 0$. Die Fortsetzung von P auf S^2 mit $P(\infty) = \infty$ ist C^∞-differenzierbar (was man leicht sieht im Koordinatensystem, das das andere $\mathbb{C}$ bildet: dies ist die Differenzierbarkeit von $z \to \left(P\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{-1}$ nahe $z = 0$). Nun ist P mit dem Polynom $z \mapsto z^k$ in S^2 homotop (Homotopie: $h_t(z) = a_k(t) z^k + (1-t) a_{k-1} z^{k-1} + \ldots$ $\ldots + (1-t) a_1 z + (1-t) a_0$, wobei $[0,1] \ni t \mapsto$ $\mapsto a_k(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Kurve mit $a_k(0) = a_k$, $a_k(1) = 1$ ist. Dies ist eine stetige Homotopie in $\mathbb{C}$, und in den anderen Koordinaten stellt man leicht fest, daß ihre natürliche Fortsetzung auf S^2 auch stetig ist). Die Abbildung $z \mapsto z^k$ bildet

$S^2 \setminus \{0, \infty\}$ auf sich ab (und 0 auf 0, ∞ auf ∞), ist dort lokal diffeomorph (lokale Existenz der holomorphen Wurzelfunktionen) und orientierungstreu (wie jede holomorphe Abbildung; vgl. die Cauchy-Riemann-Gleichungen). Nach Satz 27 ist der Abbildungsgrad von $S^2 \ni z \mapsto z^k \in S^2$ gleich k; wegen der obigen Homotopie ist also $\deg P = k$ *für jedes Polynom k-ten Grades, das man als Abbildung $S^2 \to S^2$ auffaßt*. Daraus folgt der *Hauptsatz der Algebra*: Ein Polynom $P : S^2 \to S^2$ vom (algebraischen) Grad $k > 0$ ist surjektiv, weil $\deg P = k > 0$ (S. 479), also es gibt $z \in S^2$ mit $P(z) = $ $= 0$ (und $z \neq \infty$, weil $P(\infty) = \infty$).

(iii) Sei S^n die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei wir $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}$ identifizieren, so daß Punkte von $\mathbb{R}^{n+1}$ als Paare (z, x)

mit $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ betrachtet werden.

Sei $\iota: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Inklusionsabbildung, $h: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ die Projektion mit $h(\xi) = \xi / |\xi|$ und definieren wir $\Phi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch $\Phi(z, x) = (z^k, x)$ ($k \geq 1$ fest; z^k ist die k-te komplexe Potenz von z). Wir behaupten, daß die C^∞-Abbildung

$$f = h \circ \Phi \circ \iota : S^n \to S^n$$

den Grad k oder $-k$ hat. S^n enthält den Kreis $S^1 = \{(z,x) \in S^n : x = 0\}$. Da

$$f(z,x) = \left(\frac{z^k}{\sqrt{|z|^{2k} + |x|^2}} , \frac{x}{\sqrt{|z|^{2k} + |x|^2}} \right),$$

ist $f(S^1) \subset S^1$, $f^{-1}(S^1) = S^1$. Nun genügt es zu zeigen, daß f in allen Punkten von S^1 lokal diffeomorph ist: wegen der Gleichung $f(z, 0) = (z^k, 0)$ hat jedes Element von S^1 genau k f-Urbilder, die alle in S^1 liegen, und, da S^1 zusammenhängend ist, wird $\operatorname{sign}(df)$ in allen

diesen Urbildern denselben Wert haben (S. 475), woher $\deg f = \pm k$ nach Satz 27. Sei also $(z, 0) \in S^1$, $X \in T_{(z,0)} S^n$ mit $df_{(z,0)} X = 0$, d. h.

$$dh_{(z^k,0)} (d\Phi_{(z,0)} X) = 0$$

wobei wir $T_{(z,0)} S^n$ als einen Unterraum von $T_{(z,0)} (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^{n+1}$ ansehen (genauer, als das orthogonale Komplement von $(z, 0)$).

Da $\operatorname{Kern}(dh_{(z^k,0)})$ die $(0,0)$ und $(z^k, 0)$ verbindende Gerade L in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, muß also $d\Phi_{(z,0)} X$ in dieser Geraden liegen. $d\Phi_{(z,0)}$ ist aber ein Isomorphismus $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ (weil, in Punkten (z, x) mit $z \neq 0$, Φ ein lokaler Diffeomorphismus ist, wegen der Existenz der lokalen komplexen Wurzelfunktionen) und $d\Phi_{(z,0)}$ bildet die Gerade L' durch $(0,0)$ und $(z, 0)$ auf L ab (weil offenbar $\Phi(L') \subset L$), woraus nun folgt, daß $X \in L'$. Da jedoch $X \in T_{(z,0)} S^n = (L')^\perp$, ist $X = 0$. Somit haben wir bewiesen, daß f in allen Punkten von S^1 lokal diffeomorph ist, und deshalb $\deg f = \pm k$. Es gibt außerdem Abbildungen $S^n \to S^n$ vom Grad -1 (orientierungsumkehrende lineare Isometrien von $\mathbb{R}^{n+1}$, z.B. Spiegelungen). Da der Grad multiplikativ bezüglich der Komposition ist (S. 479), haben wir insgesamt bewiesen, daß <u>es C^∞-Abbildungen $S^n \to S^n$ von jedem ganzzahligen Grad k gibt.</u>

(iv) Sei M eine beliebige kompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir behaupten, daß <u>es C^∞-Abbildungen $M \to S^n$ vom beliebigen Grad $k \in \mathbb{Z}$ gibt.</u> Nach Beispiel (iii) oben (mit der Kompositionsregel) genügt es eine Abbildung $f: M \to S^n$

mit $\deg f = \pm 1$ zu finden. Sei $B \subset M$ eine mit dem Ball diffeomorphe offene Teilmenge; wir werden B als den Ball* vom Radius 2 in $\mathbb{R}^n$ ansehen, und nehmen wir eine feste C^∞-Funktion $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi = 0$ in $(-\infty, \frac{1}{2})$, $\varphi = \pi$ in $(1, \infty)$ und $\varphi' > 0$ in $(\frac{1}{2}, 1)$. So ein φ muß es geben (sei z.B. $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit Träger$(\psi) = [\frac{1}{2}, 1]$, $\psi > 0$ in $(\frac{1}{2}, 1)$, $\int_{\mathbb{R}} \psi = \pi$, und definieren wir φ als eine Stammfunktion von ψ).

Wir definieren eine C^∞-Abbildung

$$f: B \to S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$$

(S^n ist die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$) durch

$$f(x) = \left(\sin(\varphi(|x|)) \cdot \frac{x}{|x|}, \; \cos(\varphi(|x|)) \right).$$

Also, $f(x) = (0, 1)$ für $|x| \le \frac{1}{2}$, $f(x) = (0, -1)$ für $|x| \geqslant 1$, so daß f tatsächlich C^∞-differenzierbar ist und

* mit Mittelpunkt 0

zu einer C^∞-Abbildung $f: M \to S^n$ fortgesetzt werden kann, indem man $f = (0,-1)$ in $M \setminus B$ setzt. Die Einschränkung von f auf $\{x \in B : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$ ist ein Diffeomorphismus auf $S^n \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$ (mit der Inversen Abbildung $(\xi, t) \longmapsto$ $\mapsto \varphi^{-1}(\arccos t) \cdot \frac{\xi}{|\xi|}$; dabei ist $\varphi : (\frac{1}{2}, 1) \to (0, \pi)$ ein Diffeomorphismus). Nach Satz 27 (auf einen beliebigen Punkt $z \in S^n \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$ angewandt) ist $\deg f = \pm 1$.

Sei E ein m-dimensionales reelles (bzw. komplexes) Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M. Einer lokalen Trivialisierung von E über einer offenen Teilmenge $U \subset M$ entspricht ein System von <u>Basisschnitten</u> $e_1, \dots, e_m$ in U (d. h. von C^∞-Schnitten, die auf U

definiert sind und in jedem Punkt von U eine Basis der Faser bilden). Sind $e_{1'}, \dots, e_{m'}$ andere Basisschnitte über einer offenen Menge U', so ist in $U \cap U'$

$$e_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} e_\alpha ,$$

wobei die $A^\alpha_{\alpha'}$ reell- (bzw. komplexwertige) C^∞-Funktionen auf $U \cap U'$ sind. Für drei solche Systeme gilt in der Durchschnittsmenge $U \cap U' \cap U''$

$$A^\alpha_{\alpha''} = A^{\alpha'}_{\alpha''} A^\alpha_{\alpha'} .$$

Da $A^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha$, ist also $A^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha = A^{\alpha'}_\alpha A^\beta_{\alpha'}$. Die Matrix $[A^{\alpha'}_\alpha]$ ist deshalb die Inverse Matrix von $[A^\alpha_{\alpha'}]$ (und nicht etwa ihre Transponierte). Ist $\sigma \in E_y$ ein Faserelement in $y \in M$, so hat es in jedem System e_α von Basisschnitten (in einer Umgebung von y) die Komponenten σ^α mit

$$\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha(y)$$

(kurz: $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$). Bezüglich anderer lokaler Schnitte $e_{\alpha'}$ um y hat σ die Komponenten $\sigma^{\alpha'}$ mit

$$\sigma^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \sigma^\alpha,$$

weil $(A^{\alpha'}_\alpha \sigma^\alpha)\cdot e_{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \sigma^\alpha A^\beta_{\alpha'} e_\beta = \delta^\beta_\alpha \sigma^\alpha e_\beta = \sigma^\alpha e_\alpha = \sigma$. Ist nun σ ein C^∞-Schnitt von E, so sind die Komponenten σ^α C^∞-Funktionen (reell-, bzw. komplexwertig) auf dem Definitionbereich U der Basisschnitte e_α, mit der Transformationsregel

$$\sigma^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \sigma^\alpha.$$

Umgekehrt, sei eine Überdeckung von M mit Trivialisierungsumgebungen (wozu auch die Basisschnitte gehören) gegeben, und für jedes dieser Systeme ein System von C^∞-Funktionen σ^α mit der obigen Transformationsregel (für zwei beliebige Trivialisierungen aus unserer Überdeckung). Dann gibt es genau einen C^∞-Schnitt σ von

E mit diesen Funktionen als Komponenten.

Sei E ein m-dimensionales reelles (bzw. komplexes) Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M. Unter einer <u>Fasermetrik</u> (oder einer Riemannschen, bzw. Hermiteschen*, je nachdem E reell oder komplex ist) in E verstehen wir eine Abbildung g, die jedem $y \in M$ ein symmetrisches (bzw. Hermitesches) positiv definites Skalarprodukt in E_y zuordnet, das im folgenden Sinne differenzierbar von y abhängt: für beliebige C^∞-Schnitte σ, σ' von E ist die Funktion $g(\sigma, \sigma')$ (die $y \in M$ die reelle, bzw. komplexe Zahl $g(y)(\sigma(y), \sigma'(y))$ zuordnet) ebenfalls C^∞-differenzierbar. Bezüglich einer lokalen Trivialisierung e_α hat so ein g die Komponenten $g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta)$ mit der Transformationsregel $g_{\alpha'\beta'} = A^\alpha_{\alpha'} \overline{A^\beta_{\beta'}}\, g_{\alpha\beta}$;

* Metrik

dabei ist, für C^∞-Schnitte $\sigma, \tilde{\sigma}$ von E, $g(\sigma, \tilde{\sigma}) = \overline{g_{\alpha\beta}\, \sigma^\alpha\, \tilde{\sigma}^\beta}$. Bei jeder festen Fasermetrik g in E gibt es eine Überdeckung von M mit metrischen Trivialisierungen, d. h., mit g-orthonormalen Basisschnitten, $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$: es genügt dann, beliebige Basisschnitte zu nehmen und auf sie den Orthonormalisierungsprozeß anzuwenden.

Ist M kompakt, so besitzt jedes Vektorbündel über M eine Fasermetrik. Dazu genügt es, M mit endlich vielen Trivialisierungsumgebungen $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$ zu überdecken, mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins ($\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^\infty(M)$, Träger$(\varphi_i) \subset \mathcal{U}_i$, $\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$, $\varphi_i \geq 0$), und über jedem $\mathcal{U}_i$ eine Fasermetrik g_i wählen (die es immer gibt). Dann sind die Produkte $\varphi_i g_i$ auf ganz M

im offenbaren Sinne C^∞-differenzierbar, und $g = \sum_{i=1}^k \varphi_i g_i$ ist eine Fasermetrik in E.

Zwei Fasermetriken $g, \tilde{g}$ in einem Vektorbündel E über M sind immer isometrisch: es gibt einen M-Isomorphismus $\Phi: E \to E$, der in jedem $y \in M$ eine Isometrie $\Phi: (E_y, \tilde{g}) \to (E_y, g)$ bildet (d. h. $\tilde{g}(\sigma, \sigma') = g(\Phi\sigma, \Phi\sigma')$ für $\sigma, \sigma' \in E_y$). Um dies zu beweisen, genügt es zu zeigen, das in jedem m-dimensionalen reellen (bzw. komplexen) Vektorraum V man beliebigen zwei Skalarprodukten $g, \tilde{g}$ eine natürliche Isometrie $\Phi: (V, \tilde{g}) \to (V, g)$ zuordnen kann, die C^∞-differenzierbar von g und $\tilde{g}$ abhängt (dies hat Sinn, weil Φ im Vektorraum End V liegt, und $g, \tilde{g}$ eine offene Teilmenge eines endlich dimensionalen Vektorraumes durchlaufen).

Zunächst, es gibt genau einen Endomorphismus $A: V \to V$ mit $\tilde{g}(\sigma, \sigma') = g(A\sigma, \sigma')$ für alle $\sigma, \sigma' \in V$ (A entsteht dadurch, daß man in $\tilde{g}$ einen Index mit Hilfe von g heraufzieht). Da $\tilde{g}$ symmetrisch (bzw. Hermitesch) und positiv definit ist, ist A selbstadjungiert bezüglich g $(A^* = A)$ und positiv $(g(A\sigma, \sigma) > 0$ falls $\sigma \neq 0)$. So ein A besitzt genau eine selbstadjungierte positive Quadratwurzel Φ $(\Phi^* = \Phi$, $\Phi > 0$, $\Phi^2 = A)$. Für A gibt es nämlich eine g-Orthonormalbasis von Eigenvektoren $e_1, \dots, e_m$, $m = \dim V$, mit $Ae_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i > 0$, so daß man Φ durch $\Phi e_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot e_i$ definieren kann. Dieses Φ ist das einzige mit den genannten Eigenschaften, was man leicht sieht, indem man V in eine g-orthogonale

direkte Summe von Φ-Eigenräumen zerlegt und dann bemerkt, daß diese Zerlegung mit einer diagonalisierenden Orthonormalbasis e_i für $A = \Phi^2$ verträglich ist. Dieses Φ ist die gesuchte Isometrie:

$$\tilde{g}(\sigma, \sigma') = g(A\sigma, \sigma') = g(\Phi^2\sigma, \sigma') = g(\Phi\sigma, \Phi^*\sigma') = g(\Phi\sigma, \Phi\sigma').$$

Da A offenbar C^∞ differenzierbar (sogar analytisch) von $g, \tilde{g}$ abhängt, brauchen wir jetzt nur zu zeigen, daß die Zuordnung $A \mapsto \Phi = \sqrt{A}$ C^∞ differenzierbar ist.

Sei S_+V die Menge aller selbstadjungierten positiven Endomorphismen von (V, g) und $f: S_+V \to S_+V$ mit $f(A) = A^2$. Wir wissen, daß f C^∞-differenzierbar und bijektiv ist. Um zu beweisen, daß die inverse Abbildung f^{-1} auch differenzierbar ist, nehmen wir $A \in S_+V$ und $H \in S(V) = T_A(S_+V)$ (S_+V ist eine offene

Teilmenge der reellen Vektorraumes $S(V)$ der selbstadjungierten Endomorphismen von (V,g)), d.h. $H = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A+tH)$ (für t dicht bei 0, $A+tH \in S_+V$). Nun

$$df_A(H) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(A+tH) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A+tH)^2 =$$

$= AH + HA$. Wir behaupten, daß $df_A(H) = 0$ nur wenn $H = 0$. Sei $df_A(H) = AH + HA = 0$ und nehmen wir einen Eigenvektor σ von A mit $A\sigma = \lambda\sigma$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ (weil $A^* = A$, $A > 0$). Also $AH\sigma = -HA\sigma = -\lambda H\sigma$; da $-\lambda$ kein Eigenwert von A sein darf ($A > 0$), ist $H\sigma = 0$ für jeden Eigenvektor σ von A und somit $H = 0$, weil V die direkte Summe der Eigenräume von A ist. Da nun, für jedes $A \in S_+V$,

df_A ein Isomorphismus ist, muß die bijektive Abbildung f ein Diffeomorphismus sein. Konstruiert man jetzt die obige Isometrie Φ_y in jeder Faser E_y des Bündels E mit Metriken $g, \tilde{g}$, so hängt Φ_y differenzierbar vom Punkt $y \in M$ ab, was unsere Isometrie $\Phi : (E,\tilde{g}) \to (E,g)$ definiert.

Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über M, g eine Fasermetrik in E. Wir definieren das <u>Einheitssphärenbündel</u>

$$E^1 = E^1(g) = \{\sigma \in E : g(\sigma,\sigma) = 1\}$$

als die Teilmenge des Totalraumes E, die aus allen Faserelementen der g-Länge 1 besteht. Ist E reell und 1-dimensional, so braucht E^1 nicht zusammenhängend zu sein (z. B. für das Produktbündel $E = M \times \mathbb{R}$; aber, für das Möbiussche Band E, E^1 ist zusammenhängend für jede Fasermetrik g). Sonst ist E^1 immer zusammenhängend (da die "Fasern" $E^1 \cap E_y$ von E^1 immer zusammenhängende Sphären sind, und man zwei Fasern von E^1 mit einer Kurve in E^1 verbinden kann, indem man endlich viele Trivialisierungen mit g-Orthonormalen Basisschnitten verwendet). Außerdem ist E^1 immer eine Untermannigfaltigkeit von E (weil es g-Trivialisierungen, d. h. Trivialisierungen von E mit g-orthonormalen Basisschnitten gibt), mit der Ausnahme des Falls wo die reelle Faserdimension 1 ist: dann kann E^1 auch eine disjunkte Vereinigung zweier Untermannigfaltigkeiten sein. Für eine andere Fasermetrik $\tilde{g}$ in E sind die Mannigfaltigkeiten $E^1(g)$ und $E^1(\tilde{g})$ diffeo-

morph (man verwende eine Isometrie $(E,\tilde{g}) \to (E,g)$, vgl. S. 498). Ist M kompakt, so muß E^1 ebenfalls kompakt sein (man überdecke M mit endlich vielen g-Trivialisierungen über kompakten Mengen).

Seien nun E, E' zwei reelle (oder komplexe) Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Unter einem Bündelhomomorphismus (oder M-Homomorphismus) von E nach E' versteht man eine C^∞-Abbildung $F: E \to E'$ der Totalräume mit

a) $\pi' \circ F = \pi$ (d. h. $F(E_y) \subset E'_y$ für $y \in M$: F ist _fasertreu_)

b) Für jedes $y \in M$ ist die Einschränkung $F: E_y \to E'_y$ linear.

Der Bündelhomomorphismus F heißt _injektiv_ (bzw. _surjektiv_) wenn für jedes $y \in M$ $F: E_y \to E'_y$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

Sei E ein Vektorbündel über M. Unter einem Unterbündel von E verstehen wir eine Teilmenge $\tilde{E} \subset E$ für die es ein Vektorbündel E' über M und einen injektiven Bündelhomomorphismus $F: E' \to E$ gibt mit $\tilde{E} = F(E')$. So ein Unterbündel $\tilde{E}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $y \in M$ ist $\tilde{E} \cap E_y$ ein Unterraum von E_y, dessen Dimension k von y nicht abhängt.

(ii) Jeder Punkt $y \in M$ hat eine Umgebung $U \subset M$ mit auf U definierten C^∞-Schnitten $e_1, \dots, e_k$ von E, die Werte in $\tilde{E}$ annehmen und in jedem Punkt linear unabhängig

sind (also, eine Basis von $\tilde{E} \cap E_{y'}$ für jedes $y' \in U$ bilden).

(iii) $\tilde{E}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von E und es bildet ein Vektorbündel über M, dessen Projektion $\pi: \tilde{E} \to M$ die Einschränkung der Projektion $\pi: E \to M$ ist, während die Fasern $\tilde{E}_y = \tilde{E} \cap E_y$ die Vektorraumstrukturen der Unterräume von E_y tragen; die Inklusion $\tilde{E} \to E$ ist ein Bündelhomomorphismus.

Beweis. (i) ist offensichtlich. (ii) Als $e_1, \dots, e_k$ kann man die F-Bilder eines Systems von lokalen Basisschnitten für E' nehmen. (iii) Für $y \in M$ wähle man $e_1, \dots, e_k$ um y wie in (ii), und vervollständige man $e_1(y), \dots, e_k(y)$ zu einer Basis $e_1(y), \dots, e_m(y)$ von E_y. Nahe y kann man $e_{k+1}(y), \dots, e_m(y)$ zu C^∞-Schnitten $e_{k+1}, \dots, e_m$ von E fortsetzen und es ist klar, daß $e_1, \dots, e_m$ in einer Umgebung U von y ein System von Basisschnitten für E bilden. In der entsprechenden Trivialisierung bekommt man leicht die Untermannigfaltigkeits- und Vektorbündelstruktur für $\tilde{E}$. q.e.d.

Im obigen Beweis folgt (iii) allein aus (i) und (ii). Somit haben wir die folgende äquivalente Definition des Unterbündels: Für ein Vektorbündel E über M ist eine Teilmenge $\tilde{E} \subset E$ ein Unterbündel von E genau dann, wenn sie den Bedingungen (i), (ii) auf S. 505 genügt.

Seien nun E, E' Vektorbündel über M mit Faserdimensionen m, m', $F: E \to E'$ ein Bündelhomomorphismus.

Wir definieren die Funktion $\operatorname{Rang} F: M \to \mathbb{Z}$ und Teilmengen $\operatorname{Ker} F \subset E$, $\operatorname{Im} F \subset E'$ durch

$$(\operatorname{Rang} F)(y) = \dim F(E_y)$$

$$\operatorname{Ker} F = \{\sigma \in E : F(\sigma) = 0 \in E'_{\pi(\sigma)}\}$$

$$\operatorname{Im} F = F(E).$$

Ist nun $\operatorname{Rang} F$ konstant auf M, so sind $\operatorname{Ker} F$ und $\operatorname{Im} F$ Unterbündel von E, bzw. E'.

Beweis. Man braucht jeweils nur (i) und (ii) von S. 505 zu beweisen (vgl. S. 507). Für $\operatorname{Ker} F$ sowie $\operatorname{Im} F$ ist (i) klar. Beweis von (ii): a) Für $\operatorname{Im} F$. Sei $y \in M$, $e_1, \dots, e_m$ Basisschnitte für E um y, $k = \operatorname{Rang} F$. Man kann $e_1, \dots, e_m$ so vertauschen, daß $F(e_1(y)), \dots, F(e_k(y))$ eine Basis von $F(E_y)$ bilden. Da $F(e_1),\dots,F(e_k)$ auch in einer Umgebung U von y linear unabhängig sein müssen, ist (ii) bewiesen.

b) Für Ker F. Seien $e_1,\dots,e_m$, U wie in a). Es ist

$$F(e_\alpha) = Q_\alpha{}^i F(e_i)$$

wobei $\alpha = k+1,\dots,m$, $i = 1,\dots,k$ und $Q_\alpha{}^i : U \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) C^∞-Funktionen sind. Für $\alpha = k+1,\dots,m$ sei $\tilde{e}_\alpha = e_\alpha - Q_\alpha{}^i e_i$, so daß $F(\tilde{e}_\alpha) = 0$. Nun sind $e_1,\dots,e_k,\tilde{e}_{k+1},\dots,\tilde{e}_m$ ebenfalls Basisschnitte von E, weil man durch sie die Schnitte $e_1,\dots,e_m$ ausdrücken kann: $e_\alpha = \tilde{e}_\alpha + Q_\alpha{}^i e_i$; insbesondere sind $\tilde{e}_{k+1},\dots,\tilde{e}_m$ linear unabhängig in jedem Punkt y' von U. Da $\dim(\operatorname{Ker} F \cap E_{y'}) = \dim E_y - \dim F(E_y) = m-k$, haben wir (ii) auch in diesem Fall. q.e.d.

Es gibt verschiedene natürliche Operationen auf Vektorräumen die neue Vektorräume liefern: die Konstruktion der direkten Summe, des dualen Raumes, des Tensorprodukts usw. Jede dieser Konstruktionen kann man auch auf Vektorbündel (über einer festen Basis M) anwenden, indem man sie faserweise durchführt. Jetzt werden wir das für die direkte Summe machen.

Seien $E, \tilde{E}$ Vektorbündel über M. Wir definieren die Whitney-Summe $E \oplus \tilde{E}$, die ein Vektorbündel über M sein wird, mit Fasern $(E\oplus\tilde{E})_y = E_y \oplus \tilde{E}_y$; also, als Menge

$$E\oplus\tilde{E} = \{(\sigma,\tilde{\sigma}) \in E\times\tilde{E} : \pi(\sigma) = \tilde{\pi}(\tilde{\sigma})\}$$

wobei $\pi, \tilde{\pi}$ die Projektionen von E bzw. $\tilde{E}$ sind. $E\oplus\tilde{E}$ hat die

Projektion $\pi_{E\oplus\tilde{E}}(\sigma,\tilde{\sigma}) = \pi(\sigma)$ und somit die Fasern $(E\oplus\tilde{E})_y = E_y \oplus \tilde{E}_y$, die dadurch zu Vektorräumen werden. Um jetzt aus $E\oplus\tilde{E}$ ein Vektorbündel zu machen, brauchen wir nur lokale Trivialisierungen (also Basisschnitte) mit C^∞-Übergangsfunktionen (vgl. S. 360–363; im Allgemeinen, um ein Vektorbündel zu definieren, braucht man die Menge E, die Basismannigfaltigkeit M, die Projektion $\pi : E \to M$, die Vektorraumstrukturen von fester Dimension m in den Fasern $\pi^{-1}(y) = E_y$ sowie eine Überdeckung von M mit offenen Mengen U und mit Abbildungen $e_1, \ldots, e_m : U \to E$, die $\pi \circ e_i = Id_U$ haben und in jedem Punkt y von U eine Basis von E_y

bilden, so daß, für ein anderes System $(U', e_{1'}, \ldots, e_{m'})$ aus dieser Überdeckung, $e_{i'} = A^i_{i'} e_i$, wobei $A^i_{i'}$ C^∞-Funktionen auf $U \cap U'$ sind). In einer offenen Menge $U \subset M$, wo E (bzw. $\tilde{E}$) Basisschnitte e_i (bzw. $\tilde{e}_\alpha$) zuläßt, bilden wir die Basisschnitte $(e_1, 0), \ldots, (e_m, 0), (0, \tilde{e}_1), \ldots, (0, \tilde{e}_{\tilde{m}})$ für $E \oplus E'$ ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, \tilde{m}$). Für zwei solche Systeme ist

$$(e_{i'}, 0) = A^i_{i'}(e_i, 0), \quad (0, \tilde{e}_{\alpha'}) = \tilde{A}^\alpha_{\alpha'}(0, \tilde{e}_\alpha)$$

($A^i_{i'}$, $\tilde{A}^\alpha_{\alpha'}$ sind Übergangsfunktionen für E, $\tilde{E}$), also sind auch die Übergangsfunktionen für $E\oplus\tilde{E}$ differenzierbar, und $E\oplus\tilde{E}$ ist ein Vektorbündel. Man hat injektive Bündelhomomorphismen $E \to E\oplus\tilde{E}$,

$\tilde{E} \to E \oplus \tilde{E}$, sowie surjektive Bündelhomomorphismen $E \oplus \tilde{E} \to E$, $E \oplus \tilde{E} \to \tilde{E}$ mit jeweils $\sigma \mapsto (\sigma, 0_{\pi(\sigma)})$, $\tilde{\sigma} \mapsto (0_{\tilde{\pi}(\tilde{\sigma})}, \tilde{\sigma})$, $(\sigma, \tilde{\sigma}) \mapsto \sigma$, $(\sigma, \tilde{\sigma}) \mapsto \tilde{\sigma}$, was man leicht in den beschriebenen Trivialisierungen feststellt.

__Beispiel__. Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über M mit Fasermetrik g, $\tilde{E} \subset E$ ein Unterbündel. Wir definieren die Teilmenge $\tilde{E}^{\perp} \subset E$ durch

$$\tilde{E}^{\perp} = \{\sigma \in E : \sigma \text{ } g\text{-orthogonal zu } \tilde{E}_y, \; y = \pi(\sigma)\}.$$

Dann

(i) $\tilde{E}^{\perp}$ ist ein Unterbündel von E

(ii) $E = \tilde{E} \oplus \tilde{E}^{\perp}$ im folgenden Sinn: es gibt einen Isomorphismus zwischen E und der abstrakten Whitney-

-Summe $\tilde{E} \oplus \tilde{E}^{\perp}$, bei dem die Inklusionen $\tilde{E}, \tilde{E}^{\perp} \to E$ den obengenannten injektiven Homomorphismen $\tilde{E}, \tilde{E}^{\perp} \to \tilde{E} \oplus \tilde{E}^{\perp}$ entsprechen.

__Beweis__. (i) Nach der äquivalenten Definition des Unterbündels (S. 507) brauchen wir nur Bedingung (ii) von S. 505 für $\tilde{E}^{\perp}$ zu prüfen (weil (i) trivial ist). Die Einschränkung von g auf $\tilde{E}$ bildet offenbar eine Fasermetrik $\tilde{g}$ in $\tilde{E}$. Für $y \in M$ können wir $\tilde{g}$-orthonormale Basisschnitte $e_1, \dots, e_k$ für $\tilde{E}$ wählen, die ihrerseits, in einer Umgebung von y, zu Basisschnitten $e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}, \dots, e'_m$ vervollständigt werden können. Wendet man darauf den Orthonormalisierungsprozeß, so erhält man g-orthonormale C^{∞}-Basisschnitte $e_1, \dots, e_m$

für E; nun sind $e_{k+1}, \dots, e_m$ C^∞-Basisschnitte von $\tilde{E}^\perp$. (ii) Für jedes $y \in M$, $E_y = \tilde{E}_y \oplus \tilde{E}_y^\perp$. q.e.d.

Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent:

(i) Es gibt ein triviales Bündel $\tilde{E}$ über M und einen injektiven Bündelhomomorphismus $F: E \to \tilde{E}$ (d.h. E ist mit einem Unterbündel eines trivialen Bündels isomorph).

(ii) Es gibt ein Bündel E' über M mit der Eigenschaft, daß $E \oplus E'$ trivial ist.

(iii) Es gibt ein triviales Bündel $\tilde{E}$ und einen surjektiven Bündelhomomorphismus $H: \tilde{E} \to E$.

Beweis. (i) $\to$ (ii): Das triviale Bündel $\tilde{E}$ besitzt eine Fasermetrik g. Also $\tilde{E} \cong F(E) \oplus F(E)^\perp \cong E \oplus E'$, weil $E \cong F(E)$, wobei $E' = F(E)^\perp$ ($\cong$ steht für einen Bündelisomorphismus). (ii) $\to$ (iii): Ist $\tilde{E} = E \oplus E'$ trivial, so nehmen wir für H die natürliche Projektion $E \oplus E' \to E$. (iii) $\to$ (i): Da H konstanten Rang hat, ist $\operatorname{Ker} H$ ein Unterbündel von $\tilde{E}$. Da $\tilde{E}$ eine Fasermetrik besitzt, haben wir das Komplement $(\operatorname{Ker} H)^\perp \subset \tilde{E}$ und $H: (\operatorname{Ker} H)^\perp \longrightarrow E$ ist offenbar ein Isomorphismus. Somit ist E mit einem Unterbündel von $\tilde{E}$ isomorph.

q.e.d.

SATZ 28. Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit M.

Dann gibt es ein Vektorbündel E' über M mit der Eigenschaft, daß $E \oplus E'$ trivial ist.

<u>Beweis</u> Wir brauchen nur (iii) von S. 515. Für $y \in M$ gibt es <u>globale</u> C^∞-Schnitte $e_1, \dots, e_m$, die in einer Umgebung U_y von y Basisschnitte sind (man multipliziere ein System von Basisschnitten mit einer Funktion, die einen kleinen Träger hat). Endlich viele der Mengen U_y, $y \in M$, überdecken die kompakte Mannigfaltigkeit M. Die Vereinigung der entsprechenden Systeme von Schnitten bildet ein System $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ mit der Eigenschaft, das für jedes $y \in M$ die Folge $\sigma_1(y), \dots, \sigma_N(y)$ eine Basis von E_y enthält. Nun sei

$\tilde{E} = M \times \mathbb{F}^N$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) das triviale Produktbündel. Die Abbildung $H: \tilde{E} \to E$ mit

$$H(y, a^1, \dots, a^N) = a^i \sigma_i(y),$$

$i = 1, \dots, N$, ist offenbar ein surjektiver Bündelhomomorphismus.

q. e. d.

LEMMA 28. Sei E ein m-dimensionales reelles Vektorbündel über einer n-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit M.

(i) Ist $n = m$, so läßt E einen C^∞-Schnitt σ zu, der nur endlich viele Nullstellen hat (d.h. die Menge $\{y \in M : \sigma(y) = 0_{\pi(y)}\}$ ist endlich).

(ii) Ist $n < m$, so ist E isomorph mit einer Whitney-Summe,

$$E \cong E^0 \oplus E'$$

wobei E^0 ein n-dimensionales Bündel und E' ein $(m-n)$-dimensionales triviales Bündel über M ist.

Beweis. Nach Satz 28 ist $E \oplus \tilde{E}$ trivial für ein geeignetes Bündel $\tilde{E}$ über M; d. h. wir können annehmen

$$E \oplus \tilde{E} = M \times \mathbb{R}^N.$$

Sei $F: M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ die Projektion. $M \times \mathbb{R}^N$ besitzt die konstante Fasermetrik g, deren Einschränkung auf $\tilde{E}$ auch eine Fasermetrik ist, so daß wir die kompakte Mannigfaltigkeit $\tilde{E}^1$ bilden können mit

$$\dim \tilde{E}^1 = N - m + n - 1$$

Sei $f: \tilde{E}^1 \to S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$

die Komposition von

$$\tilde{E}^1 \xrightarrow[\text{Inklusion}]{} (E \oplus \tilde{E})^1 = M \times S^{N-1} \xrightarrow[F]{} S^{N-1}.$$

Also, f ist C^∞-differenzierbar und, falls $n \leq m$, $\dim \tilde{E}^1 \leq N-1 = \dim S^{N-1}$, so daß f einen regulären Wert $\xi \in S^{N-1}$ besitzt (Folgerung 27); insbesondere ist $f^{-1}(\xi)$ endlich falls $m = n$ (Satz 27), bzw. leer falls $m > n$, weil dann $\dim \tilde{E}^1 < \dim S^{N-1}$! Man kann $\xi \in S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ als einen konstanten Schnitt in $M \times \mathbb{R}^N = E \oplus \tilde{E}$ betrachten. Sei σ das Bild von ξ unter der Projektion $E \oplus \tilde{E} \to E$; somit ist σ ein Schnitt von E. Ist $m = n$, so gibt es nur endlich viele $y \in M$ mit $\xi \in f(\tilde{E}^1_y)$, d.h. mit $\xi(y) \in \tilde{E}_y$ (jetzt wird ξ als Schnitt betrachtet), also nur endlich viele y mit $\sigma(y) = 0$, womit (i) bewiesen ist. Sei nun $m > n$. Dann ist $f^{-1}(\xi)$ leer, d.h., $\xi(y) \notin \tilde{E}_y$ für jedes $y \in M$ und somit $\sigma \neq 0$ überall. Offenbar ist $E_1 = \{\lambda\sigma(y) : \lambda \in \mathbb{R}, y \in M\} \subset E$ ein 1-dimensionales triviales Unterbündel und $E = E_1^\perp \oplus E_1$; $E_1^\perp$ hat die Faserdimension $m-1$. Ist auch $m - 1 > n$, so können wir dasselbe mit $E_1^\perp$ statt E wiederholen, und $E = (E_1 \oplus E_2)^\perp \oplus E_1 \oplus E_2$, wobei E_1, E_2

triviale reelle Geradenbündel sind. Nach endlich vielen Schritten erreichen wir somit Behauptung (ii).

q.e.d.

Sei nun V ein n-dimensionaler <u>orientierter</u> <u>reeller</u> Vektorraum mit einem festen Skalarprodukt ("ein orientierter euklidischer Raum"), $B \subset V$ ein Ball um O (worunter wir immer eine <u>offene</u> Kugel verstehen), $n \geq 2$. Sei S_ε eine in B enthaltene metrische $(n-1)$-dimensionale Sphäre um O, vom Radius $\varepsilon > 0$. Die Inklusion $S_\varepsilon \to B \setminus \{0\}$, sowie die Projektion $B \setminus \{0\} \to S_\varepsilon$ (mit $x \mapsto \varepsilon \frac{x}{|x|}$) sind zueinander inverse C^∞-Homotopie

Äquivalenzen. Da $H^{n-1}S_\varepsilon \approx \mathbb{R}$, ist auch $H^{n-1}(B\setminus\{0\}) \approx \mathbb{R}$. Außerdem ist S_ε kanonisch orientiert: wir nennen eine Basis $X_2,\dots,X_n$ von $T_y S_\varepsilon$ positiv orientiert, wenn $y, X_2,\dots,X_n$ eine positiv orientierte Basis in V ist. Somit besitzt $H^{n-1}S_\varepsilon$ das kanonische erzeugende Element Ω_{S_ε}. Das Bild von Ω_{S_ε} unter der Projektion $B\setminus\{0\} \to S_\varepsilon$ ist ein kanonisches erzeugendes Element $\Omega_B \in H^{n-1}(B\setminus\{0\})$. Dieses Ω_B ist offenbar von ε unabhängig, weil die radiale Projektion $S_\varepsilon \to S_{\varepsilon'}$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist (und somit die Fundamentalklassen erhält),

während ihre Komposition mit der Projektion $B\setminus\{0\} \to S_\varepsilon$ die Projektion $B\setminus\{0\} \to S_{\varepsilon'}$ ist. Sei nun $\tilde V$ ein anderer n-dimensionaler orientierter euklidischer Raum, $\tilde B \subset \tilde V$ ein Ball um 0, $F: B\setminus\{0\} \to \tilde B\setminus\{0\}$ eine C^∞-Abbildung. Wir definieren $\deg F \in \mathbb{R}$ durch

$$F^*\Omega_{\tilde B} = \deg F \cdot \Omega_B$$

Somit ist $\deg F$ der Grad der Komposition

$$S_\varepsilon \xrightarrow[\text{Inklusion}]{} B\setminus\{0\} \xrightarrow[F]{} \tilde B\setminus\{0\} \xrightarrow[\text{Projektion}]{} \tilde S_{\tilde\varepsilon}$$

($\tilde S_{\tilde\varepsilon}$ ist eine in $\tilde B$ enthaltene Sphäre um $0 \in \tilde V$), also $\deg F \in \mathbb{Z}$.

<u>Beispiele</u>. a) Seien B_1, B_2 zwei Bälle um 0 in demselben orientierten

euklidischen Raum V, $B_1 \subset B_2$.
Für die Inklusion $F: B_1 \setminus \{0\} \to B_2 \setminus \{0\}$ ist $\deg F = 1$. Tatsächlich ist, für $S_\varepsilon \subset B_1$, $\deg F$ der Grad von

$$S_\varepsilon \to B_1 \setminus \{0\} \to B_2 \setminus \{0\} \longrightarrow S_\varepsilon$$

also von der Identitätsabbildung.

b) Seien $B, \tilde{B}, \tilde{\tilde{B}}$ Bälle um O in orientierten n-dimensionalen euklidischen Räumen $V, \tilde{V}, \tilde{\tilde{V}}$ und seien $F: B \setminus \{0\} \to \tilde{B} \setminus \{0\}$, $G: \tilde{B} \setminus \{0\} \to \tilde{\tilde{B}} \setminus \{0\}$ C^∞-Abbildungen. Dann ist $\deg(G \circ F) = \deg G \cdot \deg F$, was sofort aus der Definition des Grades $\deg F$ folgt.

c) Seien $B, \tilde{B}, V, \tilde{V}$ wie oben, $B' \subset B$ ein kleinerer Ball um O in V. Für $F: B \setminus \{0\} \xrightarrow[C^\infty]{} \tilde{B} \setminus \{0\}$ stimmt der

Grad von F mit dem Grad der Einschränkung $F': B' \setminus \{0\} \to \tilde{B} \setminus \{0\}$ von F auf $B' \setminus \{0\}$ überein. Tatsächlich, dies folgt aus a) und b), weil F' die folgende Komposition ist:

$$B' \setminus \{0\} \xrightarrow[\text{Inklusion}]{} B \setminus \{0\} \xrightarrow[F]{} \tilde{B} \setminus \{0\}.$$

LEMMA 29. Seien $B, \tilde{B}$ Bälle um O in orientierten n-dimensionalen euklidischen Räumen $V, \tilde{V}$, $F: B \to \tilde{B}$ eine C^∞ Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $F^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

(ii) $dF_0 : V \to \tilde{V}$ ist ein orientierungstreuer linearer Isomorphismus.

Dann ist $\deg F = 1$.

Beweis. Nach Beispiel c) oben dürfen wir F auf einen kleineren Ball um 0 einschränken, ohne daß der Grad sich ändert; wegen (ii) dürfen wir also annehmen, daß F den Ball B diffeomorph auf eine Umgebung von 0 in $\tilde{B}$ abbildet.

1. Fall: Sei F linear (d. h. die Einschränkung von dF_0 auf B). Für Sphären $S_\varepsilon \subset B$, $S_{\tilde{\varepsilon}} \subset \tilde{B}$ um 0 ist die Komposition

$$S_\varepsilon \xrightarrow[\text{Inklusion}]{} B \setminus \{0\} \xrightarrow[F]{} \tilde{B} \setminus \{0\} \xrightarrow[\text{Projektion}]{} \tilde{S}_\varepsilon$$

offenbar ein orientierungstreuer Diffeomorphismus (da F die Geraden durch 0 auf die Geraden durch 0 abbildet), dessen Grad mit dem von F übereinstimmt, also $\deg F = 1$.

Allgemeiner Fall: Sei $A = dF_0$. Machen wir B so klein, daß $A(B) \subset \tilde{B}$. Für $t \in [0,1]$ definieren wir $F_t : B \to \tilde{B}$ durch $F_t(x) = (1-t)F(x) + tAx$.

Für $x \in B$ haben wir die Taylor-Formel $F(x) = F(x) - F(0) =$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(tx)\,dt = x^i \int_0^1 \partial_i F(tx)\,dt,$$

wobei x^i die i-te Komponente von x bezüglich einer festen Orthonormalbasis in V ist, also

$$F(x) = H(x) \cdot x$$

wobei $H(x) \cdot y = y^i \int_0^1 \partial_i F(tx)\,dt$,

d. h. $H : B \xrightarrow[C^\infty]{} \mathrm{Hom}(V, \tilde{V})$ und

$$H(0) = dF_0 = A.$$

Wir behaupten, daß man B so

klein wählen kann, daß $F_t(x) \neq 0$ für alle $x \in B \setminus \{0\}$ und $t \in [0,1]$. Sonst gibt es Folgen $t_m \in [0,1]$, x_m mit $0 \neq x_m \to 0$ (weil x_m in immer kleineren Bällen B_m liegen) und

$$0 = F_{t_m}(x_m) = (1-t_m)F(x_m) + t_m A x_m .$$

Da offenbar $t_m \neq 0, 1$, bedeutet dies, daß 0 zwischen $F(x_m) \neq 0$ und $Ax_m \neq 0$ liegt, also

$$(*) \qquad \frac{F(x_m)}{|F(x_m)|} = - \frac{Ax_m}{|Ax_m|} .$$

Sei $z_m = x_m / |x_m|$, also $x_m = \lambda_m z_m$, $|z_m| = 1$, $\lambda_m > 0$, $\lambda_m \to 0$. Wir dürfen annehmen, daß $z_m \to z$ mit $|z| = 1$, indem wir eine Teilfolge wählen. Nun ist, nach der Taylor-Formel $F(x) = H(x) \cdot x$ (S. 528),

$$\frac{F(x_m)}{|F(x_m)|} = \frac{H(x_m) \cdot \lambda_m z_m}{|H(x_m) \cdot \lambda_m z_m|} = \frac{\lambda_m H(x_m) z_m}{\lambda_m |H(x_m) z_m|} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{H(0) \cdot z}{|H(0) \cdot z|} = \frac{Az}{|Az|}$$

während $\dfrac{Ax_m}{|Ax_m|} = \dfrac{Az_m}{|Az_m|} \longrightarrow \dfrac{Az}{|Az|}$.

Dies ist mit der Gleichung $(*)$ unvereinbar, weil $Az = dF_0(z) \neq 0$ nach Voraussetzung (ii) ($|z| = 1$). Dieser Widerspruch beweist, daß man B so klein wählen kann, daß $F_t^{-1}(0) = \{0\}$ für alle $t \in [0,1]$. Dann bilden die Abbildungen $F_t : B \setminus \{0\} \to \tilde{B} \setminus \{0\}$ eine C^∞-Homotopie zwischen $F = F_0$ und $A = F_1$, also, F operiert auf H^{n-1} genauso wie A (Satz 24), insbesondere, $\deg F = \deg A$. Damit ist das Lemma bewiesen, weil $\deg A = 1$ nach dem 1. Fall.

q.e.d.

Den Grad haben wir bisher definiert für C^∞-Abbildungen zwischen punktierten (metrischen) Bällen um O in orientierten euklidischen Räumen der gleichen Dimension. Seien nun M, N orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit festen Punkten $y \in M$, $z \in N$, wobei N mit dem n-dimensionalen Ball (d.h. mit $\mathbb{R}^n$) diffeomorph ist, und sei F eine C^∞-Abbildung von einer punktierten Umgebung* von y nach $N \setminus \{z\}$.

Sei U eine Umgebung von y in M mit der Eigenschaft, daß $U \setminus \{y\}$ ganz im Definitionsbereich von F liegt.** Ist B die Einheitskugel um O im orientierten euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, und wählen

* d.h. in einer Umgebung von y ohne y selbst.

** und U mit dem n-dimensionalen Ball diffeomorph ist.

wir orientierungstreue Diffeomorphismen $\varphi: U \to B$, $\psi: N \to B$ mit $\varphi(y) = \psi(z) = 0$ (die letzte Bedingung ist leicht zu erreichen, weil B zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorph ist, wo man jeden Punkt auf jeden anderen durch einen orientierungstreuen Diffeomorphismus – z. B. Translation – abbilden kann). Für die Einschränkung $F: U \setminus \{y\} \to N \setminus \{z\}$ definieren wir den Grad $\deg_y F$ als den Grad der Komposition

$$B \setminus \{0\} \xrightarrow[\varphi^{-1}]{} U \setminus \{y\} \xrightarrow[F]{} N \setminus \{z\} \xrightarrow[\psi]{} B \setminus \{0\}.$$

Dies hat Sinn, weil B eine orientierte euklidische Kugel ist. Nun ist $\deg_y F$ von φ, ψ unabhängig: sind φ_1, ψ_1 Diffeomorphismen mit den gleichen Eigenschaften, so sind $\psi_1 \circ \psi^{-1}$, $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ orientierungstreue Diffeomorphismen der

Kugel B auf sich, die 0 in 0 abbilden, also Grad 1 haben (Lemma 29). Deshalb $\deg(\psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}) =$

$= \deg[(\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})] =$

$= \deg(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ (vgl. b), S. 525).

Somit hängt $\deg_y F$ nur von F (und vielleicht von $\mathcal{U}$) ab. In anderen Worten, wir haben $\deg_y F$ definiert im Fall wo $F: M \setminus \{y\} \to N \setminus \{z\}$ C^∞-differenzierbar ist und M mit der n-dimensionalen Kugel diffeomorph.

Ist P eine andere orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit,* $p \in P$, $F: M \setminus \{y\} \to N \setminus \{z\}$ und $G: N \setminus \{z\} \to P \setminus \{p\}$ differenzierbare Abbildungen, so ist der Grad "multiplikativ":

$$\deg_y(G \circ F) = \deg_z G \cdot \deg_y F,$$

was leicht aus b), S. 525, folgt.

* die mit dem n-dimensionaler Ball diffeomorph ist

Im Fall der Inklusionsabbildung $F: \mathcal{U} \setminus \{y\} \to N \setminus \{y\}$, wobei N n-dimensional und orientiert ist, $\mathcal{U}$ eine Umgebung von y in N (mit derselben Orientierung), und $N, \mathcal{U}$ beide mit dem Einheitsball $B \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorph, ist $\deg_y F = 1$. Wählt man nämlich φ, ψ wie in der Definition von $\deg_y F$, so erfüllt $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ die Voraussetzungen von Lemma 29 und somit $\deg_y F =$ $= \deg(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = 1$.

Seien nun M, N, y, z und F wieder wie auf S. 531, d. h. F nur in einer punktierten Umgebung von y definiert. Wir haben schon den Grad $\deg_y F/_{\mathcal{U}}$ der Einschränkung $F/_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \setminus \{y\} \to N \setminus \{z\}$ definiert, wobei $\mathcal{U}$ eine mit dem Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorphe Umgebung von y ist, für die $\mathcal{U} \setminus \{y\}$ im Definitionsbereich von F liegt. Jetzt zeigen wir, daß $\deg_y F|_{\mathcal{U}}$ von $\mathcal{U}$ nicht abhängt. Ist $\mathcal{U}'$ eine andere Umgebung mit den gleichen Eigenschaften, und zusätzlich mit $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, so ist $F|_{\mathcal{U}'}$ die Komposition

$$\mathcal{U}' \setminus \{y\} \xrightarrow[\text{Inklusion}]{} \mathcal{U} \setminus \{y\} \xrightarrow[F|_{\mathcal{U}}]{} N \setminus \{z\}$$

also, wegen der Multiplikativität des Grades, $\deg_y F|_{\mathcal{U}'} = \deg_y (\text{Inklusion}) \cdot \deg_y F|_{\mathcal{U}} = \deg_y F|_{\mathcal{U}}$ (vgl. S. 534). Ist nun $\mathcal{U}''$ eine beliebige Umgebung von y mit den gleichen Eigenschaften, so finden wir ein solches $\mathcal{U}'$ mit $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{U}''$ und somit

$\deg_y F|_{\mathcal{U}} = \deg_y F|_{\mathcal{U}'} = \deg_y F|_{\mathcal{U}''}$. In dieser Weise ist die Definition von $\deg_y F$ von $\mathcal{U}$ unabhängig.

Sei nun E ein orientiertes n-dimensionales reelles Vektorbündel über der orientierten Mannigfaltigkeit M der gleichen Dimension n. Sei $y_0 \in M$, σ ein in einer punktierten Umgebung von y_0 definierter C^∞-Schnitt von E, der überall in dieser punktierten Umgebung von Null verschieden ist (in y_0 braucht σ nicht mal einen Grenzwert zu haben; in vielen von uns betrachteten Fällen wird σ jedoch ein in einer Umgebung von y_0 definierter C^∞-Schnitt sein, der in y_0 eine isolierte Nullstelle hat). In einem solchen Fall sagen wir, daß σ in y_0

eine <u>isolierte</u> <u>Singularität</u> hat. Sei $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ eine Trivialisierung von E um y_0; U sei dabei so klein, daß $U \setminus \{y_0\}$ im Definitionsbereich von σ liegt. Nun ist, für $y \in U$, $\Phi(\sigma(y)) = (y, F(y)) = (y, F^1(y), \dots, F^n(y))$. Dabei erfüllen $M, y_0, N = \mathbb{R}^n, z = 0$ und F die Voraussetzungen von S. 531 und somit kann man $\deg_{y_0} F$ definieren (S. 534-536). Dabei ist $\mathbb{R}^n$ so orientiert, daß Φ auf den Fasern orientierungstreu ist. Wie wir wissen, ändert sich $\deg_{y_0} F$ nicht, wenn Φ auf eine kleinere Umgebung von y_0 eingeschränkt wird.

Sei nun Φ' eine andere Trivialisierung um y_0. Also $\Phi'(\sigma(y)) = (y, F'(y))$, wobei F' die Komponenten $F^{\alpha'}(y) = A^{\alpha'}_{\alpha}(y) F^{\alpha}(y)$

hat. Für y nahe y_0 liegt $[A^{\alpha'}_{\alpha}(y)]$ in der Gruppe $GL_+(n, \mathbb{R})$ der $(n\times n)$-Matrizen mit positiver Determinante (weil wir nur orientierungstreue Trivialisierungen betrachten), die eine offene Menge im Vektorraum aller $(n\times n)$-Matrizen bildet. Wir behaupten, daß $\deg_{y_0} F = \deg_{y_0} F'$; dabei können wir bekanntlich unser U beliebig verkleinern. Sei U so klein, daß für $y \in U$ alle Matrizen $[A^{\alpha'}_{\alpha}(y)]$ in einer <u>konvexen</u> Umgebung von $[A^{\alpha'}_{\alpha}(y_0)]$ in $GL_+(n, \mathbb{R})$ liegen.

Für $t \in [0,1]$ definiert die Formel
$$F^{\alpha'}_t(y) = \big((1-t)A^{\alpha'}_{\alpha}(y) + t A^{\alpha'}_{\alpha}(y_0)\big)F^{\alpha}(y)$$
eine Abbildung $F_t : U \setminus \{y_0\} \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Somit haben wir eine C^∞-Homotopie zwischen $F_0 = F'$ und $F_1 = A \circ F$, wobei A der von $[A_\alpha^{\alpha'}(y_0)]$ dargestellte Automorphismus von $\mathbb{R}^n$ ist. Da $\det A > 0$, ist $\deg_0 A = 1$ (Lemma 29), also, wegen der offenbaren C^∞-Homotopie-Invarianz des Grades, $\deg_{y_0} F' = \deg_{y_0}(A \circ F) = \deg_0 A \cdot \deg_{y_0} F = \deg_{y_0} F$.

Also, $\deg_{y_0} F$ ist von der Trivialisierung unabhängig; somit ist es eine Invariante des Schnitts σ, die wir den Index von σ in der isolierten Singularität y_0 nennen:

$$\operatorname{Index}_{y_0} \sigma = \deg_{y_0} F \in \mathbb{Z}$$

wobei $\sigma(y) \sim (y, F(y))$ bezüglich einer lokalen Trivialisierung von E um y_0.

Der Index von σ in y_0 bleibt unverändert, wenn man σ mit einer positiven C^∞-Funktion f multipliziert (dies ist eigentlich ein Spezialfall unseres Arguments für die Trivialisierungsinvarianz, mit $A_\alpha^{\alpha'}(y) = f(y) \cdot \delta_\alpha^{\alpha'}$)*. Insbesondere, bei einer Fasermetrik g in E, kann man σ immer durch den Normierten Schnitt $\sigma/|\sigma|$ ersetzen:

$$\operatorname{Index}_{y_0} \sigma = \operatorname{Index}_{y_0} \frac{\sigma}{|\sigma|}.$$

Für die Definition des Index (bzw. des Grades) sind die festen Orientierungen wesentlich: wenn man das Bündel E oder die Basis M umorientiert, ändert $\operatorname{Index}_{y_0}\sigma$ sein Vorzeichen. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn $E = TM$ das Tangentialbündel der Mannigfal-

---

* Im Gegensatz zur allgemeinen Konvention werden hier die Indizes α und α' aus technischen Gründen miteinander gemischt

tigkeit M ist. Die obige Konstruktion erlaubt nämlich den Index eines Vektorfeldes auf M (oder auf einer punktierten Umgebung der isolierten Singularität) zu definieren, auch wenn M nicht orientierbar ist: lokal, gibt es in M Orientierungen, und, wenn man sie ändert, werden die Fasern gleichzeitig mit der Basis umorientiert, so daß der Index unverändert bleibt.

Beispiel. Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, X ein Killingfeld auf M mit einer isolierten Nullstelle y. Für jede Geodätische $t \mapsto \gamma(t)$ in M ist, nach der Leibniz-Regel, $\frac{d}{dt} g(X,\dot\gamma) =$

$= g(\nabla_{\dot\gamma} X, \dot\gamma) = 0$, weil $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ und ∇X schief-symmetrisch ist; also, die Funktion $t \mapsto g(X(\gamma(t)), \dot\gamma(t))$ ist konstant. Ist γ eine Geodätische durch y, so haben wir deshalb $X \perp \dot\gamma$ längs γ. Nach dem Lemma von Gauß bildet X also ein Tangentialfeld auf jeder kleinen metrischen Sphäre um y.

a) Ist n ungerade, so darf kein Killingfeld auf (M,g) isolierte Nullstellen besitzen, weil sonst die kleinen geradedimensionalen metrischen Sphären um so eine Nullstelle y C^∞ Vektorfelder ohne Nullstellen zulassen würden (vgl. S. 470).

b) Ist n gerade, so kann es wohl Killingfelder mit isolierten Nullstellen geben. Z.B. im flachen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{n/2}$ definiert die Formel* $\mathbb{C}^{n/2} \ni y \longmapsto iy \in \mathbb{C}^{n/2} = T_y\mathbb{R}^n$ so ein Killingfeld X mit der einzigen Nullstelle in 0. Der Fluß von X ist die 1-Parameter-Gruppe φ_t von Isometrien mit $\varphi_t(y) = e^{it}\cdot y$.

c) Ist $n=2$, so darf ein Killing-Feld X, das nicht identisch verschwindet, nur isolierte Nullstellen haben. Sei nämlich $y \in M$ mit $X(y)=0$ und wählen wir einen kleinen metrischen Ball $\mathcal{U}$ um y, wo man beliebige zwei Punkte mit einer einzigen minimisierenden Geodätischen in M verbinden kann, die ganz in $\mathcal{U}$ liegt. Nehmen wir an, daß es $z \in \mathcal{U}$

---

* Komplexe Multiplikation mit i

gibt mit $z \neq y$, $X(z)=0$ und sei φ_t der Fluß von X. Die Isometrien $\varphi_t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert (man sieht sofort, wie sie auf Geodätischen durch y operieren). Also, $\varphi_t(y)=y$, $\varphi_t(z)=z$ für alle t. Die einzige y und z verbindende minimisierende Geodätische muß nun aus Fixpunkten eines jeden φ_t bestehen, weil ihr φ_t-Bild eine Geodätische mit den gleichen Eigenschaften ist. Das Differential $(d\varphi_t)_y : T_yM \to T_yM$ ist eine orientierungstreue lineare Isometrie des zwei-dimensionalen Raumes T_yM, die einen von Null verschiedenen Fixpunkt hat (den Tangentialvektor unserer Geodätischen). Somit ist $(d\varphi_t)_y = \mathrm{Id}_{T_yM}$ für jedes t. Da die Isometrie φ_t durch $\varphi_t(y)$ und $(d\varphi_t)(y)$ eindeutig bestimmt ist, ist $\varphi_t = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$ für jedes t, also $X=0$ überall in $\mathcal{U}$. Ein einfaches topologisches Argument zeigt nun, daß $X = 0$ identisch in M. Ist also X nicht identisch Null, so darf die obige Umgebung U der Nullstelle y keine anderen Nullstellen von X enthalten.

d) Sei X ein Killing-Feld auf (M, g) mit der isolierten Nullstelle y (also muß n gerade sein), U ein kleiner Ball um y wie in c). Wir behaupten, daß

$$\mathrm{Index}_y X = 1$$

(was bekanntlich von der Orientierbarkeit von M nicht abhängt, vgl. S. 541). Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{Index}_y \frac{X}{|X|} = 1$ (S. 540). Sei ρ das Einheitsvektorfeld in $U \setminus \{y\}$, daß jedem z den Tangentialvektor der y mit z verbindenden kürzesten Geodätischen zuordnet. Da in jedem Punkt von $U \setminus \{y\}$ ρ und $\frac{X}{|X|}$ orthogonal sind (S. 542), müssen die Felder ρ und $\frac{X}{|X|}$

in $U \setminus \{y\}$ C^∞-homotop sein, wobei die Homotopie aus Einheitsvektorfeldern in $U \setminus \{y\}$ besteht (z. B. $\rho_t = \cos 2\pi t \cdot \rho + \sin 2\pi t \cdot \frac{X}{|X|}$, $t \in [0, 1]$). Also, nach der Definition des Index, $\mathrm{Index}_y X = \mathrm{Index}_y \frac{X}{|X|} = \mathrm{Index}_y \rho$. In normalen Koordinaten um y (die gleichzeitig eine lokale Trivialisierung für TM liefern) sieht ρ wie die folgende Abbildung F des n-dimensionalen Balles $B \subset \mathbb{R}^n$ um 0 nach $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aus: $B \ni x \xrightarrow[F]{} \frac{x}{|x|} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, also $\mathrm{Index}_y \rho = \deg F = 1$.

<u>Weitere</u> <u>Operationen</u> <u>auf</u> <u>Vektorbündeln</u>:

a) Die Konstruktion des Dualen. Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M.

Wir definieren das <u>duale</u> Bündel E^* zu E über derselben Mannigfaltigkeit M, dessen Faser in $y \in M$ der duale Raum zu E_y ist: $(E^*)_y = (E_y)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E_y, \mathbb{F})$, wobei $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Somit haben wir E^* als Menge definiert (E^* ist die disjunkte Vereinigung der obigen $(E^*)_y$), mit der Projektion $\pi: E^* \to M$ ($\pi((E^*)_y) = \{y\}$), und mit den Vektorraumstrukturen der einzelnen Fasern $E^*_y = (E^*)_y$. Was wir noch brauchen, sind lokale Basisschnitte für E^* mit C^∞-Übergangsfunktionen (vgl. S. 511). Seien nun $e_1, \dots, e_m$ beliebige lokale C^∞-Basisschnitte für E, definiert in einer offenen Menge $U \subset M$. In jedem $y \in U$ bilden wir die zu $e_1(y), \dots, e_m(y)$ duale Basis $e^1(y), \dots$

$\dots, e^m(y)$ von $E^*_y = (E_y)^*$; somit entstehen Basisschnitte für E^* über U. Sind e_α, $e_{\alpha'}$ zwei Systeme von lokalen C^∞-Basisschnitten für E mit C^∞-Übergangsfunktionen $A^\alpha_{\alpha'}$: $e_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} e_\alpha$, so gilt offenbar $e^\alpha = A^\alpha_{\alpha'} e^{\alpha'}$. Damit wird E^* zu einem Vektorbündel über M.

b) Das Tensorprodukt. Zunächst wiederholen wir uns eine der möglichen Definitionen des Tensorprodukts $V \otimes W$ zweier <u>endlich-dimensionaler</u> Vektorräume V, W über $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$):

$$V \otimes W = L(V^*, W^*; \mathbb{F}),$$

d. h. $V \otimes W$ ist der Vektorraum aller $\mathbb{F}$-bilinearen Abbildungen $V^* \times W^* \to \mathbb{F}$. Für $v \in V$, $w \in W$ definieren wir auch $v \otimes w \in V \otimes W$ durch $(v \otimes w)(\varphi, \psi) =$

$= \varphi(v)\psi(w)$ für $\varphi \in V^*$, $\psi \in W^*$.
Diese Tensormultiplikation $V \times W \ni (v,w) \mapsto$
$\mapsto v \otimes w \in V \otimes W$ ist offenbar bilinear.
Sind v_i, w_α ($i = 1, \dots, \dim V$; $\alpha = 1, \dots$
$\dots, \dim W$) beliebige Basen von V bzw. von W, so ist das System

$$\{v_i \otimes w_\alpha\}_{1 \le i \le \dim V;\ 1 \le \alpha \le \dim W}$$

eine Basis von $V \otimes W$ (und somit $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$). Ist nämlich $a \in V \otimes W$ und v^i, w^α die zu v_i bzw. w_α dualen Basen von V^* bzw. W^*, so $a = a^{i\alpha} v_i \otimes w_\alpha$, wobei $a^{i\alpha} = a(v^i, w^\alpha)$, was man leicht feststellt, indem man die beiden Seiten auf (v^j, w^β) anwendet. Genauso sieht man, daß die $v_i \otimes w_\alpha$ linear unabhängig sind. Genauso definiert man das Tensorprodukt

$$\underset{1}{V} \otimes \dots \otimes \underset{k}{V} = L(\underset{1}{V^*}, \dots, \underset{k}{V^*}; \mathbb{F})$$

(d. h. den Raum der k-linearen Abbildungen $\underset{1}{V^*} \times \dots \times \underset{k}{V^*} \to \mathbb{F}$) von k Vektorräumen $\underset{1}{V}, \dots, \underset{k}{V}$ über $\mathbb{F}$ mit der k-linearen Tensormultiplikation $\underset{1}{V} \times \dots \times \underset{k}{V} \ni (\underset{1}{v}, \dots, \underset{k}{v}) \mapsto$
$\mapsto \underset{1}{v} \otimes \dots \otimes \underset{k}{v} \in \underset{1}{V} \otimes \dots \otimes \underset{k}{V}$, wobei
$\underset{1}{v} \otimes \dots \otimes \underset{k}{v}\,(\overset{1}{\varphi}, \dots, \overset{k}{\varphi}) = \overset{1}{\varphi}(\underset{1}{v}) \cdot \ldots \cdot \overset{k}{\varphi}(\underset{k}{v})$ für
$\overset{i}{\varphi} \in \underset{i}{V^*}$, $i = 1, \dots, k$, und man stellt fest, daß für Basen v_{α_i} von $\underset{i}{V}$ das System $\{ v_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes v_{\alpha_k} \}$ eine Basis von $\underset{1}{V} \otimes \dots \otimes \underset{k}{V}$ bildet. Die Tensormultiplikation ist kommutativ und assoziativ im folgenden Sinn: es gibt Isomorphismen $V \otimes W \to W \otimes V$, $V \otimes (W \otimes U) \to$
$\to (V \otimes W) \otimes U$ mit $v \otimes w \to w \otimes v$,
$v \otimes (w \otimes u) \to (v \otimes w) \otimes u$ für beliebige $v \in V$, $w \in W$, $u \in U$ (man definiert diese Isomorphismen zunächst auf festen Basen der obigen Gestalt, und stellt fest

daß sie die obigen Bedingungen für beliebige v, w, u erfüllen). Ebenso gibt es z. B. einen Isomorphismus $V\otimes(W\otimes U)\to V\otimes W\otimes U$ mit $v\otimes(w\otimes u)\to v\otimes w\otimes u$ usw.

Seien nun $E, \tilde{E}$ Vektorbündel über M. Wir definieren das Tensorprodukt $E\otimes\tilde{E}$ über M mit den Fasern $(E\otimes\tilde{E})_y = E_y\otimes\tilde{E}_y$. Für lokale C^∞-Basisschnitte $e_\alpha, \tilde{e}_i$ für E bzw. $\tilde{E}$ haben wir die Basisschnitte $e_\alpha\otimes\tilde{e}_i$ für $E\otimes\tilde{E}$. Sind $e_{\alpha'}, \tilde{e}_{i'}$ andere solche Basisschnitte mit C^∞-Übergangsfunktionen $A^\alpha_{\alpha'}, \tilde{A}^i_{i'}$: $e_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} e_\alpha$, $\tilde{e}_{i'} = A^i_{i'} e_i$, so sind die Übergangsfunktionen zwischen $e_\alpha\otimes\tilde{e}_i$ und $e_{\alpha'}\otimes\tilde{e}_{i'}$ ebenfalls C^∞-differenzierbar:

$$e_{\alpha'}\otimes\tilde{e}_{i'} = A^\alpha_{\alpha'}\tilde{A}^i_{i'}\, e_\alpha\otimes\tilde{e}_i\,;$$

somit haben wir das Vektorbündel $E\otimes\tilde{E}$ de-

finiert. Für C^∞-Schnitte σ von E, $\tilde{\sigma}$ von $\tilde{E}$ ist $\sigma\otimes\tilde{\sigma}$ ein C^∞-Schnitt von $E\otimes\tilde{E}$. Ebenso definieren wir Tensorprodukte $\underset{1}{E}\otimes\ldots\otimes\underset{k}{E}$ von k Bündeln über M und es gibt kanonische Isomorphismen

$$E\otimes(\tilde{E}\otimes\tilde{\tilde{E}}) \cong E\otimes\tilde{E}\otimes\tilde{\tilde{E}} \cong (E\otimes\tilde{E})\otimes\tilde{\tilde{E}}.$$

Für Bündel $E, \tilde{E}$ über M ist die Faser $(E^*\otimes\tilde{E})_y = E^*_y\otimes\tilde{E}_y$ kanonisch mit $\mathrm{Hom}(E_y, \tilde{E}_y)$ isomorph; somit schreiben wir $E^*\otimes\tilde{E} = \mathrm{Hom}(E, \tilde{E})$. Die C^∞-Schnitte von $\mathrm{Hom}(E, \tilde{E})$ können als Bündelhomomorphismen $E\to\tilde{E}$ angesehen werden.

Operationen auf Vektorbündeln mit Fasermetriken.

a) Die Whitney-Summe. Seien $E, \tilde{E}$ reelle oder komplexe Vektorbündel über M mit Fasermetriken $g, \tilde{g}$. In $E\oplus\tilde{E}$ entsteht nun die Fasermetrik $g\oplus\tilde{g}$

mit $(g\oplus\tilde g)((\sigma,\tilde\sigma),(\tau,\tilde\tau)) = g(\sigma,\tau)+\tilde g(\tilde\sigma,\tilde\tau)$ für $y\in M$, $\sigma,\tau\in E_y$, $\tilde\sigma,\tilde\tau\in\tilde E_y$. Sind e_α, $\tilde e_i$ lokale C^∞-Basisschnitte für E bzw. $\tilde E$, so sind $e_\alpha=(e_\alpha,0)$, $\tilde e_i=(0,\tilde e_i)$ lokale C^∞-Basisschnitte für $E\oplus\tilde E$ und $(g\oplus\tilde g)(e_\alpha,e_\beta)=g_{\alpha\beta}$, $(g\oplus\tilde g)(e_\alpha,\tilde e_i) = (g\oplus\tilde g)(\tilde e_i,e_\alpha)=0$, $(g\oplus\tilde g)(\tilde e_i,\tilde e_j)=\tilde g_{ij}$; somit ist $g\oplus\tilde g$ tatsächlich eine (C^∞-differenzierbare) Fasermetrik.

b) Das duale Bündel. Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über M mit einer Fasermetrik g. Es ist klar, daß g dadurch entsteht, daß man in jedem System e_α von C^∞-Basisschnitten (aus einem festen Atlas von solchen Systemen) die C^∞-Komponentenfunktionen $g_{\alpha\beta}=g(e_\alpha,e_\beta)$ von g vorschreibt, die der Transformationsregel $g_{\alpha'\beta'} =$

$= A^\alpha_{\alpha'}\overline{A^\beta_{\beta'}}g_{\alpha\beta}$ genügen sollen, falls $e_{\alpha'}=A^\alpha_{\alpha'}e_\alpha$ (und dabei $g_{\beta\alpha}=\overline{g_{\alpha\beta}}$, während die Matrix $[g_{\alpha\beta}]$ positiv definit ist). Seien nun e_α gegeben. Wir definieren $[g^{\alpha\beta}]$ als die Inverse Matrix zu $[\overline{g_{\alpha\beta}}]$:

$$g^{\alpha\gamma}\overline{g_{\gamma\beta}} = \overline{g_{\beta\gamma}}\,g^{\gamma\alpha}=\delta^\alpha_\beta.$$

Durch jede dieser Gleichungen (z. B. $\overline{g_{\beta\gamma}}\,g^{\gamma\alpha}=\delta^\alpha_\beta$) ist $g^{\gamma\alpha}$ eindeutig bestimmt. Nun ist $g^{\gamma\alpha}=\overline{g^{\alpha\gamma}}$, weil $\overline{g^{\gamma\alpha}}\,\overline{g_{\gamma\beta}} = \overline{g^{\gamma\alpha}}\,g_{\beta\gamma} = \overline{\overline{g_{\beta\gamma}}\,g^{\gamma\alpha}} = \overline{\delta^\alpha_\beta} = \delta^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma}\overline{g_{\gamma\beta}}$. Für andere Basisschnitte $e_{\alpha'}$ mit $e_{\alpha'}=A^\alpha_{\alpha'}e_\alpha$ ist $e^{\alpha'}=A^{\alpha'}_\alpha e^\alpha$ (S. 548) und $g^{\alpha'\beta'} = A^{\alpha'}_\alpha\overline{A^{\beta'}_\beta}\,g^{\alpha\beta}$, weil $A^{\alpha'}_\alpha\overline{A^{\gamma'}_\gamma}\,g^{\alpha\gamma}\,\overline{g_{\gamma'\beta'}} = A^{\alpha'}_\alpha\overline{A^{\gamma'}_\gamma}\,g^{\alpha\gamma}\,\overline{A^\rho_{\gamma'}}A^\tau_{\beta'}\,\overline{g_{\rho\tau}} = A^{\alpha'}_\alpha A^\tau_{\beta'}\,g^{\alpha\rho}\,\overline{g_{\rho\tau}} = A^{\alpha'}_\alpha A^\tau_{\beta'}\,\delta^\alpha_\tau = \delta^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\alpha'\gamma'}\overline{g_{\gamma'\beta'}}$. Also, die $g^{\alpha\beta}$ werden die lokalen Komponenten einer Fasermetrik g^* in E^* sein, falls wir feststellen können, daß die durch $g^{\alpha\beta}$ in jeder Faser definierte sesquilineare Hermitesche Abbildung positiv definit ist. Dies ist der Fall, weil für jedes g-orthonormale System von Basisschnitten e_α in E ($g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$), die Schnitte e^α in E^* g^*-orthonormal sind ($g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$); diese letzte Bedingung liefert auch eine "koordinatenfreie" Definition von g^*. Statt g^* schreibt man oft auch g.

c) Das Tensorprodukt. Seien $E, \tilde{E}$ reelle oder komplexe Vektorbündel mit Fasermetriken $g, \tilde{g}$ über M. Wir behaupten, daß es in $E \otimes \tilde{E}$ genau eine Fasermetrik $g \otimes \tilde{g}$ gibt mit $(g\otimes\tilde{g})(\sigma\otimes\tilde{\sigma}, \tau\otimes\tilde{\tau}) =$

$= g(\sigma,\tau)\cdot g(\tilde{\sigma},\tilde{\tau})$. Dazu wählen wir Basisschnitte e_α für E, $\tilde{e}_i$ für $\tilde{E}$ und setzen

$$(g\otimes\tilde{g})_{(\alpha i)(\beta j)} = (g\otimes\tilde{g})(e_\alpha\otimes\tilde{e}_i, e_\beta\otimes\tilde{e}_j) = g_{\alpha\beta}\cdot\tilde{g}_{ij}.$$

Für andere Basisschnitte $e_{\alpha'} = A^{\alpha}_{\alpha'} e_\alpha$, $\tilde{e}_{i'} = \tilde{A}^{i}_{i'}\tilde{e}_i$ ist $e_{\alpha'}\otimes\tilde{e}_{i'} = A^{\alpha}_{\alpha'}\tilde{A}^{i}_{i'}\, e_\alpha\otimes\tilde{e}_i$, während

$$(g\otimes\tilde{g})_{(\alpha'i')(\beta'j')} = A^{\alpha}_{\alpha'}\tilde{A}^{i}_{i'}\,\overline{A^{\beta}_{\beta'}\tilde{A}^{j}_{j'}}\,(g\otimes\tilde{g})_{(\alpha i)(\beta j)}$$

tatsächlich die richtige Transformationsregel hat und $(g\otimes\tilde{g})(\sigma\otimes\tilde{\sigma}, \tau\otimes\tilde{\tau}) = g(\sigma,\tau)g(\tilde{\sigma},\tilde{\tau})$ erfüllt. Aus der letzten Gleichung folgt auch, daß $g\otimes\tilde{g}$ in jeder Faser Hermitesch und positiv definit ist. Für Schnitte a, b von $E\otimes\tilde{E}$ ist $a = a^{\alpha i} e_\alpha\otimes\tilde{e}_i$, $b = b^{\alpha i} e_\alpha\otimes\tilde{e}_i$ mit $a^{\alpha i} = a(e^\alpha, \tilde{e}^i)$ und somit $(g\otimes\tilde{g})(a,b) = (g\otimes\tilde{g})_{(\alpha i)(\beta j)}\, a^{\alpha i}\,\overline{b^{\beta j}} =$
$= g_{\alpha\beta}\,\tilde{g}_{ij}\, a^{\alpha i}\,\overline{b^{\beta j}}$.

<u>Bemerkung</u>. Da die Bündel E und E^* über M die gleiche Faserdimension

haben, entsteht die Frage, ob sie nicht isomorph sein müssen.

a) Für ein <u>reelles</u> Bündel E sind E und E^* immer isomorph. Setzen wir (aus rein technischen Gründen) voraus, daß M kompakt ist; somit besitzt E eine Fasermetrik g. Den Isomorphismus $\Phi : E \to E^*$ definieren wir durch $(\Phi(\sigma))(\tau) = g(\sigma, \tau)$, d.h. bezüglich zueinander dualer lokaler Basisschnitte in E und E^*, $\Phi(\sigma)_\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma^\beta$, oder $\Phi(\sigma) = g_{\alpha\beta}\sigma^\beta e^\alpha$.

b) Für ein <u>komplexes</u> Bündel E sind E und E^* nicht immer isomorph.

Sei z.B. E ein komplexes Geradenbündel (d.h. mit Faserdimension 1). Dann ist $E \cong E^*$ genau dann, wenn E ein reelles 1-dimensionales Unterbündel enthält (M wieder kompakt).

Zunächst sei $\Phi : E \to E^*$ ein Isomorphismus. Für $y \in M$ sei $\tilde{E}_y = \{\sigma \in E_y : (\Phi(\sigma))(\sigma) \in [0, \infty)\}$. $\tilde{E}_y$ ist eine reelle Gerade in E_y: aus $\sigma \in \tilde{E}_y$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt sofort $\lambda\sigma \in \tilde{E}_y$ und, umgekehrt, für ein festes $\sigma_0 \in \tilde{E}_y \setminus \{0\}$ (es muß existieren, weil die quadratische Abbildung $E_y \ni \sigma \longmapsto (\Phi(\sigma))(\sigma) \in \mathbb{C}$ surjektiv ist) und jedes $\sigma \in \tilde{E}_y$ ist $\sigma = \lambda\sigma_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, woher $\lambda^2 \in [0, \infty)$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$. Man kann leicht prüfen, daß $\tilde{E} = \bigcup_{y \in M} \tilde{E}_y$ tatsächlich ein reelles Unterbündel von E ist. Sei nun $E = TS^2$ das Tangentialbündel der zweidimensionalen Sphäre S^2. E ist ein zweidimensionales orientierbares reelles Vektorbündel. Wählt man in E eine feste Orientierung (Drehungssinn) und eine feste Fasermetrik g, so kann man aus E ein eindimensionales komplexes Vektorbündel machen, wozu genügt, in jeder Faser

E_y von E die Multiplikation mit der komplexen Zahl i zu definieren, d.h. einen $\mathbb{R}$-linearen Endomorphismus J von E_y mit $J \circ J = -\mathrm{Id}_{E_y}$. So ein J kann man als die Drehung um $90°$ in der positiven Richtung definieren. Also, für eine positiv orientierte g-Orthonormalbasis e_1, e_2 von E_y, $Je_1 = e_2$, $Je_2 = -e_1$; dies ist von e_1, e_2 unabhängig, weil eine andere Basis $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ der gleichen Art wie $\tilde{e}_1 = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2$, $\tilde{e}_2 = -\sin\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2$ aussehen muß, woher $J\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2$, $J\tilde{e}_2 = -\tilde{e}_1$. Ist nun unser e_1, e_2 ein System von positiv orientierten g-orthonormalen lokalen C^∞-Schnitten von E, so sehen wir, daß J C^∞-differenzierbar von y abhängt. Wir haben also folgendes bewiesen: *jedes orientierte zweidimensio-*

nale reelle Vektorbündel mit einer festen Fasermetrik wird, nach der obigen Konstruktion, kanonisch zu einem komplexen Geradenbündel. Für das komplexe Geradenbündel $E = TS^2$ sind E und E^* *nicht isomorph*, weil TS^2 kein reelles Geradenbündel $\tilde{E}$ enthalten darf: für jede Zusammenhangskomponente Y des Einheitssphärenbündels $\tilde{E}^1$ von $\tilde{E}$ müßte dann die Bündelprojektion $\pi : Y \to S^2$ eine Überlagerung sein, also ein Diffeomorphismus (da S^2 einfach zusammenhängend ist), d.h. S^2 würde ein stetiges Feld von Einheitstangentialvektoren zulassen, was unmöglich ist (S. 376 oder S. 470).

Umgekehrt, sei E ein komplexes Geradenbündel, das ein 1-dimensionales reelles Unterbündel $\tilde{E}$ enthält. Wählen wir in $\tilde{E}$ eine Fasermetrik (M sei kompakt). Nun definieren wir einen Isomorphismus $\Phi: E^* \to E$ durch $\Phi(v) = v(\sigma)\sigma$, wobei σ ein lokaler C^∞-Einheitsschnitt von $\tilde{E}$ ist. Da σ bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt ist, ist Φ von σ unabhängig und somit global definiert; man sieht leicht, daß Φ tatsächlich ein Isomorphismus ist.

Zusammenhänge in Vektorbündeln.

Sei E ein reelles (bzw. komplexes) Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M. Unter einem Zusammenhang in E verstehen wir eine Abbildung ∇, die jedem C^∞-Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ auf M und jedem C^∞-Schnitt $\sigma \in \Gamma(E)$ von E einen neuen Schnitt $\nabla_X \sigma \in \Gamma(E)$ zuordnet (von nun an werden wir, für jedes

Vektorbündel E, mit $\Gamma(E)$ den Vektorraum aller C^∞-Schnitte von E bezeichnen), so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\nabla_{X+Y}\sigma = \nabla_X \sigma + \nabla_Y \sigma$,

$\nabla_X(\sigma+\tau) = \nabla_X\sigma + \nabla_X\tau$

für $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$

(ii) $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$ für $X \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(E)$ und für jede reellwertige C^∞-Funktion f auf M

(iii) Die Leibniz-Regel:

$$\nabla_X(f\sigma) = Xf\cdot\sigma + f\nabla_X\sigma$$

für $X \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(E)$ und für jede reell- (bzw. komplexwertige) Funktion f auf M. Dabei steht Xf für die gewöhnliche Ableitung von f nach X

und $Xf = X(\mathrm{Re} f) + i\, X(\mathrm{Im} f)$.

Für $E = TM$ sind die Zusammenhänge in E also nichts anderes als die uns schon bekannten Zusammenhänge auf M. Wie in jenem Fall beweist man, daß für einen Zusammenhang ∇ im Bündel E über M sowie für $X \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(E)$ und $y \in M$, der Wert von $\nabla_X \sigma$ in y hängt nur vom Wert des Vektorfeldes X in y und vom Verhalten des Schnitts σ in einer beliebig kleinen Umgebung von y ab. Somit kann man $\nabla_X \sigma$ auch dann definieren, wenn σ nicht auf ganz M, sondern in einer offenen Teilmenge $U \subset M$ definiert ist (und $X \in \Gamma(TU)$); der Schnitt $\nabla_X \sigma$ ist in diesem Fall

nur in U definiert. Für $\sigma \in \Gamma(E)$ bildet man auch die <u>kovariante Ableitung</u>

$$\nabla\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes E) = \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, E))$$

mit $(\nabla\sigma)(X, \psi) = \psi(\nabla_X \sigma)$ für $X \in T_yM$, $\psi \in E_y^*$, $y \in M$.

Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über M, g eine Fasermetrik in E. Ein Zusammenhang ∇ in E heißt <u>metrisch bezüglich</u> g (mit g verträglich) wenn, für beliebige $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$, $X \in \Gamma(TM)$,

$$X(g(\sigma, \tau)) = g(\nabla_X \sigma, \tau) + g(\sigma, \nabla_X \tau)$$

(die Leibniz-Regel für die "Multiplikation" g).

Sei ∇ ein Zusammenhang im reellen oder komplexen Vektorbündel E über M. Ist $U \subset M$ eine offene Teilmenge, auf welcher es gleichzeitig ein Koordinatensystem (x^i) für M sowie eine Trivialisierung, d. h. ein System von lokalen C^∞-Basisschnitten (e_α) für E gibt, so definiert man die <u>lokalen Komponenten</u> $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}$ des Zusammenhanges ∇ bezüglich der (x^i) und der (e_α) durch die Formel

$$\nabla_{\partial_i} e_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_\beta .$$

Somit sind die $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}$ reell- (bzw. komplexwertige) C^∞-Funktionen auf U, die den Zusammenhang ∇ "in U" vollständig bestimmen: ist $X \in \Gamma(TU)$ und σ ein auf U definierter C^∞-Schnitt von E, also $X = X^i \partial_i$, $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$, so $\nabla_X \sigma = X^i \nabla_{\partial_i}(\sigma^\alpha e_\alpha) = X^i(\partial_i \sigma^\alpha + \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\sigma^\beta) e_\alpha$, d. h. $\nabla_X \sigma$ hat

die Komponenten

$$(\nabla_X \sigma)^\alpha = X^i(\partial_i \sigma^\alpha + \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\sigma^\beta)$$

Der Schnitt $\nabla\sigma$ von $T^*M \otimes E$ (auf U definiert) hat bezüglich der Basisschnitte $dx^i \otimes e_\alpha$ (dx^i zu ∂_i dual) also die Komponenten $(\nabla\sigma)_i^{\ \alpha} = \partial_i \sigma^\alpha + \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\sigma^\beta$. Statt $(\nabla\sigma)_i^{\ \alpha}$ werden wir $\nabla_i \sigma^\alpha$ oder gar $\sigma^\alpha{}_{;i}$ schreiben. Somit ist

$$\sigma^\alpha{}_{;i} = \nabla_i \sigma^\alpha = \partial_i \sigma^\alpha + \Gamma_{i\beta}^{\alpha}\sigma^\beta ,$$

$$(\nabla_X \sigma)^\alpha = X^i \nabla_i \sigma^\alpha = \sigma^\alpha{}_{;i} X^i .$$

Nimmt man statt (x^i), (e_α), ein anderes Koordinatensystem $(x^{i'})$ und eine andere Trivialisierung $(e_{\alpha'})$ von E, in einer offenen Teilmenge U' von M, so haben die Komponenten von ∇ in $U \cap U'$ die Transformationsregel

$$\Gamma_{i'\alpha'}^{\beta'} = A_{i'}^{i} A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\beta}^{\beta'} \Gamma_{i\alpha}^{\beta} + A_{\gamma}^{\beta'} \partial_{i'} A_{\alpha'}^{\gamma} ,$$

wobei $e_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha} e_\alpha$, $\partial_{i'} = A_{i'}^{i}\partial_i$, d. h. $A_{i'}^{i} = \partial_{i'} x^i$.

Ist, umgekehrt, ein System von solchen (x^i), (e_α) gegeben, deren Definitionsbereiche ganz M überdecken, und jedem dieser (x^i), (e_α) ein System von Funktionen $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}$ zugeordnet, so daß die obige Transformationsregel gilt, so gibt es in E genau einen Zusammenhang ∇ mit unseren $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}$ als lokalen Komponenten (lokale Formel: $\nabla_X \sigma = X^i(\partial_i \sigma^\alpha + \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \sigma^\beta) e_\alpha$).

Sei nun ∇ ein Zusammenhang im Vektorbündel E über M, g eine Fasermetrik in E. Man sieht leicht, daß ∇ genau dann metrisch bezüglich g ist, wenn die lokalen Komponenten $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}$ die Bedingung

$$\partial_i g_{\alpha\beta} = \Gamma_{i\alpha}^{\gamma} g_{\gamma\beta} + \overline{\Gamma_{i\beta}^{\gamma}} g_{\alpha\gamma}$$

erfüllen. Insbesondere, falls die lokalen Basisschnitte (e_α) g-orthonormal sind

$(g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta})$, lautet diese Bedingung folgendermaßen:

$$\Gamma_{i\alpha}^{\beta} = -\overline{\Gamma_{i\beta}^{\alpha}}.$$

Jetzt können wir leicht beweisen, daß es in jedem Vektorbündel E über einer kompakten Mannigfaltigkeit M einen Zusammenhang ∇ gibt (bzw. einen g-metrischen Zusammenhang, für jede Fasermetrik g in E). Überdeckt man nämlich M mit endlich vielen Koordinaten- und Trivialisierungsumgebungen U_i und wählt man eine endliche Zerlegung der Eins φ_i mit Träger $\varphi_i \subset U_i$, so gibt es in jedem U_i einen Zusammenhang $\overset{i}{\nabla}$ (deren Komponenten als 0 vorgeschrieben werden können; sind die Basisschnitte der Trivialisierungen g-orthonormal, so liefert diese Prozedur g-metrische Zusammenhänge). Den gesuchten Zusammenhang ∇ kann man nun durch

$$\nabla_X \sigma = \sum_i \varphi_i \cdot \overset{i}{\nabla}_X \sigma$$

definieren (die einzelnen $\overset{i}{\nabla}_X \sigma$ sind nur auf den U_i definiert, deren Multiplikation mit den φ_i liefert aber eine natürliche C^∞-Fortsetzung auf M).

Sei nun ∇ ein Zusammenhang (bzw. ein metrischer Zusammenhang) im Vektorbündel E über M (bzw. im Vektorbündel E mit einer festen Fasermetrik g). Für eine C^∞-Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ verstehen wir unter einem C^∞-Schnitt von E längs γ eine Zuordnung $[a,b] \ni t \overset{\sigma}{\longmapsto} \sigma_t \in E_{\gamma(t)}$ mit der Eigenschaft, daß die Komponenten σ_t^α von σ_t bezüglich beliebiger Trivialisierungen von E C^∞-differenzierbar von t abhängen (dies ist eine geometrische, d. h. trivialisierungsunabhängige Bedingung).

Einem solchen Schnitt σ längs γ ordnen wir seine kovariante Ableitung $\nabla_{\dot\gamma} \sigma$ zu. Dies ist ein neuer C^∞-Schnitt von E längs γ mit den Komponenten

$$(\nabla_{\dot\gamma}\sigma)^\alpha = \frac{d}{dt}\sigma_t^\alpha + \Gamma_{i\beta}^\alpha \dot\gamma^i \sigma_t^\beta .$$

Aus der Transformationsregel für $\Gamma_{i\beta}^\alpha$ (S. 566) folgt sofort, daß diese Definition sinnvoll ist ($(\nabla_{\dot\gamma}\sigma)^{\alpha'} = A_\alpha^{\alpha'} (\nabla_{\dot\gamma}\sigma)^\alpha$ beim Trivialisierungswechsel). Ein Schnitt σ längs γ heißt parallel, wenn $\nabla_{\dot\gamma}\sigma = 0$.
Wie auf S. 47 beweist man nun, daß es für jedes $\tilde\sigma \in E_{\gamma(a)}$ genau einen parallelen Schnitt σ längs γ mit $\sigma_a = \tilde\sigma$ gibt; setzt man $\tau_\gamma(\tilde\sigma) = \sigma_b$, so definiert dies einen linearen Isomorphismus $\tau_\gamma : E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}$, den man die Parallelverschiebung längs γ nennt;

für einen g-metrischen Zusammenhang ∇ ist τ_γ eine Isometrie $(E_{\gamma(a)}, g_{\gamma(a)}) \longrightarrow$ $\longrightarrow (E_{\gamma(b)}, g_{\gamma(b)})$. Sei nun $y \in M$.

Dann gibt es C^∞-Basisschnitte e_α um y (bzw. g-orthonormale Basisschnitte e_α um y) mit $(\nabla e_\alpha)(y) = 0$; in anderen Worten, für <u>jedes</u> <u>Koordinatensystem</u> (x^i) <u>um</u> y <u>gibt</u> <u>es</u> (g-orthonormale) <u>Basisschnitte</u> (e_α) <u>um</u> y <u>mit</u> $\Gamma^\beta_{i\alpha}(y) = 0$.

Diese e_α können z. B. dadurch entstehen, daß man eine (bzw. orthonormale) Basis $e_\alpha(y)$ von E_y vorschreibt und eine Umgebung U von y als einen euklidischen Ball um $y = 0$ ansieht; dann entsteht e_α aus $e_\alpha(y)$ durch Parallelverschiebung längs geradliniger Strecken. Die e_α sind C^∞-differenzierbar wegen des Regularitätssatzes für Lösungen von Systemen gewöhnlicher Dif-

ferentialgleichungen.

Für symmetrische (torsionsfreie) Zusammenhänge ∇ im Tangentialbündel TM gilt noch mehr: um jeden Punkt y gibt es Koordinaten (x^i) mit $\Gamma_{ij}^{\,k}(y) = 0$ (siehe S. 407).

Die Zusammenhänge im Vektorbündel E über M bilden keinen Vektorraum, sondern einen <u>affinen</u> <u>Raum</u>. Ist nämlich ∇ ein Zusammenhang und H ein C^∞-Schnitt von $T^*M \otimes (E^* \otimes E) =$ $= T^*M \otimes \mathrm{Hom}(E,E)$ (also, für $X \in T_yM$, $H_X = H(X) \in \mathrm{Hom}(E_y, E_y)$, weil $T^*M \otimes \mathrm{Hom}(E,E)$ $= \mathrm{Hom}(TM, \mathrm{Hom}(E,E))$), so ist $\nabla + H$ mit $(\nabla + H)_X \sigma = \nabla_X \sigma + H_X \sigma$ ein neuer Zusammenhang in E. Sind umgekehrt ∇ und $\tilde{\nabla}$ Zusammenhänge in E, so ist

$\tilde{\nabla} = \nabla + H$ für ein eindeutig bestimmtes $H \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, \mathrm{Hom}(E,E)))$. Für die lokalen Komponenten $\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^{\beta}$, $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}$ von $\tilde{\nabla}$ bzw. ∇ gilt $\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^{\beta} = \Gamma_{i\alpha}^{\beta} + H_{i\alpha}^{\beta}$, und die $H_{i\alpha}^{\beta}$ haben die tensorielle Transformationsregel $H_{i'\alpha'}^{\beta'} = A_{i'}^{i} A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\beta}^{\beta'} H_{i\alpha}^{\beta}$. Somit ist der Raum aller Zusammenhänge in E ein affiner Raum mit dem assoziierten Vektorraum $\Gamma(\mathrm{Hom}(TM, \mathrm{Hom}(E,E)))$. Betrachtet man nur die g-metrischen Zusammenhänge in E, für eine feste Fasermetrik g, so bilden sie einen affinen Unterraum mit dem assoziierten Vektorraum $\mathrm{Hom}(TM, \mathrm{Hom}_{\text{schief}}(E,E))$, wobei $\mathrm{Hom}_{\text{schief}}(E,E)$ aus allen schief-symmetrischen (bzw. schief-Hermiteschen) Faserendomorphismen von E besteht.

Operationen auf Zusammenhängen.

a) Die Whitney-Summe. Seien $\nabla, \tilde{\nabla}$ Zusammenhänge in Vektorbündeln $E, \tilde{E}$ über M. Dann ist die Whitney-Summe $\nabla \oplus \tilde{\nabla}$ mit

$$(\nabla \oplus \tilde{\nabla})_X (\sigma, \tilde{\sigma}) = (\nabla_X \sigma, \tilde{\nabla}_X \tilde{\sigma})$$

ein Zusammenhang in $E \oplus \tilde{E}$. Sind $\nabla, \tilde{\nabla}$ metrisch bezüglich der Fasermetriken $g, \tilde{g}$ in E bzw. $\tilde{E}$, so ist $\nabla \oplus \tilde{\nabla}$ offenbar metrisch bezüglich $g \oplus \tilde{g}$.

b) Konstruktion des Dualen. Sei ∇ ein Zusammenhang im reellen oder komplexen Vektorbündel E über M. Für C^∞-Schnitte ψ von E^*, σ von E ist $\psi(\sigma)$ eine C^∞-Funktion (für duale Basisschnitte e_α in E, e^α in E^* mit $\psi = \psi_\alpha e^\alpha$, $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$ ist dann $\psi(\sigma) = \psi_\alpha \sigma^\alpha$). Wir behaupten, daß es in E^* genau einen Zusammenhang ∇^* gibt, der die Leibniz-Regel erfüllt (für die Multiplikation $(\psi, \sigma) \to \psi(\sigma)$):

$$X(\psi(\sigma)) = (\nabla^*_X \psi)(\sigma) + \psi(\nabla_X \sigma)$$

für alle $X \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(E)$, $\psi \in \Gamma(E^*)$. Tatsächlich, man definiert $\nabla^*_X \psi \in \Gamma(E^*)$ durch $(\nabla^*_X \psi)(\sigma) = X(\psi(\sigma)) - \psi(\nabla_X \sigma)$ und stellt fest, daß dies linear bezüglich der Multiplikation von $\sigma \in \Gamma(E)$ mit C^∞-Funktionen ist, also tatsächlich einen Schnitt $\nabla^*_X \psi$ von E^* definiert. Ist $\nabla_{\partial_i} e_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_\beta$ für lokale Basisschnitte e_α in E und Koordinaten x^i, so, in E^*, $\nabla^*_{\partial_i} e^\alpha = -\Gamma_{i\beta}^{\alpha} e^\beta$. Für $\sigma \in \Gamma(E)$ wissen wir, daß $\nabla \sigma$ die Komponenten $\sigma^\alpha{}_{;i} = \partial_i \sigma^\alpha + \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \sigma^\beta$ hat;

dagegen hat $\nabla^* \psi$, für $\psi \in \Gamma(E^*)$, die Komponenten $\psi_{\alpha, i} = \partial_i \psi_\alpha - \Gamma_{i\alpha}^{\beta} \psi_\beta$. Ist ∇ ein metrischer Zusammenhang bezüglich der Fasermetrik g in E, so ist ∇^* metrisch bezüglich g^*: für g-orthonormale Schnitte e_α sind die e^α g^*-orthonormal, und dann $\Gamma_{i\alpha}^{\beta} = -\overline{\Gamma_{i\beta}^{\alpha}}$.

c) Das Tensorprodukt. Seien $\nabla, \tilde{\nabla}$ Zusammenhänge in Vektorbündeln $E, \tilde{E}$ über M. Dann gibt es genau einen Zusammenhang $\nabla \otimes \tilde{\nabla}$ in $E \otimes \tilde{E}$, der für $X \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(E)$, $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\tilde{E})$ die folgende Leibniz-Regel (bezüglich der Multiplikation $(\sigma, \tilde{\sigma}) \to \sigma \otimes \tilde{\sigma}$) erfüllt:

$$(*)\quad (\nabla\otimes\tilde{\nabla})_X(\sigma\otimes\tilde{\sigma}) = \nabla_X\sigma\otimes\tilde{\sigma} + \sigma\otimes\tilde{\nabla}_X\tilde{\sigma}.$$

Da Schnitte von $E\otimes\tilde{E}$ als Abbildungen angesehen werden können, die Paaren $\psi\in\Gamma(E^*)$, $\tilde{\psi}\in\Gamma(\tilde{E}^*)$ C^∞-Funktionen zuordnen, bilinear bezüglich der Multiplikation mit C^∞-Funktionen, können wir für $a\in\Gamma(E\otimes\tilde{E})$ setzen

$$((\nabla\otimes\tilde{\nabla})_X a)(\psi,\tilde{\psi}) = X(a(\psi,\tilde{\psi})) - a(\nabla^*_X\psi,\tilde{\psi}) - a(\psi,\tilde{\nabla}^*_X\tilde{\psi}),$$

und die gewünschte Bilinearität ist offenbar, so daß $(\nabla\otimes\tilde{\nabla})_X a\in\Gamma(E\otimes\tilde{E})$; man sieht auch leicht, daß dadurch ein Zusammenhang $\nabla\otimes\tilde{\nabla}$ in $E\otimes\tilde{E}$ definiert ist. Setzt man $a=\sigma\otimes\tilde{\sigma}$, so bekommt man die obige Bedingung (*). Eindeutigkeit von $\nabla\otimes\tilde{\nabla}$: Für Koordinatenvektorfelder ∂_i und lokale

Basisschnitte e_α für E, $e_{\tilde{\alpha}}$ für $\tilde{E}$, folgt aus (*), daß

$$(\nabla\otimes\tilde{\nabla})_{\partial_i}(e_\alpha\otimes e_{\tilde{\alpha}}) = $$

$$= \Gamma^\beta_{i\alpha}e_\beta\otimes e_{\tilde{\alpha}} + \tilde{\Gamma}^{\tilde{\beta}}_{i\tilde{\alpha}}e_\alpha\otimes e_{\tilde{\beta}}.$$

Sind e_α, $e_{\tilde{\alpha}}$ orthonormal bezüglich der Fasermetriken $g,\tilde{g}$, so sind die $e_\alpha\otimes e_{\tilde{\alpha}}$ $(g\otimes\tilde{g})$-orthonormal; sind also $\nabla,\tilde{\nabla}$ metrisch bezüglich g bzw. $\tilde{g}$, so muß $\nabla\otimes\tilde{\nabla}$ $(g\otimes\tilde{g})$-metrisch sein. Für $a\in\Gamma(E\otimes\tilde{E})$ mit lokalen Komponenten $a^{\alpha\tilde{\alpha}}$ $(a=a^{\alpha\tilde{\alpha}}e_\alpha\otimes e_{\tilde{\alpha}})$ hat ∇a die Komponenten

$$a^{\alpha\tilde{\alpha}}{}_{,i} = \partial_i a^{\alpha\tilde{\alpha}} + \Gamma^\alpha_{i\beta}a^{\beta\tilde{\alpha}} + \tilde{\Gamma}^{\tilde{\alpha}}_{i\tilde{\beta}}a^{\alpha\tilde{\beta}}.$$

Die genannten Konstruktionen erlauben es, die kovariante Ableitung auf Schnitte von verschiedensten Bündeln auszudehnen. Ist z. B. ∇ ein Zusammenhang in E und $b \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E,E)) = \Gamma(E^* \otimes E)$, so können wir nach b) und c) $\nabla b \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, \mathrm{Hom}(E,E)))$ definieren, mit den lokalen Komponenten

$$b_\alpha{}^\beta{}_{,i} = \partial_i b_\alpha{}^\beta - \Gamma_{i\alpha}{}^\gamma b_\gamma{}^\beta + \Gamma_{i\gamma}{}^\beta b_\alpha{}^\gamma .$$

Sind dagegen Zusammenhänge in E sowie in TM gegeben (für deren Komponenten wir denselben Buchstaben Γ verwenden, aber mit verschiedenen Indizes: $\Gamma_{i\alpha}{}^\beta$, $\Gamma_{ij}{}^k$), so kann man für $h \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, E))$ ∇h definieren, mit den Komponenten

$$h_i{}^\alpha{}_{,j} = \partial_j h_i{}^\alpha - \Gamma_{ji}{}^k h_k{}^\alpha + \Gamma_{j\beta}{}^\alpha h_i{}^\beta .$$

Ist, insbesondere, $h = \nabla\sigma$ $(h_i{}^\alpha = \sigma^\alpha{}_{,i})$ mit $\sigma \in \Gamma(E)$, so kann man die <u>zweite</u> kovariante Ableitung

$\nabla^2\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$ bilden, mit den Komponenten

$$\sigma^\alpha{}_{,ij} = \partial_j \sigma^\alpha{}_{,i} - \Gamma_{ji}{}^k \sigma^\alpha{}_{,k} + \Gamma_{j\beta}{}^\alpha \sigma^\beta{}_{,i} ,$$

sowie die dritte Ableitung $\nabla^3\sigma$ mit

$$\sigma^\alpha{}_{,ijk} = \partial_k \sigma^\alpha{}_{,ij} - \Gamma_{ki}{}^s \sigma^\alpha{}_{,sj} - \Gamma_{kj}{}^s \sigma^\alpha{}_{,is} + \Gamma_{k\beta}{}^\alpha \sigma^\beta{}_{,ij}$$

und, ähnlich, die höheren Ableitungen $\nabla^p\sigma$; mit der Ausnahme von $p=1$ braucht man dafür nicht nur den Zusammenhang in E, sondern auch einen festen Zusammenhang in TM.

<u>Krümmung</u> <u>in</u> <u>Vektorbündeln</u>. Sei ∇ ein Zusammenhang im reellen oder komplexen Vektorbündel E

über M. Für $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(E)$ definieren wir $R(X,Y)\sigma \in \Gamma(E)$ durch

$$R(X,Y)\sigma = \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_X \nabla_Y \sigma + \nabla_{[X,Y]} \sigma.$$

Man sieht leicht, daß die Zuordnung $(X,Y,\sigma) \mapsto R(X,Y)\sigma$ 3-linear ist bezüglich der Multiplikation von X, Y mit reellen C^∞-Funktionen und der Multiplikation von σ mit reellen (bzw. komplexen) C^∞-Funktionen. Somit ist das dadurch definierte Objekt R ein Tensorfeld, das man den <u>Krümmungstensor des Zusammenhanges</u> ∇ nennt. Genauer, ist

$$R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \mathrm{Hom}(E,E)).$$

Da $R(X,Y)\sigma$ schief-symmetrisch bezüglich X, Y ist, haben wir eigentlich $R \in \Gamma(\Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}\, E)$, d.h. $R \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 M, \mathrm{End}\, E))$, wobei $\mathrm{End}\, E = \mathrm{Hom}(E,E)$.

Bezüglich lokaler Koordinaten (x^i) und Basisschnitte e_α hat R die Komponenten $R_{ij\alpha}{}^\beta$ mit

$$R(\partial_i, \partial_j) e_\alpha = R_{ij\alpha}{}^\beta e_\beta .$$

Offenbar ist

$$R_{ij\alpha}{}^\beta = \partial_j \Gamma_{i\alpha}^\beta - \partial_i \Gamma_{j\alpha}^\beta + \Gamma_{j\gamma}^\beta \Gamma_{i\alpha}^\gamma - \Gamma_{i\gamma}^\beta \Gamma_{j\alpha}^\gamma$$

und aus der Transformationsregel für $\Gamma_{i\alpha}^\beta$ kann man wieder den tensoriellen Charakter von R ableiten:

$$R_{i'j'\alpha'}{}^{\beta'} = A_{i'}^i A_{j'}^j A_{\alpha'}^\alpha A_\beta^{\beta'} R_{ij\alpha}{}^\beta .$$

<u>Eigenschaften</u> <u>des</u> <u>Krümmungstensors</u>. Sei ∇ ein Zusammenhang im Vektorbündel E über M.

1) Die <u>Bianchi-Identität</u>. Man wähle einen festen Zusammenhang in TM. Dann kann man ∇R bilden, mit den Komponenten $R_{ij\alpha}{}^{\beta}{}_{,k} = \partial_k R_{ij\alpha}{}^{\beta} - \Gamma_{ki}^{s} R_{sj\alpha}{}^{\beta} - \Gamma_{kj}^{s} R_{is\alpha}{}^{\beta} - \Gamma_{k\alpha}^{\gamma} R_{ij\gamma}{}^{\beta} + \Gamma_{k\gamma}^{\beta} R_{ij\alpha}{}^{\gamma}$.

Ist der Zusammenhang in TM <u>symmetrisch</u>, so

$$R_{ij\alpha}{}^{\beta}{}_{,k} + R_{jk\alpha}{}^{\beta}{}_{,i} + R_{ki\alpha}{}^{\beta}{}_{,j} = 0.$$

<u>Beweis</u>. Sei $y \in M$. Da unsere Gleichung koordinatenunabhängig ist, wählen wir x^i, e_α um y mit $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}(y) = \Gamma_{ij}^{k}(y) = 0$ * (Γ_{ij}^{k} sind die Komponenten unseres symmetrischen Zusammenhanges in TM). Also (vgl. S. 582), $R_{ij\alpha}{}^{\beta}{}_{,k}(y) = \partial_k R_{ij\alpha}{}^{\beta}(y) = \partial_k \partial_j \Gamma_{i\alpha}^{\beta}(y) - \partial_k \partial_i \Gamma_{j\alpha}^{\beta}(y)$, woher unsere Gleichung (in y) sofort folgt. q.e.d.

---

* S. 571, 572

<u>Bemerkung</u>. Da die Bianchi-Identität für <u>jeden</u> symmetrischen Zusammenhang in TM gilt, hat sie mit diesem Zusammenhang eigentlich nichts zu tun; die Verwendung des Zusammenhanges in TM erleichtert lediglich ihre Formulierung. Die "wahre Ursache" für die Bianchi-Identität ist die Jacobi-Identität für die Lie-Klammer von Vektorfeldern.

2) Sei ∇ ein metrischer Zusammenhang bezüglich der Fasermetrik g. Setzen wir $R_{ij\alpha\beta} = R_{ij\alpha}{}^{\gamma} g_{\gamma\beta}$, so ist

$$R_{ij\alpha\beta} = -\overline{R_{ij\beta\alpha}}.$$

<u>Beweis</u>. Da $g_{\gamma'\beta'} = A_{\gamma'}^{\gamma} \overline{A_{\beta'}^{\beta}} g_{\gamma\beta}$, hat $R_{ij\alpha\beta}$ die Transformationsregel $R_{i'j'\alpha'\beta'} = A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} A_{\alpha'}^{\alpha} \overline{A_{\beta'}^{\beta}} R_{ij\alpha\beta}$. Somit ist unsere Gleichung koordinatenunabhängig. Wählen

wir also, in $y \in M$, g-orthonormale Basisschnitte e_α mit $\Gamma_{i\alpha}{}^{\beta}(y) = 0$ (S. 571) so ist $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ und $R_{ij\alpha\beta}(y) = \partial_j \Gamma_{i\alpha}{}^{\beta}(y) - \partial_i \Gamma_{j\alpha}{}^{\beta}(y)$. Unsere Gleichung in y folgt nun aus $\Gamma_{i\alpha}{}^{\beta} = -\overline{\Gamma_{i\beta}{}^{\alpha}}$ (S. 568).

q. e. d.

3) Äquivarianz der Krümmung unter Bündelisomorphismen. Seien E, $\tilde{E}$ Vektorbündel über M, ∇ ein Zusammenhang in E, $F : \tilde{E} \to E$ ein Bündelisomorphismus. Die Formel $\tilde{\nabla}_X \tilde{\sigma} = F^{-1}(\nabla_X(F(\tilde{\sigma})))$ für $X \in \Gamma(TM)$, $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\tilde{E})$ definiert dann einen neuen („zurückgeholten") Zusammenhang $\tilde{\nabla} = F^*\nabla$ in $\tilde{E}$.

(i) Der Krümmungstensor von $\tilde{\nabla}$ ist $\tilde{R} = F^*R$, wobei $\tilde{R}(X,Y)\tilde{\sigma} = F^{-1}(R(X,Y)(F(\tilde{\sigma})))$.

(ii) Ist ∇ metrisch bezüglich der

Fasermetrik g, so ist $\tilde{\nabla}$ metrisch bezüglich der Fasermetrik $\tilde{g} = F^*g$ mit $\tilde{g}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = g(F(\tilde{\sigma}), F(\tilde{\tau}))$.

Beweis. Wählen wir lokale Basisschnitte e_α in E und $\tilde{e}_\alpha = F^{-1}(e_\alpha)$ in $\tilde{E}$ (bzw. orthonormale Basisschnitte). Dann hat $\tilde{\nabla}$, $\tilde{R}$, $\tilde{g}$ in $\tilde{e}_\alpha$ die gleichen Komponenten wie ∇, R, bzw. g in e_α, was mit unserer Behauptung äquivalent ist.

q. e. d.

4) Sei $\tilde{\nabla} = \nabla + H$ ein anderer Zusammenhang in E, $H \in \Gamma(TM, \operatorname{End} E)$. Dann ist die Krümmung $\tilde{R}$ von $\tilde{\nabla}$ durch

$$\tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\beta} = R_{ij\alpha}{}^{\beta} + \nabla_j H_{i\alpha}{}^{\beta} - \nabla_i H_{j\alpha}{}^{\beta} + H_{j\gamma}{}^{\beta} H_{i\alpha}{}^{\gamma} - H_{i\gamma}{}^{\beta} H_{j\alpha}{}^{\gamma}$$

gegeben, wobei R die Krümmung von ∇ ist und $\nabla_j H_{i\alpha}{}^{\beta}$ mit Hilfe eines beliebigen symmetrischen Zusammenhanges in TM gebildet ist.

Beweis. Man nehme die Formel auf S. 582 und drücke $\partial_j H_{i\alpha}{}^{\beta}$ durch $\nabla_j H_{i\alpha}{}^{\beta}$ aus.

q.e.d.

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Die Klasse aller reellen (bzw. komplexen) Vektorbündel einer festen Faserdimension über M ist offenbar zu groß, um eine Menge zu sein. Es gibt trotzdem eine gewisse Menge von solchen Bündeln, in der alle möglichen Isomorphismustypen dieser Bündel vertreten sind. So ein Bündel E entsteht nämlich, bis auf Isomorphismus, dadurch, daß man eine Überdeckung von M mit Trivialisierungsumgebungen nimmt, über jeder Menge aus dieser Überdeckung das Produktbündel bildet, und dann diese Produktbündel miteinander

zusammenklebt, indem man gewisse matrixwertige Übergangsfunktionen verwendet. Die Klasse, die aus solchen Überdeckungen und Übergangsfunktionen besteht, ist bestimmt eine Menge. Somit existiert *die Menge aller Isomorphismusklassen von reellen (bzw. komplexen) Vektorbündel jeder festen Faserdimension über* M. Insbesondere gibt es die Menge $\mathcal{G}(M)$ der Isomorphismusklassen aller *orientierten* zwei-dimensionalen reellen Vektorbündel über M (wobei man zwei Bündel als isomorph ansieht, falls es zwischen ihnen einen *orientierungstreuen* Bündelisomorphismus gibt), sowie die Menge $\mathcal{L}(M)$ aller Isomorphismusklassen der 1-dimensionalen komplexen Vektorbündel über M. Jedes komplexe Geradenbündel E (d.h. ein eindimensionales komplexes Vektorbündel) wird kanonisch zu einem reellen Ebenenbündel (d.h. zu einem zweidimensionalen reellen Vektorbündel), indem man in jeder Faser E_y die komplexe Struktur vergißt und E_y einfach als einen 2-dimensionalen reellen Vektorraum ansieht. Als reelles Ebenenbündel angesehen, trägt E eine kanonische Orientierung, die durch die ursprüngliche komplexe Struktur bestimmt ist: nimmt man in jeder Faser E_y alle reellen Basen der Gestalt $\sigma, i\sigma$ mit $\sigma \in E_y \setminus \{0\}$, so bestimmen diese Basen eine Orientierung in E_y. Für ein anderes $\sigma' \in E_y \setminus \{0\}$ ist nämlich $\sigma' = (a+bi)\sigma$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2>0$, also haben wir die Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} \sigma' \\ i\sigma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ i\sigma \end{bmatrix}$$

und die Übergangsmatrix zwischen den beiden Basen hat die positive Determinante $\det \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a^2+b^2$.

Sind $E, \tilde{E}$ komplexe Geradenbündel über M und $F: E \to \tilde{E}$ ein (komplexer) Isomorphismus, so ist F offenbar auch ein Isomorphismus der entsprechenden reellen Ebenenbündel. Betrachtet man die letzteren mit den obengenannten kanonischen Orientierungen, so ist F orientierungstreu, weil es in jeder Faser eine positiv orientierte Basis der Form $\sigma, i\sigma$ in die positiv orientierte Basis $F\sigma, iF\sigma$ der gleichen Form verwandelt. Somit können wir jeder Isomorphismusklasse von komplexen Geradenbündeln über M eine Isomorphismusklasse von orientierten reellen Ebenenbündeln über M zuordnen, indem wir die komplexe Struktur vergessen. In anderen Worten haben wir eine natürliche Abbildung

$$\Psi: \mathcal{L}(M) \to \mathcal{G}(M)$$

definiert.

LEMMA 30. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann ist die Abbildung $\Psi: \mathcal{L}(M) \to \mathcal{G}(M)$ bijektiv (Bezeichnungen von S. 588, 590).

Beweis. a) Surjektivität. Sei E ein orientiertes reelles Ebenenbündel über M und wählen wir eine Fasermetrik g in E. Die Orientierung und g bestimmen in E kanonisch eine komplexe Struktur (S. 559–560), was offenbar ein Ψ-Urbild der Äquivalenzklasse von E in $\mathcal{G}(M)$ liefert.

b) Injektivität. Seien $E, \tilde{E}$ komplexe Geradenbündel über M, die als orientierte reelle Ebenenbündel isomorph sind, und wählen wir Hermitesche Fasermetriken $g, \tilde{g}$ in E bzw. $\tilde{E}$. Die reellen Teile $\operatorname{Re} g$, $\operatorname{Re} \tilde{g}$ sind (symmetrische) Fasermetriken in den reellen Bündeln $E, \tilde{E}$. Wegen des vorausgesetz-

ten Isomorphismus können wir E und $\tilde{E}$ als ein orientiertes reelles Ebenenbündel ansehen, in dem zwei (reelle) Fasermetriken gegeben sind. Die auf S. 498–502 angegebene Konstruktion einer Vektorbündelisometrie zwischen den beiden Metriken liefert einen orientierungstreuen Isomorphismus, weil man sie durch positive Operatoren in jeder Faser realisiert. Somit gibt es eine orientierungstreue Vektorbündelisometrie $F: (E, \operatorname{Re} g) \to (\tilde{E}, \operatorname{Re} \tilde{g})$ zwischen den reellen Bündeln $E, \tilde{E}$. Bemerken wir jetzt, daß in E die Orientierung und $\operatorname{Re} g$ die ursprüngliche komplexe Multiplikation mit i eindeutig bestimmen (und das gleiche gilt natürlich auch in $\tilde{E}$): für $\sigma \in E_y \setminus \{0\}$ ist $i\sigma$ der einzige Vektor in E_y mit $\operatorname{Re} g(i\sigma, i\sigma) = \operatorname{Re} g(\sigma, \sigma)$, $\operatorname{Re} g(\sigma, i\sigma) = 0$ und mit der Eigenschaft, daß $\sigma, i\sigma$ eine positiv orientierte Basis von E_y ist.

Deshalb muß F mit der Multiplikation mit i kommutieren, d.h. ein komplexer Isomorphismus $E \to \tilde{E}$ sein. Somit ist die Injektivität von Ψ bewiesen.

q.e.d.

Sei nun E ein orientiertes reelles Ebenenbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit M, g eine Fasermetrik in E, ∇ ein g-metrischer Zusammenhang in E (der für jedes g existieren muß, vgl. S. 568). Die Orientierung und g bestimmen in E eine komplexe Struktur (S. 559-560), d.h. einen Bündelendomorphismus $J: E \to E$, der der komplexen Multiplikation mit i entspricht und der Bedingung $J \circ J = -Id_E$ genügt. Als Schnitt von $\operatorname{End} E = E^* \otimes E$ muß J parallel sein, bezüglich des dort durch

∇ bestimmten Zusammenhanges (S. 579). J ist nämlich eindeutig durch g und die Orientierung bestimmt, die bei Parallelverschiebung längs jeder Kurve in M erhalten bleiben. Somit ist auch J unter Parallelverschiebungen invariant, d.h. $J_\alpha{}^\beta{}_{,i} = 0$. Sei R der Krümmungstensor von ∇. Wir definieren die 2-Form $\omega = \omega(g, \nabla) \in \Omega^2 M$ durch

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{2} J_\beta{}^\alpha R_{ij\alpha}{}^\beta$$

(wobei die Komponenten bezüglich beliebiger Koordinaten x^i und Basisschnitte e_α genommen werden). Man nennt ω die <u>Krümmungsform</u> von ∇ (und g). Die Bianchi-Identität (S. 583) mit $J_\alpha{}^\beta{}_{,i} = 0$ ergibt $\omega_{ij,k} + \omega_{jk,i} + \omega_{ki,j} = 0$, d.h., $d\omega = 0$. Somit bestimmt die geschlossene 2-Form ω

eine Kohomologieklasse $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ und man definiert die Euler-Klasse $eu(g, \nabla) \in H^2(M, \mathbb{R})$ von ∇ und g im orientierten reellen Ebenenbündel E durch

$$eu(g, \nabla) = \frac{1}{2\pi}[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R}).$$

Sei nun $\tilde{\nabla}$ ein anderer Zusammenhang in E, der metrisch bezüglich derselben Fasermetrik g ist. Also, $\tilde{\nabla} = \nabla + H$ mit $H \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, \mathrm{End}\,E))$ (S. 573). Definieren wir die 1-Form $\xi \in \Omega^1 M$ durch $\xi_i = -\frac{1}{2} J_\beta{}^\alpha H_{i\alpha}{}^\beta$. Für die neue Krümmungsform $\tilde{\omega} = \omega(g, \tilde{\nabla})$ gilt dann

$$\tilde{\omega} = \omega - d\xi.$$

Betrachten wir nämlich alle Komponenten bezüglich positiv orientierter orthonormaler lokaler Basisschnitte e_1, e_2,

so ist $Je_1 = e_2$, $Je_2 = -e_1$ und $Je_\alpha = J_\alpha{}^\beta e_\beta$. Also, J hat die Komponenten $J_1{}^2 = -J_2{}^1 = 1$, $J_1{}^1 = J_2{}^2 = 0$. Insbesondere ist

$$\omega_{ij} = R_{ij1}{}^2, \quad \tilde{\omega}_{ij} = \tilde{R}_{ij1}{}^2$$

(wobei $\tilde{R}$ die Krümmung von $\tilde{\nabla}$ ist), weil $R_{ij\alpha}{}^\beta = R_{ij\alpha\beta}$ und $R_{ij\alpha\beta} = -R_{ij\beta\alpha}$ (S. 584) für orthonormale Basisschnitte e_α. Da, für die Komponenten $\Gamma_{i\alpha}{}^\beta$, $\tilde{\Gamma}_{i\alpha}{}^\beta$ von $\nabla, \tilde{\nabla}$, $\Gamma_{i\alpha}{}^\beta = -\Gamma_{i\beta}{}^\alpha$, $\tilde{\Gamma}_{i\alpha}{}^\beta = -\tilde{\Gamma}_{i\beta}{}^\alpha$ (S. 568), ist auch $H_{i\alpha}{}^\beta = -H_{i\beta}{}^\alpha$ und somit hat H die Komponenten

$$H_{i1}{}^2 = -H_{i2}{}^1 = \xi_i, \quad H_{i1}{}^1 = H_{i2}{}^2 = 0.$$

Nun ist (S. 586) $\tilde{\omega}_{ij} = \tilde{R}_{ij1}{}^2 = R_{ij1}{}^2 + \nabla_j H_{i1}{}^2 - \nabla_i H_{j1}{}^2 + H_{j\gamma}{}^2 H_{i1}{}^\gamma - H_{i\gamma}{}^2 H_{j1}{}^\gamma$, wobei man einen beliebigen symmetrischen Zusammenhang in TM verwendet. Die letzten zwei Teile dieser Summe müssen verschwinden (egal ob $\gamma = 1$ oder $\gamma = 2$), also $\tilde{\omega}_{ij} = R_{ij1}{}^2 + \nabla_j H_{i1}{}^2 - \nabla_i H_{j1}{}^2 = \omega_{ij} + \nabla_j \xi_i - \nabla_i \xi_j$, d.h. $\tilde{\omega} = \omega - d\xi$.

Deshalb haben wir $[\tilde{\omega}] = [\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$, d.h. $eu(g, \nabla)$ ist von dem g-metrischen Zusammenhang ∇ unabhängig. Wir können also setzen

$$eu(g) = eu(g, \nabla)$$

wobei ∇ ein beliebiger g-metrischer Zusammenhang in E ist.

Jetzt werden wir zeigen, daß $eu(g)$ auch von der Fasermetrik g unabhängig ist, so daß man die <u>Euler-Klasse</u>

$$eu(E) \in H^2(M, \mathbb{R})$$

des <u>orientierten</u> reellen Ebenenbündels E definieren kann, indem man

$$eu(E) = eu(g) = eu(g, \nabla)$$

für eine beliebige Fasermetrik g (und einen g-metrischen Zusammenhang ∇) setzt. Tatsächlich werden wir noch mehr beweisen: $eu(E)$ hängt nur von der <u>orientierungstreuen Isomorphismusklasse</u> von E in $\mathcal{G}(M)$, so daß man eine Abbildung

$$eu : \mathcal{G}(M) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{R})$$

hat. Seien also $E, \tilde{E}$ orientierte reelle Ebenenbündel mit Fasermetriken $g, \tilde{g}$ über M und mit einem orientierungstreuen Bündelisomorphismus $F : E \to \tilde{E}$. Wir können gleich annehmen, daß F auch eine Isometrie $(E, g) \to (\tilde{E}, \tilde{g})$ ist (S. 592). Wählen wir in $\tilde{E}$ einen $\tilde{g}$-metrischen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$; somit ist der Zusammenhang $\nabla = F^*\tilde{\nabla}$ g-metrisch in E (weil $g = F^*\tilde{g}$) und er hat die Krümmung R mit $R(X,Y)\sigma = F^{-1}(\tilde{R}(X,Y)(F(\sigma)))$, wobei $\tilde{R}$ die Krümmung von $\tilde{\nabla}$ ist (S. 585–586). Wählen wir in E positiv orientierte orthonormale lokale Basisschnitte e_1, e_2; somit sind $\tilde{e}_1 = F(e_1)$, $\tilde{e}_2 = F(e_2)$ lokale Schnitte mit den gleichen Eigenschaften in $\tilde{E}$ und $\nabla, \tilde{\nabla}$ haben die Krümmungsformen $\omega, \tilde{\omega}$ mit

$$\omega_{ij} = R_{ij1}{}^2 = g(R(\partial_i, \partial_j)e_1, e_2) =$$
$$= \tilde{g}(F(R(\partial_i,\partial_j)e_1), F(e_2)) =$$
$$= \tilde{g}(\tilde{R}(\partial_i,\partial_j)F(e_1), F(e_2)) =$$
$$= \tilde{g}(\tilde{R}(\partial_i,\partial_j)\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = \tilde{R}_{ij1}{}^2 = \tilde{\omega}_{ij},$$

d. h. $\omega = \tilde{\omega}$, also $eu(g,\nabla) = eu(\tilde{g},\tilde{\nabla})$. Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

Bemerkungen. (i) Die Euler-Klasse des orientierten reellen Ebenenbündels E über der kompakten Mannigfaltigkeit M hängt wesentlich von der Orientierung in E ab: wird E umorientiert, so ändert sich bei unserer Konstruktion das Vorzeichen von $\mathcal{Y}$ und somit auch das von $eu(E)$.

(ii) Betrachtet man E als ein komplexes Geradenbündel (S. 591), so wird $eu(E)$ die erste Chern-Klasse von E genannt und mit $c_1(E)$ bezeichnet.

Für jede kompakte Mannigfaltigkeit M trägt die Menge $\mathcal{G}(M)$ in natürlicher Weise die Struktur einer abelschen Gruppe. Um diese zu beschreiben, betrachten wir $\mathcal{G}(M)$ als die Menge der Isomorphismusklassen von komplexen Geradenbündeln über M (Lemma 30). Für zwei solche Bündel $E, \tilde{E}$ ist das (komplexe) Tensorprodukt $E \otimes \tilde{E}$ wieder ein komplexes Geradenbündel. Bis auf Isomorphismus, hängt $E \otimes \tilde{E}$ nur von den Isomorphismusklassen von E und $\tilde{E}$, und diese Operation ist kommutativ und assoziativ (S. 550), wodurch $\mathcal{G}(M)$ zu einer kommutativen Halbgruppe wird. Das neutrale Element von $\mathcal{G}(M)$ ist die Äquivalenzklasse des trivialen Bündels $M \times \mathbb{C}$: für jedes E hat man den Isomorphismus $F: E \to E \otimes (M \times \mathbb{C})$ mit $F(\sigma) = \sigma \otimes 1$. Das inverse Element zur Äquivalenzklasse von E in $\mathcal{G}(M)$ ist die Äquivalenzklasse des dualen Bündels E^*,

weil das Geradenbündel $E^* \otimes E = \operatorname{End} E$ einen C^∞-Schnitt ohne Nullstellen besitzt, nämlich die Identitätstransformation von E, und somit trivial sein muß.

LEMMA 31. Für jede kompakte Mannigfaltigkeit M ist

$$\mathrm{eu}: \mathcal{G}(M) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{R})$$

ein Gruppenhomomorphismus.

<u>Beweis</u>. Sei E ein komplexes Geradenbündel mit Hermitescher Fasermetrik g und einem g-metrischen (komplexen) Zusammenhang ∇. Vergißt man die komplexe Struktur, so ist ∇ (als reeller Zusammenhang angesehen) metrisch bezüglich der reellen Fasermetrik $\operatorname{Re} g$. Wir behaupten, daß

die Krümmungsform $\omega = \omega(\mathrm{Re}\, g, \nabla)$ folgendermaßen entsteht. In einer Trivialisierungsumgebung U für E wählt man einen Schnitt σ mit $g(\sigma, \sigma) = 1$. Dann hat man, für alle Tangentialvektoren $X \in T_y M$, $y \in U$,

$$\nabla_X \sigma = -i\,\xi(X)\sigma$$

mit einer auf U definierten (reellwertigen) 1-Form $\xi \in \Omega^1 U$. Für so ein ξ ist

$$\omega = d\xi$$

(Warnung: obwohl ω global auf M definiert ist, ist es für ξ nicht der Fall).

Tatsächlich, die reellen Basisschnitte $e_1 = \sigma$, $e_2 = i\sigma$ auf U sind positiv orientiert und $(\mathrm{Re}\, g)$-orthonormal. Bezüglich dieser Schnitte und belie-

biger Koordinaten x^j in U hat der reelle Zusammenhang die Komponenten $\Gamma_{j\alpha}^{\ \beta}$ mit $\Gamma_{j\alpha}^{\ \beta} = -\Gamma_{j\beta}^{\ \alpha}$. Setzt man $\xi_j = -\Gamma_{j1}^{\ 2}$, so ist

$$\Gamma_{j1}^{\ 2} = -\Gamma_{j2}^{\ 1} = -\xi_j\,, \quad \Gamma_{j1}^{\ 1} = \Gamma_{j2}^{\ 2} = 0.$$

Also, mit $\sigma = e_1$ und $\nabla_{\partial_j} e_\alpha = \Gamma_{j\alpha}^{\ \beta} e_\beta$ ist $\nabla_{\partial_j} \sigma = \Gamma_{j1}^{\ 2} e_2 = -\xi_j e_2 = -i\xi_j \sigma$, d. h. für $X = X^j \partial_j$, $\nabla_X \sigma = -i\xi(X)\sigma$, weil $\xi(X) = X^j \xi_j$.

Außerdem (S. 582) $\omega_{kj} = R_{kj1}^{\ \ \ 2} = \partial_j \Gamma_{k1}^{\ 2} - \partial_k \Gamma_{j1}^{\ 2} + \Gamma_{j\gamma}^{\ 2}\Gamma_{k1}^{\ \gamma} - \Gamma_{k\gamma}^{\ 2}\Gamma_{j1}^{\ \gamma} = \partial_j \Gamma_{k1}^{\ 2} - \partial_k \Gamma_{j1}^{\ 2} = \partial_k \xi_j - \partial_j \xi_k$, d. h. $\omega = d\xi$.

Seien nun E, $\tilde{E}$ zwei komplexe Geradenbündel mit Fasermetriken $g, \tilde{g}$ und metrischen Zusammenhängen $\nabla, \tilde{\nabla}$. Nun ist, in $E \otimes \tilde{E}$, $\omega(Re(g \otimes \tilde{g}), \nabla \otimes \tilde{\nabla}) = \omega(Re\, g, \nabla) + \omega(Re\, \tilde{g}, \tilde{\nabla})$, woher unsere Behauptung gleich folgt: $eu(E \otimes \tilde{E}) = eu(E) + eu(\tilde{E})$. Um die obige Gleichung für Krümmungsformen zu beweisen, nehmen wir in einer gemeinsamen Trivialisierungsumgebung U für $E, \tilde{E}$ Einheitsschnitte $\sigma, \tilde{\sigma}$ für E bzw. $\tilde{E}$, so daß $\nabla_X \sigma = -i\zeta(X)\sigma$, $\tilde{\nabla}_X \tilde{\sigma} = -i\tilde{\zeta}(X)\tilde{\sigma}$, woher $\omega(Re\, g, \nabla) = d\zeta$, $\omega(Re\, \tilde{g}, \tilde{\nabla}) = d\tilde{\zeta}$. Nun ist

$$(\nabla \otimes \tilde{\nabla})_X (\sigma \otimes \tilde{\sigma}) = \nabla_X \sigma \otimes \tilde{\sigma} + \sigma \otimes \tilde{\nabla}_X \tilde{\sigma} =$$
$$= -i\zeta(X)\sigma \otimes \tilde{\sigma} + \sigma \otimes (-i\tilde{\zeta}(X)\tilde{\sigma}) =$$
$$= -i(\zeta(X) + \tilde{\zeta}(X))\, \sigma \otimes \tilde{\sigma}.$$

Da $(g \otimes \tilde{g})(\sigma \otimes \tilde{\sigma}, \sigma \otimes \tilde{\sigma}) = 1$, ist also

$\omega(Re(g \otimes \tilde{g}), \nabla \otimes \tilde{\nabla}) = d(\zeta + \tilde{\zeta}) = \omega(Re\, g, \nabla) + \omega(Re\, \tilde{g}, \tilde{\nabla})$, womit das Lemma bewiesen ist.

q.e.d.

Sei M eine kompakte orientierte Fläche, d.h. eine kompakte orientierte zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Die Euler-Klasse $eu(E)$ eines orientierten reellen Ebenenbündels E über M kann nun als eine reelle Zahl $\chi(E)$ betrachtet werden, indem man auf sie den Integrationsisomorphismus $\int_M : H^2(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ anwendet (Satz 26):

$$\chi(E) = \int_M eu(E).$$

$\chi(E)$ wird die <u>Euler-Zahl</u> von E genannt. Die Komposition $\chi = \int_M \circ\, eu$

ist nun ein Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \mathcal{G}(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ist $E = TM$ das Tangentialbündel der kompakten orientierten Fläche M, so ist E auch kanonisch orientiert. Die Zahl $\chi(TM)$ wird die <u>Eulersche Charakteristik</u> der Fläche M genannt und mit $\chi(M)$ bezeichnet. Sei g eine beliebige Riemannsche Metrik auf M. Der Riemannsche Zusammenhang ∇ in TM ist g-metrisch und, bekanntlich (S. 87), hat er den Krümmungstensor

$$R_{hij}{}^{k} = K(g_{hj}\,\delta_i^k - g_{ij}\,\delta_h^k),$$

wobei $K : M \to \mathbb{R}$ die Gaußsche Krümmung von (M,g) ist. Um $y \in M$ wählen wir orientierte Koordinaten x^i

mit der Eigenschaft, daß $\partial_i(y)$ eine g-Orthonormalbasis von T_yM bilden. Bezüglich dieser Koordinaten hat die Krümmungsform $\omega = \omega(g,\nabla)$ in y also die Komponenten $\omega_{ij} = R_{ij1}{}^{2}$ (S. 596), woher, in y,

$$\omega_{12} = R_{121}{}^{2} = K = K \cdot V_{12}$$

wobei $V = V_g$ das Volumenelement von g ist. Also, $\omega = K \cdot V_g$ auf M und deshalb haben wir die <u>Gauß-Bonnet Formel</u>: für jede kompakte orientierte zwei-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g),

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K \cdot V_g .$$

<u>Bemerkung</u>. Nach der obigen Formel hängt das Integral $\int_M K \cdot V_g$ von der

denbündel mit Fasermetriken $g, \tilde{g}$ und metrischen Zusammenhängen $\nabla, \tilde{\nabla}$. Nun ist, in $E \otimes \tilde{E}$, $\omega(Re(g\otimes\tilde{g}), \nabla\otimes\tilde{\nabla}) = \omega(Re\, g, \nabla) + \omega(Re\, \tilde{g}, \tilde{\nabla})$, woher unsere Behauptung gleich folgt: $eu(E\otimes\tilde{E}) = eu(E) + eu(\tilde{E})$. Um die obige Gleichung für Krümmungsformen zu beweisen, nehmen wir in einer gemeinsamen Trivialisierungsumgebung U für $E, \tilde{E}$ Einheitsschnitte $\sigma, \tilde{\sigma}$ für E bzw. $\tilde{E}$, so daß $\nabla_X \sigma = -i\xi(X)\sigma$, $\tilde{\nabla}_X \tilde{\sigma} = -i\tilde{\xi}(X)\tilde{\sigma}$, woher $\omega(Re\, g, \nabla) = d\xi$, $\omega(Re\, \tilde{g}, \tilde{\nabla}) = d\tilde{\xi}$. Nun ist

$$(\nabla\otimes\tilde{\nabla})_X(\sigma\otimes\tilde{\sigma}) = \nabla_X\sigma\otimes\tilde{\sigma} + \sigma\otimes\tilde{\nabla}_X\tilde{\sigma} =$$

$$= -i\xi(X)\sigma\otimes\tilde{\sigma} + \sigma\otimes(-i\tilde{\xi}(X)\tilde{\sigma}) =$$

$$= -i(\xi(X)+\tilde{\xi}(X))\,\sigma\otimes\tilde{\sigma}.$$

Da $(g\otimes\tilde{g})(\sigma\otimes\tilde{\sigma}, \sigma\otimes\tilde{\sigma}) = 1$, ist also

$$\omega(Re(g\otimes\tilde{g}), \nabla\otimes\tilde{\nabla}) = d(\xi+\tilde{\xi}) =$$

$= \omega(Re\, g, \nabla) + \omega(Re\, \tilde{g}, \tilde{\nabla})$, womit das Lemma bewiesen ist.

q.e.d.

Sei M eine kompakte orientierte Fläche, d.h. eine kompakte orientierte zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Die Euler-Klasse $eu(E)$ eines orientierten reellen Ebenenbündels E über M kann nun als eine reelle Zahl $\chi(E)$ betrachtet werden, indem man auf sie den Integrationsisomorphismus $\int_M : H^2(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ anwendet (Satz 26):

$$\chi(E) = \int_M eu(E).$$

$\chi(E)$ wird die <u>Euler-Zahl</u> von E genannt. Die Komposition $\chi = \int_M \circ\, eu$

ist nun ein Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \mathcal{G}(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ist $E = TM$ das Tangentialbündel der kompakten orientierten Fläche M, so ist E auch kanonisch orientiert. Die Zahl $\chi(TM)$ wird die <u>Eulersche Charakteristik</u> der Fläche M genannt und mit $\chi(M)$ bezeichnet. Sei g eine beliebige Riemannsche Metrik auf M. Der Riemannsche Zusammenhang ∇ in TM ist g-metrisch und, bekanntlich (S. 87), hat er den Krümmungstensor

$$R_{hij}{}^{k} = K(g_{hj}\,\delta_i^k - g_{ij}\,\delta_h^k),$$

wobei $K : M \to \mathbb{R}$ die Gaußsche Krümmung von (M,g) ist. Um $y \in M$ wählen wir orientierte Koordinaten x^i

mit der Eigenschaft, daß $\partial_i(y)$ eine g-Orthonormalbasis von T_yM bilden. Bezüglich dieser Koordinaten hat die Krümmungsform $\omega = \omega(g,\nabla)$ in y also die Komponenten $\omega_{ij} = R_{ij1}{}^{2}$ (S. 596), woher, in y,

$$\omega_{12} = R_{121}{}^{2} = K = K \cdot V_{12}$$

wobei $V = V_g$ das Volumenelement von g ist. Also, $\omega = K \cdot V_g$ auf M und deshalb haben wir die <u>Gauß-Bonnet Formel</u>: für jede kompakte orientierte zwei-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g),

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K \cdot V_g .$$

<u>Bemerkung</u>. Nach der obigen Formel hängt das Integral $\int_M K \cdot V_g$ von der

Metrik g auf der kompakten orientierten Fläche M nicht ab. Betrachtet man es als das Riemannsche Integral aus der Funktion K, so sieht man, das man es auch für <u>nicht-orientierbare</u> kompakte Riemannsche Flächen (M,g) bilden kann. Auch in diesem Fall ist das Integral von der Metrik g unabhängig, was man folgendermaßen sehen kann. Ist $t \mapsto g(t)$ eine C^∞-Kurve von Metriken auf M und, für ein festes t, $a = \frac{d}{dt} g(t)$, so $\frac{d}{dt} K_{g_t} = -\frac{1}{2} K_{g_t} \cdot a^s_s + \frac{1}{2} a_{pq,}{}^{pq} - \frac{1}{2} a^p{}_{p,}{}^q{}_q$ und $\frac{d}{dt} V_{g_t} = \frac{1}{2} a^s_s \cdot V_{g_t}$ (V_{g_t} ist das Riemannsche Maß von $g(t)$, das in lokalen Koordinaten der Funktion $\sqrt{\det g_{ij}(t)}$ entspricht), woher

$$\frac{d}{dt} \int_M K_{g_t} V_{g_t} = \frac{1}{2} \int_M (a_{pq,}{}^{pq} - a^p{}_{p,}{}^q{}_q) V =$$

$= 0$ wegen der Greenschen Formel; dabei werden die kovarianten Ableitungen und die Kontraktionen bezüglich der Metrik $g(t)$ gebildet. Da man je zwei Metriken auf M mit einer C^∞-Kurve von Metriken verbinden kann (z. B. mit einer geradlinigen Strecke), ist $\int_M K \cdot V_g$ tatsächlich von g unabhängig. Somit kann man die Eulersche Charakteristik

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K \cdot V_g$$

auch für nicht-orientierbare kompakte Flächen M definieren.

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Der Rand hat endlich oder unendlich viele Zusammenhangskomponenten, die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von M sind. Sei M außerdem orientiert. Dann trägt jede Komponente von ∂M eine natürliche Orientierung, die man folgendermaßen definieren kann: für $y \in \partial M$ ist eine Basis $X_2, \dots, X_n$ von $T_y(\partial M)$ genau dann positiv orientiert, wenn für einen nach außen gerichteten Vektor $X_1 \in T_y M \setminus T_y(\partial M)$, $X_1, \dots, X_n$ eine positiv orientierte Basis in $T_y M$ ist. Diese Definition ist sinnvoll: sind $\tilde{X}_1$ und $\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ andere Vektoren mit der gleichen Eigenschaft, so $\tilde{X}_1 = \alpha X_1 +$

$+ \sum_{i=2}^{n} \beta^i X_i$. Die dadurch definierte Zuordnung $T_y M \ni \tilde{X}_1 \to \alpha \in \mathbb{R}$ ist ein lineares Funktional mit Kern $T_y(\partial M)$, d.h. die Komponenten von $T_y M \setminus T_y(\partial M)$ werden durch $\alpha > 0$ bzw. $\alpha < 0$ bestimmt. Da für $\tilde{X}_1 = X_1$, $\alpha = 1$ und $X_1, \tilde{X}_1$ in der gleichen Komponente liegen, ist, für unser $\tilde{X}_1$, $\alpha > 0$.

Nun

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \vdots \\ \tilde{X}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \beta^2 \cdots\cdots \beta^n \\ \hline 0 & \\ \vdots & (a_i{}^j)_{i,j>1} \\ 0 & \end{array}\right] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

und die Determinante dieser Übergangsmatrix, $\alpha \cdot \det (a_i{}^j)_{i,j>1}$, ist positiv, woher, da $\alpha > 0$, auch $\det(a_i{}^j)_{i,j>1}$ positiv ist, also die Basen $X_2, \dots, X_n$

und $\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ von $T_z(\partial M)$ haben eine positive Übergangsdeterminante.

Ist M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und ω eine $(n-1)$-Form der Klasse C^1 mit kompaktem Träger auf M, so kann man die orientierten Integrale $\int_M d\omega$ sowie $\int_{\partial M} \omega$ bilden. Im letzten Integral werden Integrale über die Komponenten von ∂M summiert, wobei wir statt ω eigentlich $\iota^*\omega$ integrieren ($\iota: \partial M \to M$ ist die Inklusionsabbildung). Diese Summe ist endlich, weil der kompakte Träger von ω nur endlich viele Randkomponenten schneidet.

LEMMA von Stokes. Sei ω eine $(n-1)$-Form der Klasse C^1 mit kompaktem Träger auf der n-dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit mit Rand M. Dann ist

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega .$$

Beweis. Mit Hilfe einer endlichen Zerlegung der Eins auf Träger (ω) können wir ω in eine endliche Summe von C^1-Formen mit beliebig kleinen kompakten Trägern zerlegen. Somit dürfen wir annehmen, daß der Träger von ω in einer Koordinatenumgebung $(\mathcal{U}, \varphi) = (\mathcal{U}, x^i)$ liegt, wobei (x^i) orientierte Koordinaten sind und entweder

(a) $\quad \mathcal{U} \cap \partial M = \emptyset$, oder

(b) $U \cap \partial M = \{y \in U : x^1(y) = 0\}$ und $x^1 \geq 0$ in U.

Fall (a): Offenbar $\int\limits_{\partial M} \omega = 0$, während

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_U d\omega = \int\limits_U \left(\partial_1 \omega_{2\ldots n} - \partial_2 \omega_{13\ldots n} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \pm \partial_n \omega_{12\ldots;n-1}\right) = 0,$$ weil ω kompakten Träger hat (hier und später identifizieren wir U mit $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$).

Fall (b): $\int\limits_M d\omega = \int\limits_U d\omega =$

$$= \int\limits_{\{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0\}} \left(\partial_1 \omega_{2\ldots n} - \ldots \pm \partial_n \omega_{12\ldots;n-1}\right).$$

Im letzten Integral verschwinden alle Terme außer dem ersten, weil ω einen kompakten Träger in $\{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0\}$ hat.

Deshalb ist

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0\}} \partial_1 \omega_{2\ldots n} =$$

$$= - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_{2\ldots n}(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Bemerken wir jetzt, daß für unser Koordinatensystem x^i, die Funktionen $x^2, \ldots, x^n$ ein Koordinatensystem für ∂M bilden, und $\omega_{2\ldots n}(0, \cdot, \ldots, \cdot)$ die einzige wesentliche Komponente der auf ∂M eingeschränkten Form ω bezüglich des letzteren ist. Da in den Punkten von $U \cap \partial M$ der Vektor ∂_1 nach <u>innen</u> gerichtet ist, entspricht $x^2, \ldots, x^n$ der <u>negativen</u> Orientierung von ∂M. Also

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega,$$

womit das Lemma bewiesen ist. q.e.d.

LEMMA 32. Sei $f: S^1 \to S^1$ eine C^∞-Abbildung vom Kreis $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ nach $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, wobei die beiden Kreise kanonisch orientiert sind (Drehungssinn nach links). Statt f können wir die 2π-periodische Abbildung $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $|F| = 1$ betrachten, wobei $F(t) = f(\cos t, \sin t)$. Dann ist

$$\deg f = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F'(t)}{F(t)} dt$$

__Beweis.__ Im zweiten Kreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ haben wir die lokal (aber nicht global) definierte "Argumentfunktion" s, die jedem $z \in S^1$ das bis auf Vielfache von 2π bestimmte $s \in \mathbb{R}$

mit $z = e^{is}$ zuordnet. Das Differential ds von s ist dagegen eine global auf S^1 definierte 1-Form (vgl. S. 413) und im positiv orientierten Koordinatensystem $s: S^1 \setminus \{1\} \to (0, 2\pi)$ kann man leicht aus der Definition das orientierte Integral $\int_{S^1} ds$ ausrechnen (da ds in diesem Koordinatensystem die Komponente 1 hat):

$$\int_{S^1} ds = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi.$$

Nach der Definition des Grades ist also (vgl. S. 478) $\int_{S^1} f^*(ds) = 2\pi \cdot \deg f$, d.h.

$$\deg f = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f^*(ds).$$

Da $(0, 2\pi) \ni t \xrightarrow[\Psi]{} (\cos t, \sin t) \in S^1 \setminus \{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist, haben wir $\int\limits_{S^1} f^*(ds) =$

$= \int\limits_{S^1 \setminus \{(1,0)\}} f^*(ds) = \int\limits_{(0,2\pi)} \Psi^* f^*(ds) =$

$= \int\limits_{(0,2\pi)} F^*(ds)$ (weil $F = f \circ \Psi$),

d.h.
$$\deg f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(0,2\pi)} F^*(ds)$$

und, da s auf S^1 lokal, bis auf Addition von Konstanten definiert ist,

$$2\pi \cdot \deg f = \int\limits_{(0,2\pi)} F^*(ds) = \int\limits_{(0,2\pi)} d(F^*s) =$$

$$= \int\limits_{(0,2\pi)} d(s \circ F) = \int\limits_0^{2\pi} (s \circ F)'(t)\, dt.$$

Sei $F(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ mit reellwertigen Funktionen α, β, so daß $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Nun ist das Argument von

$F(t)$, bis auf Vielfache von 2π, $s(F(t)) = \operatorname{arctg} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}$ (bzw. $\operatorname{arcctg} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}$ in Punkten t, wo $\alpha = 0$). Da $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, haben wir somit $(s \circ F)'(t) =$

$$= \alpha(t)\beta'(t) - \beta(t)\alpha'(t) = \frac{1}{i} \frac{F'(t)}{F(t)},$$

also $2\pi \cdot \deg f = \frac{1}{i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{F'}{F}$, womit das Lemma bewiesen ist.

q.e.d.

SATZ 29. Sei E ein orientiertes reelles Ebenenbündel über einer kompakten orientierten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit M. Ist σ ein C^∞-Schnitt von E, der eine endliche Singularitätenmenge N_σ hat (d.h. N_σ ist endlich und σ ist ein in $M \setminus N_\sigma$ definierter C^∞-Schnitt von E, der nirgendwo in

$M \setminus N_\sigma$ verschwindet), so gilt die folgende Indexformel von Poincaré

$$\chi(E) = \sum_{y \in N_\sigma} \mathrm{Index}_y \, \sigma .$$

Beweis. Wählen wir in E eine Fasermetrik g und nehmen an, daß σ bezüglich g normiert ist: $|\sigma| = 1$, indem wir σ durch $\frac{\sigma}{|\sigma|}$ ersetzen (was bekanntlich die Werte von $\mathrm{Index}_y \, \sigma$ für $y \in N_\sigma$ nicht beeinträchtigt, vgl. S. 540). Um alle $y \in N_\sigma$ wählen wir paarweise disjunkte Koordinaten- und Trivialisierungsumgebungen mit festen orientierungstreuen Diffeomorphismen auf die Kreisscheibe vom Radius 2 um 0 in $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ kanonisch orientiert). Bezeichnen wir diese Umgebungen mit $2B_y$ und

nehmen wir die Konvention an, daß für $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon \leq 2$, εB_y die Teilmenge von $2B_y$ ist, die unter unserem Diffeomorphismus (der außerdem y auf $0 \in \mathbb{C}$ abbilden soll) der Kreisscheibe um 0 vom Radius ε entspricht. Für $y \in N_\sigma$ wählen wir einen g-metrischen Zusammenhang $\nabla^{(y)}$ in der Einschränkung von E auf $2B_y$ und eine Funktion $\varphi^{(y)} \in C^\infty(M)$ mit $\varphi^{(y)} = 1$ in $\frac{1}{2} B_y$, $\varphi^{(y)} = 0$ in $M \setminus \frac{3}{4} B_y$. In der offenen Menge $\mathcal{U} = M \setminus \bigcup_{y \in N_\sigma} \frac{1}{4} \overline{B}_y$ ist unser Bündel E trivial, weil es ein komplexes Geradenbündel ist (S. 559-560), daß dort einen C^∞-Schnitt σ ohne Nullstellen zuläßt. Genauer, auf $\mathcal{U}$ gibt es g-orthonormale Basisschnitte σ, $J\sigma$, wobei J die auf S. 559 beschriebene komplexe Struktur ist. Sei $\nabla^{\mathcal{U}}$ der Zusammenhang in der Einschränkung von E auf $\mathcal{U}$, der in der durch σ, $J\sigma$ bestimmten Trivialisierung alle Komponenten gleich 0 hat. Also, $\nabla^{\mathcal{U}}$ ist g-metrisch und es macht σ parallel: $\nabla^{\mathcal{U}}\sigma = 0$ in $\mathcal{U}$. Sei $\varphi^{\mathcal{U}} = 1 - \sum_{y\in N_\sigma} \varphi^{(y)}$, so daß $\varphi^{\mathcal{U}} = 0$ in $\bigcup_{y\in N_\sigma} \frac{1}{2}B_y$. Die Formel

$$\nabla = \varphi^{\mathcal{U}}\nabla^{\mathcal{U}} + \sum_{y\in N_\sigma} \varphi^{(y)}\nabla^{(y)}$$

definiert nun wie auf S. 569 einen g-metrischen Zusammenhang ∇ in E und

$$\nabla\sigma = 0$$

in $M \setminus \bigcup_{y\in N_\sigma} \frac{3}{4} B_y$, weil <u>dort</u> $\varphi^{\mathcal{U}} = 1$, $\varphi^{(y)} = 0$ für $y \in N_\sigma$ und somit $\nabla = \nabla^{\mathcal{U}}$.

Wählen wir in jedem $2B_y$, $y\in N_\sigma$, die euklidischen $\mathbb{C}$-Koordinaten (die unseren festen Diffeomorphismus zwischen $2B_y$ und der Kreisscheibe entsprechen), die wir mit x^j bezeichnen, sowie positiv orientierte orthonormale Basisschnitte e_1, e_2 für E (da die $2B_y$ disjunkt sind, brauchen wir jene mit dem Index y nicht zu versehen). Ist R der Krümmungstensor von ∇, so bilden wir die Krümmungsform $\omega = \omega(g, \nabla)$ mit lokalen Komponenten $\omega_{kj} = R_{kj1}{}^2$ (S. 594, 596). Da in $M \setminus \bigcup_{y\in N_\sigma} \frac{3}{4} B_y$, $\nabla = \nabla^{\mathcal{U}}$ der flache Zusammenhang (mit Komponenten 0) ist, ist dort $R = 0$ und $\omega = 0$. Also

$$2\pi\chi(E) = \int_M \omega = \sum_{y\in N_\sigma} \int_{B_y} \omega .$$

Sei, in $2B_y$, $\zeta_j = -\Gamma_{j1}^{\,2} = \Gamma_{j2}^{\,1}$. Also (S. 604), $\omega = d\zeta$ in $2B_y$, und nach dem Lemma von Stokes in der berandeten Mannigfaltigkeit $\overline{B_y}$,

$$\int_{B_y} \omega = \int_{\overline{B_y}} \omega = \int_{\partial B_y} \zeta .$$

Unser ∂B_y ist ein Einheitskreis um $0 = y$ in $2B_y$; identifiziert man ihn mit $S^1 \subset \mathbb{C}$, so hat man den orientierungstreuen Diffeomorphismus $\varphi : (0, 2\pi) \to S^1 \setminus \{1\}$ mit $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Ist ∂_t das Koordinatenfeld in $(0, 2\pi)$, so hat $\varphi_* \partial_t$ die x^j-Komponenten $\dot\varphi^j(t)$ und somit hat ζ bezüglich der Koordinate φ^{-1} in $S^1 \setminus \{1\}$ die Komponente $\zeta(\varphi_* \partial_t) = \zeta_j(\varphi(t))\dot\varphi^j(t)$

Also
$$\int_{B_y} \omega = \int_{\partial B_y} \zeta = \int_0^{2\pi} \zeta_j(\varphi(t)) \cdot \dot\varphi^j(t) .$$

Wie wir wissen, ist $\nabla\sigma = 0$ in $2B_y \setminus \frac{3}{4}B_y$. Also, $0 = \partial_j \sigma^\alpha + \Gamma_{j\beta}^{\,\alpha}\sigma^\beta$. Da $\Gamma_{j\alpha}^{\,\beta}$ durch $\Gamma_{j1}^{\,2} = -\Gamma_{j2}^{\,1} = -\zeta_j$, $\Gamma_{j1}^{\,1} = \Gamma_{j2}^{\,2} = 0$ gegeben sind (S. 604), bedeutet dies

$$\partial_j \psi = i\zeta_j \psi$$

(Komplexe Multiplikation), wobei $\psi = \sigma^1 + i\sigma^2$, also $|\psi| = 1$.

Sei f die Einschränkung von ψ auf $\partial B_y = S^1$. Also, $f : S^1 \to S^1 \subset \mathbb{C}$ und, nach Definition,

$$\deg f = \mathrm{Index}_y\, \sigma$$

Wegen Lemma 32 ist

$$\deg f = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{F'}{F}$$

mit $F(t) = f(\varphi(t)) = \psi(\varphi(t))$.

Also $F'(t) = \partial_j \psi(\varphi(t)) \cdot \dot\varphi^j(t)$ und, nach der obigen Gleichung,

$$F'(t) = i\,\psi(\varphi(t))\,\zeta_j(\varphi(t))\,\dot{\varphi}^j(t) =$$

$$= i\,F(t)\,\zeta_j(\varphi(t))\,\dot{\varphi}^j(t), \quad \text{woher}$$

$$\mathrm{Index}_y\,\sigma = \deg f = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{F'}{F} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta_j(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}^j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_y}\omega,$$

also

$$\chi(E) = \frac{1}{2\pi}\sum_{y\in N_\sigma}\int_{B_y}\omega = \sum_{y\in N_\sigma}\mathrm{Index}_y\,\sigma.$$

q.e.d.

FOLGERUNG 31. Sei M eine kompakte orientierte zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für jedes orientierte reelle Geradenbündel E über M ist

$$\chi(E) \in \mathbb{Z}$$

und, insbesondere,

$$\chi(M) \in \mathbb{Z}.$$

Somit ist

$$\chi : \mathcal{G}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 29 und aus der Existenz von Schnitten mit endlich vielen Singularitäten (Lemma 28), sowie aus Lemma 31.

q.e.d.

Beispiel. Sei (M,g) eine kompakte, orientierte, zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Setzen wir voraus, daß (M,g) ein Killing-Feld X zuläßt, das nicht identisch verschwindet. Nach c) und d) von S. 543-543 sowie nach Satz 29 ist dann $\chi(M)$ _gleich der Anzahl der Nullstellen von_ X. Also:

a) Ist $\chi(M) < 0$, so ist $X = 0$ das einzige Killingfeld auf M (für jede Metrik g).

b) Ist M mit der Sphäre S^2 diffeomorph, so hat jedes nicht-triviale Killing-Feld X auf (M,g) (g beliebig) genau zwei Nullstellen. Es ist nämlich $\chi(S^2) = 2$, weil $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Einheitssphäre) mit der induzierten Metrik ein Killing-Feld mit genau zwei Nullstellen zuläßt (das der Gruppe der Drehungen um eine Axis entspricht).

c) Für den Torus T^2 sieht man leicht, daß $\chi(T^2) = 0$ (weil z. B. T^2 eine flache Metrik besitzt, vgl. die Gauß-Bonnet-Formel). Somit ist, für jede Metrik g auf T^2 und für jedes Killing-Feld X auf (T^2, g), entweder $X = 0$ identisch, oder $X \neq 0$ überall.

Bemerkung. Im Fall wo $E = TM$ kann man Satz 29 genauso für nicht-orientierbare kompakte Flächen M beweisen (vgl. S. 609 und S. 541).

LEMMA 32. Sei M eine kompakte orientierte zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist der Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \mathcal{G}(M) \to \mathbb{Z}$$

surjektiv (Bezeichnungen: siehe S. 607, 588). In anderen Worten, es gibt orientierte reelle Ebenenbündel über M mit jeder ganzzahliger Euler-Zahl.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{Z}$, $y_0 \in M$. Wir werden ein komplexes Geradenbündel E über M mit einem C^∞-Schnitt σ konstruieren, der in $M \setminus \{y_0\}$ definiert ist und dort nirgendwo verschwindet, während $\operatorname{Index}_{y_0} \sigma = k$.

Dann wird nach Satz 29 $\chi(E) = k$ sein. Bezeichnen wir mit $2B$ eine Umgebung von y_0 in M mit einem festen* Diffeomorphismus auf die Kreisscheibe um $0 \in \mathbb{C}$ vom Radius 2, bei dem y_0 dem Nullpunkt $0 \in \mathbb{C}$ entspricht. In trivialen komplexen Geradenbündeln $(M \setminus \bar{B}) \times \mathbb{C}$, $2B \times \mathbb{C}$ ($B \subset 2B$ ist eine zweimal kleinere konzentrische Kreisscheibe) bilden wir Schnitte τ_1 bzw. τ_2, die als $\mathbb{C}$-wertige Funktionen auf $M \setminus B$ bzw. $2B$ angesehen werden können, mit $\tau_1 = 1$ und

$$\tau_2(y) = \begin{cases} y^k & \text{falls } k \geq 0 \\ \bar{y}^{|k|} & \text{falls } k < 0, \end{cases}$$

wobei wir $y \in 2B$ als eine komplexe Zahl betrachten ($2B$ mit der Kreisscheibe identifiziert). Somit hat τ_1 keine Nullstellen,

---

* orientierungstreuen

τ_2 hat dagegen (höchstens) eine Nullstelle in $y_0 = 0$ mit $\operatorname{Index}_{y_0} \tau_2 = k$ (weil dieser Index der Grad von $S^1 \ni z \longmapsto z^k$ (bzw. $\bar{z}^{|k|}) \in S^1$ ist, S. 485-486). Kleben wir jetzt die Totalräume $(M \setminus \bar{B}) \times \mathbb{C}$, $2B \times \mathbb{C}$ zusammen, indem wir $(y_1, z_1) \in (M \setminus \bar{B}) \times \mathbb{C}$ $(y_2, z_2) \in 2B \times \mathbb{C}$ genau dann identifizieren, wenn $y_1 = y_2$ und $z_2 = \tau_2(y_2) \cdot z_1$. Somit entsteht unser E als Menge, und die Projektion $\pi: E \to M$ wird durch die beiden Produktprojektionen induziert. Die Fasern von π werden kanonisch zu 1-dimensionalen Vektorräumen über $\mathbb{C}$, weil die "zusammengeklebten" Fasern durch Isomorphismen identifiziert wurden (d. h. die Vektorraumstrukturen der Fasern hängen nicht davon ab, aus welchem der Produktbündel man sie genommen hat). Unsere Produktbündel, in

E kanonisch enthalten, liefern uns einen Atlas aus zwei lokalen Trivialisierungen von E, offenbar mit C^∞-Übergangsfunktion. Somit ist E ein komplexes Geradenbündel über M. Bei unserem Zusammenkleben werden die Schnitte τ_1 und τ_2 miteinander über $2B \setminus \bar{B}$ identifiziert. Somit bilden sie einen C^∞-Schnitt σ von E, der nur in y_0 verschwinden kann und $\mathrm{Index}_{y_0} \sigma = k$ hat, weil $\sigma = \tau_2$ in einer Umgebung von y_0.

q. e. d.

Bemerkung. Die gleiche Konstruktion wie im obigen Beweis erlaubt es, folgendes zu beweisen: Sei M eine orientierte Fläche, $y_1, \ldots, y_s$ verschiedene Punkte von M, $k_1, \ldots, k_s$ ganze Zahlen. Dann gibt es ein komplexes Geradenbündel E über M

mit einem C^∞-Schnitt σ, der nur in den Punkten $y_1, \ldots, y_s$ verschwinden kann und $\mathrm{Index}_{y_i} \sigma = k_i$ für $i = 1, \ldots, s$ hat.

LEMMA 33. Sei E ein n-dimensionales reelles Vektorbündel über einer kompakten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es einen C^∞-Schnitt in E mit höchstens einer Singularität (d.h. es gibt $y \in M$ und einen in $M \setminus \{y\}$ definierten C^∞-Schnitt von E der nirgends in $M \setminus \{y\}$ verschwindet).

Beweis. Nach Lemma 28 gibt es in E einen Schnitt σ mit endlich vielen Singularitäten. Nehmen wir an, daß die Anzahl dieser Singularitäten größer als 1 ist; für jedes solche σ werden wir einen neuen Schnitt $\tilde{\sigma}$ konstruieren, der um eine Singularität weniger hat. Nach endlich vielen solchen Schnitten wird unsere Behauptung folgen.

Sei y_1 eine Singularität von σ und wählen wir eine andere Singularität y_2 mit minimalem Abstand von y_1, sowie eine minimale Geodätische $\gamma: [-1,1] \to M$ mit $\gamma(-1) = y_1$, $\gamma(1) = y_2$ (all das für eine feste Riemannsche Metrik auf M). Außer y_1 und y_2 enthält das Bild von γ keine anderen Singularitäten von σ, so daß wir γ auch erweitern können zu einer Geodätischen $\gamma: [-1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon] \to M$ ($\varepsilon > 0$, klein), deren Bild wieder keine neuen Singularitäten von σ enthält. Seien $X_2, \ldots, X_n$ ($n = \dim M$) Vektorfelder längs γ, die zu γ normal, parallel und linear unabhängig sind. Die Abbildung

$$\Phi: [-1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon] \times \mathbb{R}^{n-1} \to M$$

mit $\Phi(t, x^2, \ldots, x^n) = \exp_{\gamma(t)}(x^i X_i(t))$ ist lokal diffeomorph in allen Punkten von $[-1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon] \times \{0\}$, weil $d\Phi_{(t,0)}(\partial_t) = \dot\gamma(t)$ und $d\Phi_{(t,0)}(\partial_i) = X_i(t)$ für $i > 1$. Da Φ in der kompakten Menge $[-1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon] \times \{0\}$ auch injektiv ist, gibt es einen offenen Ball $\tilde U$ um 0 in $\mathbb{R}^{n-1}$ mit der Eigenschaft, daß $\Phi: (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \tilde U \to M$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge V von M ist. Nun ist E auf V trivial: da V bis auf Diffeomorphismus eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, kann man auf V Basisschnitte von E definieren, indem man in einem Punkt eine Basis der Faser wählt und sie längs geradliniger Strecken durch diesen Punkt parallel verschiebt (vgl. S. 571). Für jedes $\lambda > 0$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (t, x) \mapsto$

$\mapsto (t, \lambda x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Ist λ groß genug, so enthält das Bild von $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \tilde{U}$ unter diesem Diffeomorphismus die Abschließung eines Balls B_a vom Radius a um 0 in $\mathbb{R}^n$, der seinerseits $[0,1] \times \{0\}$ enthält. Wir werden gleichzeitig B_a als eine offene Teilmenge in M ansehen, indem wir es mit dem diffeomorphen Bild $\Phi(B_a)$ identifizieren. War $\tilde{U}$ klein genug, so enthält $B_a \subset M$ außer y_1, y_2 keine anderen Singularitäten von σ. Wählen wir $b < a$ mit der Eigenschaft, daß der konzentrische Ball $B_b \subset B_a$ die beiden Punkte y_1, y_2 enthält. Da $B_a \subset V$, ist E auch auf B_a trivial, so daß in B_a unser Schnitt σ durch eine C^∞-Abbildung

$$F : B_a \setminus \{y_1, y_2\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

dargestellt werden kann. Jetzt genügt es eine Abbildung $\tilde{F} : B_a \setminus \{0\} \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zu finden mit $\tilde{F} = F$ in einer Umgebung des

Randes ∂B_a in B_a: dieses $\tilde{F}$ wird einen Schnitt auf $B_a \setminus \{0\}$ darstellen, der mit σ auf $M \setminus B_a$ C^∞ differenzierbar zusammenpaßt und somit einen neuen Schnitt $\tilde{\sigma}$ liefert, der anstelle von y_1, y_2 nur eine Singularität $0 \in B_a$ hat und sonst, in $M \setminus B_a$, dieselben Singularitäten hat wie σ, hat also insgesamt um eine Singularität weniger. Zunächst finden wir einen Diffeomorphismus $\varphi : (b, a) \to (0, a)$ mit $\varphi(s) = s$ für s nahe a: es gibt bestimmt $h : [b, a] \xrightarrow[C^\infty]{} (0, \infty)$ mit $h = 1$ nahe a und $\int_b^a h = a$, so daß wir $\varphi(s) = \int_b^s h$ setzen können. Jetzt definieren wir einen Diffeomorphismus $\Psi : B_a \setminus \overline{B}_b \to B_a \setminus \{0\}$ mit $\Psi = Id$ nahe ∂B_a: wir setzen einfach $\Psi(x) = \varphi(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$ (also,

$\Psi^{-1}(z) = \varphi^{-1}(|z|)\cdot\frac{z}{|z|}$, so daß Ψ tatsächlich ein Diffeomorphismus ist). Nun definieren wir $\tilde{F}: B_a \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch $\tilde{F}(x) = F(\Psi^{-1}(x))$. Für x nahe ∂B_a ist $\Psi^{-1}(x) = x$ und somit $\tilde{F}(x) = F(x)$. Dieses $\tilde{F}$ liefert, wie oben erwähnt, den gesuchten Schnitt $\tilde{\sigma}$.

q. e. d.

SATZ 30. Sei M eine kompakte orientierte zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\chi : \mathcal{G}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenisomorphismus (Bezeichnungen: siehe S. 607, 588). In anderen Worten, ein orientiertes reelles Ebenenbündel E über M ist bis auf orientierungstreuen Bündelisomorphismus durch seine Euler-Zahl bestimmt, die ihrerseits eine beliebige ganze Zahl sein kann. Insbesondere, so ein Bündel E mit $\chi(E) = 0$ muß trivial sein.

Beweis. Wegen Lemma 32 brauchen wir nur zu zeigen, daß $\chi : \mathcal{G}(M) \to \mathbb{Z}$ injektiv ist, d. h. daß ein orientiertes reelles Ebenenbündel E mit $\chi(E) = 0$ trivial sein muß. Sei E ein solches Bündel. Nach Lemma 33 gibt es $y \in M$ und einen in $M \setminus \{y\}$ definierten C^∞-Schnitt σ von E, der in $M \setminus \{y\}$ keine Nullstellen hat. Wir dürfen in E eine Fasermetrik g wählen und annehmen, daß $|\sigma| = 1$ in $M \setminus \{y\}$, indem wir unser σ normieren. Wählen wir eine Umgebung B von y, die wir durch einen festen orientierungstreuen Diffeomorphismus mit dem Ball vom Radius 2 um 0 in $\mathbb{C}$ identifizieren können, so daß y dem Punkt $0 \in \mathbb{C}$ entspricht, sowie eine mit g verträgliche

Trivialisierung von E auf B (mit positiv orientierten orthonormalen Basisschnitten). Nun entspricht σ auf B einer C^∞-Abbildung $h : B \setminus \{0\} \to S^1 \subset \mathbb{C}$. Wir werden $\tilde{h} : B \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ finden mit $\tilde{h} = h$ nahe ∂B in B: dieses $\tilde{h}$ wird einem Schnitt auf B entsprechen, der mit σ auf $M \setminus B$ einen neuen C^∞-Schnitt $\tilde{\sigma}$ von E liefert; da $\tilde{\sigma}$ keine Nullstellen hat, wird das komplexe Geradenbündel E notwendigerweise trivial sein.

Wegen $\chi(E) = 0$ haben wir, nach Satz 29, $\mathrm{Index}_y\, \sigma = 0$. Sei f die Einschränkung von h auf den Einheitskreis $S^1 \subset B$. Somit ist $\mathrm{Index}_y\, \sigma$ der Abbildungsgrad von $f : S^1 \to S^1$. Ist $0 < \varepsilon < 2$, so haben wir auch $f_\varepsilon : S^1 \to S^1$ mit $f_\varepsilon(z) = h(\varepsilon z)$ (also $f = f_1$). Da der Index von σ in y als der Grad

der Einschränkung von h auf beliebige Kreise um $y = 0$ interpretiert werden kann, ist auch $\deg f_\varepsilon = 0$ für $0 < \varepsilon < 2$. Für $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in (0,2)$ sei $F(\varepsilon, t) = f_\varepsilon(\cos t, \sin t) = h(\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)$. Nach Lemma 32 ist also, für $0 < \varepsilon < 2$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{F(\varepsilon, t)} \cdot \frac{d}{dt} F(\varepsilon, t)\, dt = 0,$$

wobei $F : (0,2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ als eine komplexwertige Funktion mit $|F| = 1$ angesehen wird. Definieren wir

$$\Psi : (0,2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

durch

$$\Psi(\varepsilon, t_0) = \int_0^{t_0} \frac{1}{F(\varepsilon, t)} \frac{d}{dt} F(\varepsilon, t)\, dt.$$

Da F selbst 2π-periodisch bezüglich t ist, folgt aus der obigen Formel, daß Ψ dieselbe Eigenschaft haben muß.

$\Psi(\varepsilon, t+2\pi) = \Psi(\varepsilon, t)$. Dies bedeutet nichts anderes, als die Existenz von

$$Q: B \setminus \{0\} \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{C}$$

mit $\Psi(\varepsilon, t) = Q(\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)$. Außerdem

$$\frac{d}{dt}\Psi(\varepsilon, t) = \frac{1}{F(\varepsilon, t)} \frac{d}{dt} F(\varepsilon, t),$$ woher

$$\frac{d}{dt}\left(F(\varepsilon, t) e^{-\Psi(\varepsilon, t)}\right) = 0$$; in anderen Worten,

$$F(\varepsilon, t) = \varphi(\varepsilon) e^{\Psi(\varepsilon, t)}$$

mit einer C^∞ Funktion $\varphi: (0,2) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Sei $z \in B \setminus \{0\}$. Also finden wir $\varepsilon \in (0,2)$, $t \in \mathbb{R}$ mit $z = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)$, woher $F(\varepsilon, t) = h(z)$, $e^{\Psi(\varepsilon, t)} = Q(z)$ und die letzte Gleichung ergibt

$$h(z) = \varphi(|z|) e^{Q(z)}$$

für $z \in B \setminus \{0\}$, mit $\varphi: (0,2) \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{C}$ und $Q: B \setminus \{0\} \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{C}$. Offenbar gibt es $\tilde{\varphi}: (0,2) \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{C}$, $\tilde{Q}: B \setminus \{0\} \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{C}$

mit $\tilde{\varphi} \neq 0$ überall, $\tilde{\varphi} = \varphi$ auf $(1,2)$ und $\tilde{\varphi} = 1$ auf $(0, \delta)$ ($\delta > 0$ klein), sowie $\tilde{Q} = Q$ nahe ∂B und $\tilde{Q} = 0$ nahe 0 (man multipliziert Q mit einer geeigneten Funktion von $|z|$). Die Abbildung

$$\tilde{h}: B \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

mit $\tilde{h}(z) = \tilde{\varphi}(|z|) e^{\tilde{Q}(z)}$ hat also $\tilde{h} = h$ nahe ∂B, $\tilde{h} \neq 0$ überall und $\tilde{h} = 1$ nahe 0; somit kann man $\tilde{h}$ C^∞-differenzierbar zu einer Abbildung

$$\tilde{h}: B \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

fortsetzen, die die gewünschten Eigenschaften hat (S. 641).

q.e.d.

Differentialoperatoren in Vektorbündeln.

Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M. Unter einem Differentialoperator der Ordnung k von E nach E' verstehen wir eine lineare Abbildung

$$P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$$

($\Gamma(E)$ ist der reelle bzw. komplexe Vektorraum aller C^∞-Schnitte von E) mit der folgenden Eigenschaft: für jede offene Menge $U \subset M$ wo es Koordinaten x^i für M sowie lokale Trivialisierungen für E und E' gibt (die Basisschnitten e_α für E, e_a für E' entsprechen) gibt es die folgende Komponentendarstellung für P:

$$(P\sigma)^a = \underset{(k)}{H}{}^{a}{}_{\alpha}{}^{j_1 \cdots j_k} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} \sigma^\alpha +$$

$$+ \underset{(k-1)}{H}{}^{a}{}_{\alpha}{}^{j_1 \cdots j_{k-1}} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{k-1}} \sigma^\alpha + \cdots$$

$$\cdots + \underset{(1)}{H}{}^{a}{}_{\alpha}{}^{j} \partial_j \sigma^\alpha + \underset{(0)}{H}{}^{a}{}_{\alpha} \sigma^\alpha$$

für $\sigma \in \Gamma(E)$ mit gewissen (von σ unabhängigen) C^∞-differenzierbaren reell- bzw. komplexwertigen Koeffizientenfunktionen $\underset{(s)}{H}{}^{a}{}_{\alpha}{}^{j_1 \cdots j_s} : U \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Bemerkungen.

(a) Da $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_s} \sigma^\alpha$ in $j_1, \ldots, j_s$ symmetrisch ist, darf man immer annehmen, daß die Koeffizientenfunktionen $\underset{(s)}{H}{}^{a}{}_{\alpha}{}^{j_1 \cdots j_s}$ in $j_1, \ldots, j_s$ symmetrisch sind, indem man sie symmetrisiert (von nun an werden wir dies immer tun). Damit sind die Koeffizientenfunktionen durch die x^i, e_α, e_a sowie P eindeutig bestimmt (vgl. S. 131-132).

(b) Ersetzt man x^i, e_α, e_a durch $x^{i'}$, $e_{\alpha'}, e_{a'}$, so folgt aus der obigen Darstellung von P mit $\partial_j = A_j^{j'}\partial_{j'}$, $(P\sigma)^{a'} = A_a^{a'}(P\sigma)^a$, $\sigma^\alpha = A_{\alpha'}^\alpha \sigma^{\alpha'}$, daß

$$(P\sigma)^{a'} = A_a^{a'}\Big(\underset{(k)}{H}{}^{a\ j_1\cdots j_k}_{\alpha}(A_{j_1}^{j_1'}\partial_{j_1'})\cdots(A_{j_k}^{j_k'}\partial_{j_k'})(A_{\alpha'}^{\alpha}\sigma^{\alpha'})+$$

$$+\ldots\Big) = \Big(A_a^{a'}A_{\alpha'}^{\alpha}A_{j_1}^{j_1'}\cdots A_{j_k}^{j_k'}\underset{(k)}{H}{}^{a\ j_1\cdots j_k}_{\alpha}\Big)\partial_{j_1'}\cdots\partial_{j_k'}\sigma^{\alpha'}+$$

+ (Kombinationen von $\partial_{j_1'}\cdots\partial_{j_s'}\sigma^{\alpha'}$ mit von σ unabhängigen Koeffizienten, $s=0,\ldots,k-1$).

Somit ist der Begriff Differentialoperator geometrisch: um zu prüfen, daß P ein Differentialoperator ist, genügt es dies in <u>einem</u> Atlas aus Koordinaten- und Trivialisierungsumgebungen zu machen.

Außerdem bilden die Koeffizientenfunktionen der höchsten Ordnung k ein Tensor-

feld (wobei man immer ihre Symmetrie bezüglich $j_1, \ldots, j_k$ annimmt); nach der obigen Formel, haben sie die Transformationsregel

$$\underset{(k)}{H}{}^{a'\ j_1'\cdots j_k'}_{\alpha'} = A_a^{a'}A_{\alpha'}^{\alpha}A_{j_1}^{j_1'}\cdots A_{j_k}^{j_k'}\underset{(k)}{H}{}^{a\ j_1\cdots j_k}_{\alpha},$$

sie stellen also die lokalen Komponenten eines Schnitts $\underset{k}{H}$ von $E'\otimes E^*\otimes\underbrace{TM\otimes\ldots\otimes TM}_{k\text{-fach}} =$

$= \mathrm{Hom}(E,E')\otimes TM\otimes\ldots\otimes TM$ dar. Die gesamte Symmetrie bedeutet sogar, daß $\underset{(k)}{H}$ im spezielleren Unterbündel $\mathrm{Hom}(E,E')\otimes S^kTM$ liegt (es ist klar, wie man dabei die sog. k-te symmetrische Potenz S^kTM von TM definiert). Dieses $\underset{k}{H}$ nennt man das k-<u>Symbol</u> von P und bezeichnet mit $\sigma_{P,k}$. Für $\xi\in T_y^*M$, $y\in M$, bildet man $\sigma_{P,k,\xi} \in \mathrm{Hom}(E_y, E'_y)$ durch

$$\sigma_{P,k,\xi} = \sigma_{P,k}(\cdot\,,\cdot\,,\underbrace{\xi,\dots,\xi}_{k\text{-fach}})\,,$$

d.h., komponentenweise,

$$\sigma_{P,k,\xi}(e_\alpha) = \underset{(k)}{H}{}_\alpha^{a\;j_1\dots j_k}\,\xi_{j_1}\dots\xi_{j_k}\,e_a\,.$$

Es kann passieren, daß für unser P, $\sigma_{P,k} = 0$ identisch. Dann ist P auch ein Differentialoperator der Ordnung $k-1$. Ist $P \not\equiv 0$, so findet man das kleinste k mit der Eigenschaft, daß P ein Differentialoperator der Ordnung k ist; man nennt dieses k die *wesentliche Ordnung* von P. Dann ist $\sigma_{P,k} \not\equiv 0$ irgendwo in M; man nennt $\sigma_P = \sigma_{P,k}$ das (wesentliche) *Symbol* von P. Für $\xi \in T^*M$ schreibt man $\sigma_{P,\xi} = \sigma_{P,k,\xi}$.

Beispiele von Differentialoperatoren.

a) Differentialoperatoren auf Funktionen (also mit $E = E' = M \times \mathbb{R}$ oder $M \times \mathbb{C}$). Siehe S. 127 und ff.

b) Differentialoperatoren $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ der Ordnung 0: es sind einfach die Bündelhomomorphismen $E \to E'$,

c) Die Summe zweier Differentialoperatoren $P_1, P_2 : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ von wesentlichen Ordnungen k_1, k_2 ist ein Differentialoperator $P_1 + P_2$. Ist $P_1 \not\equiv -P_2$, so hat $P_1 + P_2$ die wesentliche Ordnung $k = \max(k_1, k_2)$ (falls $k_1 \neq k_2$) oder $k \leq k_1$ (falls $k_1 = k_2$), und es ist klar, wie sein Symbol aussieht.

d) Die Komposition $P_2 \circ P_1$ zweier Differentialoperatoren $P_1 : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$, $P_2 : \Gamma(E') \to \Gamma(E'')$ von wesentlichen Ordnungen k_1, k_2 ist ein Differentialoperator von wesentlicher Ordnung $k \leq k_1 + k_2$ und, für $\xi \in T^*M$,

$$\sigma_{P_2 \circ P_1, k_1+k_2, \xi} = \sigma_{P_2, k_2, \xi} \circ \sigma_{P_1, k_1, \xi}$$

was man leicht sieht mit Hilfe der nicht-symmetrisierten lokalen Darstellungen für P_1, P_2 (die sich genauso gut wie die symmetrisierten für die Bestimmung der Größe $\sigma_{P,k,\xi}$ eignen).

e) Seien E, E' Vektorbündel über M, ∇ ein Zusammenhang* in E, $H \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E,E') \otimes S^k TM)$ ein "abstraktes" Symbol. Dann ist $P = \langle H, \nabla^k \rangle$ mit $P\sigma = \langle H, \nabla^k \sigma \rangle$, d.h. komponentenweise

$$(P\sigma)^a = H^{a}_{\alpha}{}^{j_1 \dots j_k} \sigma^\alpha{}_{, j_1 \dots j_k}$$

ein Differentialoperator der Ordnung k mit $\sigma_{P,k} = H$. Um dies festzustellen, bemerken wir, daß $\sigma^\alpha{}_{, j_1 \dots j_k} = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} \sigma^\alpha +$ + (Kombinationen von $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} \sigma^\beta$, $s \le k$,

* und sei auch ein Zusammenhang in TM gegeben.

mit von σ unabhängigen Koeffizientenfunktionen); Beweis durch Induktion.

<u>Definition</u>. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über M, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator, $P \neq 0$.

(i) P hat <u>injektives Symbol</u> wenn, für alle $y \in M$ und $\xi \in T_y^* M \setminus \{0\}$, $\sigma_{P,\xi} \in \mathrm{Hom}(E_y, E'_y)$ injektiv ist.

(ii) P hat <u>surjektives Symbol</u> wenn, für $y \in M$ und $\xi \in T_y^* M \setminus \{0\}$, $\sigma_{P,\xi} \in$ $\in \mathrm{Hom}(E_y, E'_y)$ surjektiv ist.

(iii) P ist <u>elliptisch</u> wenn, für $y \in M$ und $\xi \in T_y^* M \setminus \{0\}$, $\sigma_{P,\xi} \in \mathrm{Hom}(E_y, E'_y)$ ein Isomorphismus ist (also, wenn P gleichzeitig injektives und surjektives Symbol hat).

Die Injektivität des Symbols (sowie die Surjektivität des Symbols, bzw. Elliptizität) bleibt also erhalten bei Kompositionen von Differentialoperatoren.

Das Symbol eines Differentialoperators P der Ordnung k ist sehr leicht zu bestimmen: hat man eine lokale Darstellung von P als Kombination der partiellen Ableitungen (bzw. kovarianten Ableitungen, vgl. S. 651), so entsteht $\sigma_{P,k,\xi}$ dadurch, daß man den Teil der höchsten Ordnung nimmt und jede Differentiation ∂_j (bzw. ∇_j) durch die Multiplikation mit ξ_j ersetzt.

<u>Weitere Beispiele von Differentialoperatoren.</u>

a) Das Differential auf Funktionen. Für eine Mannigfaltigkeit M ist

$d: C^\infty(M) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) \to \Gamma(T^*M) = \Omega^1 M$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 1 (lokale Darstellung: $(df)_i = \partial_i f$, mit dem Symbol $\sigma_{d,\xi}(\lambda) = \lambda\xi$ für $\xi \in T_yM$ (weil $(\sigma_{d,\xi}(\lambda))_i = \xi_i \lambda$), also mit injektivem Symbol ($\sigma_{d,\xi}: \mathbb{R} \to T_y^*M$ injektiv für $\xi \in T_y^*M \setminus \{0\}$).

b) Die äußere Ableitung. Für eine Mannigfaltigkeit M ist $d: \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 1. Lokale Darstellung:

$(d\omega)_{i_0 \dots i_k} = \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} - \dots \pm \partial_{i_k} \omega_{i_0 \dots i_{k-1}}$

also, für das Symbol $\sigma_{d,\xi}: (\Lambda^k M)_y \to (\Lambda^{k+1} M)_y$ $(\xi \in T_y^* M = (\Lambda^1 M)_y)$,

$(\sigma_{d,\xi}\omega)_{i_0 \dots i_k} = \xi_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} - \dots \pm \xi_{i_k} \omega_{i_0 \dots i_{k-1}}$

d. h. $\sigma_{d,\xi}\,\omega = \xi \wedge \omega$.

c) Die kovariante Ableitung. Sei ∇ ein Zusammenhang im Vektorbündel E über M. Dann ist $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 1. Lokale Darstellung: $(\nabla\tau)^\alpha{}_i = \tau^\alpha{}_{,i} = \partial_i \tau^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta}\tau^\beta$, woher das Symbol $(\sigma_{\nabla,\xi}\tau)^\alpha_i = \xi_i \tau^\alpha$, d. h. $\sigma_{\nabla,\xi} : E_y \to T^*_y M \otimes E_y$, für $y \in M$, mit $\sigma_{\nabla,\xi}(\tau) = \xi \otimes \tau$ (injektives Symbol). Die k-fache Iteration* $\nabla^k : \Gamma(E) \to$
$\to \Gamma(\underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{k\text{-fach}} \otimes E)$ hat also auch das injektive Symbol $\sigma_{\nabla^k,\xi}(\tau) =$
$= \xi \otimes \ldots \otimes \xi \otimes \tau$.

* definiert mit Hilfe eines festen Zusammenhangs in TM

d) Die Divergenz von Vektorfeldern. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Divergenz $\delta : \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ ist ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 1. Lokale Darstellung: $\delta X = -X^i{}_{,i} = -\nabla_i X^i$. Symbol: $\sigma_{\delta,\xi} : T_y M \to \mathbb{R}$ für $\xi \in T^*_y M$ mit $\sigma_{\delta,\xi}(X) = -\xi_i X^i = -\xi(X)$. Somit hat δ surjektives Symbol.

e) Sei (M,g) eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Bezeichnen wir mit $S^2_0(TM)$ das Bündel aller spurfreien symmetrischen $(0,2)$-Tensoren auf M (also, aller Tensoren a mit $a_{ij} = a_{ji}$, $g^{ij}a_{ij} = 0$). $S^2_0(TM)$ hat (reelle) Faserdimension 2. Der Divergenzoperator $\delta : \Gamma(S_0^2(TM)) \to \Gamma(T^*M)$ mit $(\delta a)_i = -a_{is,}{}^s$ ist ein Differential-operator der wesentlichen Ordnung 1. Symbol: $\sigma_{\delta,\xi} : S_0^2(TM)_y \to T_y^*M$ mit $(\sigma_{\delta,\xi}(a))_i = -a_{is}\xi^s$, d.h. $\sigma_{\delta,\xi}(a) = -a(\cdot,\xi)$ für $\xi \in T_y^*M$. Somit hat δ injektives Symbol, weil in der Dimension 2 ein selbstadjungierter <u>spurfreier</u> Endomorphismus mit nicht-trivialem Kern trivial sein muß. Da die beiden Bündel dieselbe Faserdimension 2 haben, muß δ also <u>elliptisch</u> sein. Deshalb, im Gegensatz zum Fall der elliptischen Operatoren auf Funktionen (S. 135), kann es in Vektorbündeln auch elliptische Operatoren der wesentlichen Ordnung 1 geben.

<u>Bemerkung</u>. Gibt es einen elliptischen Operator $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ zwischen den Vektorbündeln E, E' über M, so müssen E und E' zwar dieselbe Faserdimension haben, brauchen aber nicht isomorph zu sein. Dies ist der Fall für Beispiel e) oben mit $M = S^2$. Um dies zu sehen, betrachten wir allgemeiner ein orientiertes reelles Ebenenbündel E über einer Mannigfaltigkeit M (von beliebiger Dimension), mit einer festen Fasermetrik g, und sei $S_0^2(E)$ das Bündel aller $a \in E^* \otimes E^*$ mit $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ und $g^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} = 0$. In E haben wir die durch g und die Orientierung bestimmte komplexe Struktur J (S. 559-560). Nun können wir auch in $S_0^2(E)$ eine, ebenfalls mit J bezeichnete

komplexe Struktur definieren. Es ist nämlich

$$a(\sigma,\sigma) + a(J\sigma, J\sigma) = 0$$

für $a \in (S_0^2(E))_y$, $\sigma \in E_y$, $y \in M$. Um dies zu sehen, dürfen wir $|\sigma| = 1$ annehmen, so daß σ, $J\sigma$ eine Orthonormalbasis von E_y ist und somit bedeutet die obige Gleichung genau $\mathrm{Spur}(a) = 0$. Für $a \in (S_0^2(E))_y$ sei nun $(Ja)(\sigma,\tau) = a(J\sigma,\tau)$. Nach der obigen Gleichung ist $(Ja)(\sigma,\tau) = a(J\sigma,\tau) = -a(JJ\sigma, J\tau) = a(\sigma, J\tau) = (Ja)(\tau,\sigma)$ (weil $J \circ J = -Id$), so daß Ja symmetrisch ist, während $(Ja)(\sigma,\sigma) + (Ja)(J\sigma,J\sigma) = a(J\sigma,\sigma) + a(JJ\sigma, J\sigma) = a(J\sigma,\sigma) - a(\sigma, J\sigma) = 0$, d.h. Ja ist spurfrei. Somit ist auch $Ja \in (S_0^2(E))_y$ und dieses J ist offenbar eine komplexe Struktur in $S_0^2(E)$, weil $J(Ja) = -a$. Nun kann $S_0^2(E)$ als ein komplexes Geradenbündel, insbesondere als orientiertes reelles Ebenenbündel angesehen werden. Wir werden

einen (komplexen) Isomorphismus

$$\Phi : S_0^2(E) \to E^* \otimes E^*$$

definieren, wobei E^* für das komplexe Dual von E und $\otimes$ für das komplexe Tensorprodukt steht. Φ soll also jedem $a \in (S_0^2(E))_y$ $(y \in M)$ eine $\mathbb{C}$-bilineare Abbildung $\Phi a : E_y \times E_y \to \mathbb{C}$ zuordnen. Setzen wir, für $\sigma, \tau \in E_y$, $a \in (S_0^2(E))_y$,

$$(\Phi a)(\sigma,\tau) = a(\sigma,\tau) - i a(\sigma, J\tau).$$

Wegen der Gleichung auf S. 659 ist nun $(\Phi a)(J\sigma,\tau) = (\Phi a)(\sigma, J\tau) = (\Phi(Ja))(\sigma,\tau) = i(\Phi a)(\sigma,\tau)$, so daß Φa $\mathbb{C}$-bilinear ist, d.h. $\Phi a \in E_y^* \otimes E_y^*$, und $\Phi : (S_0^2(E))_y \to E_y^* \otimes E_y^*$ ist $\mathbb{C}$-linear. Dieses Φ ist auch ein Isomorphismus, weil $a = \mathrm{Re}\, \Phi a$ für $a \in S_0^2(E)$.

Wegen $S_0^2(E) \cong E^* \otimes E^*$ haben wir also (Lemma 31), falls M kompakt ist,

$$eu(S_0^2(E)) = -2eu(E)$$

und insbesondere, falls M zwei-dimensional, kompakt und orientiert ist

$$\chi(S_0^2(E)) = -2\chi(E).$$

Ist nun E nicht-trivial (was für $E = TS^2$ bekanntlich der Fall ist, z. B. $\chi(TS^2) = 2$), so darf es nach Satz 30 keinen Bündelisomorphismus zwischen E und $S_0^2(E)$ geben (auch nicht einen orientierungsumkehrenden, weil $|\chi(E)| \neq |\chi(S_0^2(E))|$). Somit sind die Bündel $S_0^2(TS^2)$ und T^*S^2 nicht isomorph, obwohl es zwischen ihnen einen elliptischen Operator gibt.

SATZ von Lichnerowicz. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über M und sei ein Zusammenhang ∇ in E sowie ein fester Zusammenhang in TM

gegeben. Für jeden Differentialoperator $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ der Ordnung k gibt es eindeutig bestimmte Schnitte

$$\underset{s}{H} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E,E') \otimes S^s TM), \quad s = 0, \dots, k$$

mit $P = \langle \underset{k}{H}, \nabla^k \rangle + \dots + \langle \underset{1}{H}, \nabla \rangle + \langle \underset{0}{H}, \nabla^0 \rangle$, wobei $\underset{k}{H} = \sigma_{P,k}$ und $\nabla^0 \sigma = \sigma$.

<u>Beweis</u>. Sei $\underset{k}{H} = \sigma_{P,k}$. Der Differentialoperator $P - \langle \underset{k}{H}, \nabla^k \rangle$ hat die Ordnung $k-1$. Sei $\underset{k-1}{H}$ sein $(k-1)$-Symbol. Also hat $P - \langle \underset{k}{H}, \nabla^k \rangle - \langle \underset{k-1}{H}, \nabla^{k-1} \rangle$ die Ordnung $k-2$, usw.

q. e. d.

Seien nun E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel mit festen Fasermetriken (die wir diesmal mit $\langle\, ,\, \rangle$ bzw. $\langle\, ,\, \rangle'$ bezeichnen) über der

Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und sei $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der Ordnung k. Eine lineare Abbildung $Q : \Gamma(E') \to \Gamma(E)$ heißt formal adjungiert zu P, wenn

$$\int_M \langle P\sigma, \tau \rangle' V_g = \int_M \langle \sigma, Q\tau \rangle V_g$$

für alle $\sigma \in \Gamma_0(E)$, $\tau \in \Gamma(E')$, wobei $\Gamma_0(E)$ der Raum aller C^∞-Schnitte von E mit kompakten Trägern ist. So ein Q, falls es existiert, ist eindeutig bestimmt: sind Q_1, Q_2 zwei solche Operatoren für P, so hat $T = Q_1 - Q_2$ die Eigenschaft, daß $\int_M \langle \sigma, T\tau \rangle V_g = 0$ für alle $\sigma \in \Gamma_0(E)$, $\tau \in \Gamma(E')$. Bei festem τ, sei $\varphi \in C_0^\infty(M)$ und $\sigma = \varphi T\tau$: also, $\int_M \varphi |T\tau|^2 V_g = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(M)$, woher (Lemma 7, S. 179), $|T\tau|^2 = 0$,

für alle $\tau \in \Gamma(E')$ und somit $T = 0$. Falls M kompakt ist (genauer, falls es in E, E' metrische Zusammenhänge für $\langle\, ,\rangle, \langle\, ,\rangle'$ gibt; die Kompaktheitsvoraussetzung hat hier ohnehin nur technischen Charakter), muß es für jeden solchen Operator P den formal adjungierten Operator $Q = P^*$ geben, der ebenfalls ein Differentialoperator der Ordnung k ist und $\sigma_{\xi, P^*, k} = (-1)^k (\sigma_{\xi, P, k})^*$ für $\xi \in T^*M$. Außerdem gilt die P^* definierende Gleichung auch für $\sigma \in \Gamma(E)$ und $\tau \in \Gamma_0(E')$, während $(P_1 + P_2)^* = P_1^* + P_2^*$, $(P_2 \circ P_1)^* = P_1^* \circ P_2^*$ und $P^{**} = P$, $(\lambda P)^* = \bar{\lambda} \cdot P^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Alle diese Eigenschaften beweist man wie auf S. 190-191 (vgl. Aufgabenliste $\boxed{\text{VIII}}$), was dadurch ermöglicht wird, daß wir metrische Zusammenhänge verwenden, also man kann partiell integrieren auch wenn das Skalarprodukt von Schnitten statt der Multiplikation der Funktionen unter dem Integralzeichen steht.

Sei nun (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $k = 0, \dots, n = \dim M$ trägt das Bündel $\Lambda^k M$ der k-Formen auf M den natürlichen Riemannschen Zusammenhang (Spezialfall der kovarianten Differentiation von beliebigen Tensorfeldern) und die damit verträgliche, durch g bestimmte Fasermetrik. Es ist jedoch bequemer das gewöhnliche Skalarprodukt (wie für alle Tensoren) in diesem Fall mit einem Faktor zu versehen. Somit definieren wir die Fasermetrik $\langle \, , \, \rangle$ in $\Lambda^k M$ durch

$$\langle \omega, \eta \rangle = \frac{1}{k!} \, \omega_{i_1 \dots i_k} \eta^{i_1 \dots i_k}$$

so daß, für $\omega \in (\Lambda^k M)_y$ und für Koordinaten x^i um y, deren Basisfelder ∂_i in y eine Orthonormalbasis von $T_y M$ liefern,

$$|\omega|^2 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k})^2 .$$

Der Operator $d : \Omega^{k-1} M \to \Omega^k M$ hat, bezüglich dieser Fasermetriken und g den formal adjungierten Operator d^*.

<u>Behauptung</u>. Der Operator $d^* : \Omega^k M \to \Omega^{k-1} M$ stimmt mit dem <u>Divergenzoperator</u> δ überein,

$$d^* = \delta$$

wobei, in lokalen Koordinaten,

$$(\delta \eta)_{i_2 \dots i_k} = - \nabla^{i_1} \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

für $\eta \in \Omega^k M$.

Tatsächlich, für $\omega \in \Omega_0^{k-1}M$ (der Raum der C^∞-(k-1)-Formen mit kompakten Trägern) und $\eta \in \Omega^k M$ ist

$$\int_M \langle d\omega, \eta\rangle = \frac{1}{k!}\int_M (\nabla_{i_1}\omega_{i_2\dots i_k} - \nabla_{i_2}\omega_{i_1 i_3\dots i_k} + \dots \pm \nabla_{i_k}\omega_{i_1\dots i_{k-1}})\eta^{i_1\dots i_k}$$

Wegen der Schief-Symmetrie von η sind alle k Terme im letzten Integral gleich, also

$$\int_M \langle d\omega,\eta\rangle = \frac{1}{(k-1)!}\int_M \nabla_{i_1}\omega_{i_2\dots i_k}\cdot \eta^{i_1\dots i_k} =$$

$$= -\frac{1}{(k-1)!}\int_M \omega_{i_2\dots i_k}\cdot\nabla_{i_1}\eta^{i_1\dots i_k} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_M \omega_{i_2\dots i_k}(\delta\eta)^{i_2\dots i_k} = \int_M \langle\omega,\delta\eta\rangle,$$

woher $\delta = d^*$.

<u>Bemerkung</u>. Für $k=1$ ist natürlich $\delta = d^*: \Omega^k M \to \Omega^{k-1}M$ gleich Null.

<u>Bemerkung</u>. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über M, $P: \Gamma(E)\to\Gamma(E')$ ein Differentialoperator und seien Fasermetriken in E, E' und TM gegeben.

(i) Hat P injektives Symbol, so hat P^* surjektives Symbol und $P^*\circ P: \Gamma(E)\to\Gamma(E)$ ist elliptisch und formal selbstadjungiert ($(P^*\circ P)^* = P^*\circ P$).

(ii) Hat P surjektives Symbol, so hat P^* injektives Symbol, während $P\circ P^*: \Gamma(E')\to\Gamma(E')$ elliptisch und formal selbstadjungiert ist.

(iii) Ist P elliptisch, so muß auch P^* elliptisch sein.

Diese Behauptungen folgen sofort aus unseren Formeln für das Symbol des formal adjungierten Operators sowie der Komposition (S. 664, 650) zusammen mit der folgenden linear-algebraischen Tatsache:

Ist $A: V \to W$ eine injektive (bzw. surjektive) lineare Abbildung zwischen euklidischen oder unitären (endlich dimensionalen) Vektorräumen V, W, so ist $A^*: W \to V$ surjektiv (bzw. injektiv) und $A^* \circ A$ (bzw. $A \circ A^*$) ist ein Isomorphismus.

Seien nun E', E, E'' reelle oder komplexe Vektorbündel über M (alle, sowie TM, mit festen Fasermetriken versehen) und seien Differentialoperatoren P, Q,

$$\Gamma(E') \xrightarrow[P]{} \Gamma(E) \xrightarrow[Q]{} \Gamma(E'')$$

der gleichen (nicht unbedingt wesentlichen) Ordnung k gegeben. Setzen wir voraus, daß

$$\operatorname{Im} \sigma_{P,k,\xi} = \operatorname{Ker} \sigma_{Q,k,\xi}$$

für alle $y \in M$ und alle $\xi \in T_y^*M \setminus \{0\}$. Dabei darf E' oder E'' die Faserdimen-

sion Null haben. Diese Voraussetzung gilt z. B. für $E' = \Lambda^{k-1}M$, $E = \Lambda^k M$, $E'' = \Lambda^{k+1}M$ und $P = d$, $Q = d$ (vgl. S. 655 und Aufgabe <u>XIV</u>. 3), sowie auch im Fall wo $P = 0$ (z. B. E' Null-dimensional) und Q injektives Symbol hat, oder wenn $Q = 0$ (z. B. E'' Null-dimensional) und P surjektives Symbol hat.

Unter der obigen Voraussetzung haben wir folgendes:

(i) Der dem obigen "Komplex" aus E', E, E'', P und Q zugeordnete <u>Laplace-Operator</u>

$$\Delta = P \circ P^* + Q^* \circ Q : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

ist ein elliptischer formal selbstadjungierter Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $2k$.

(ii) Ist M außerdem kompakt und $\sigma \in \Gamma(E)$, so ist $\Delta\sigma = 0$ genau dann, wenn $Q\sigma = 0$ und $P^*\sigma = 0$.

<u>Beweis</u>. Sei $y \in M$, $\xi \in T_y^* M \setminus \{0\}$, $\tau \in E_y$, $A = \sigma_{P,k,\xi}$, $B = \sigma_{Q,k,\xi}$, so daß

$$\sigma_{\Delta,2k,\xi} = (-1)^k (A \circ A^* + B^* \circ B)$$ und

$$(-1)^k \langle \sigma_{\Delta,2k,\xi}(\tau), \tau \rangle = \langle A A^* \tau, \tau \rangle + + \langle B^* B \tau, \tau \rangle = |A^* \tau|^2 + |B\tau|^2.$$

Ist nun $\sigma_{\Delta,2k,\xi}(\tau) = 0$, so $\tau \in \operatorname{Ker} B$ und $\tau \in \operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$. Da $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} B$ nach Voraussetzung, muß $\tau = 0$ sein. Der Endomorphismus $\sigma_{\Delta,2k,\xi}$ von E_y ist somit injektiv, also bijektiv, woher (i) folgt. Sei nun M kompakt, $\sigma \in \Gamma(E)$ und $\Delta\sigma = 0$. Also, $0 = \int_M \langle \Delta\sigma, \sigma \rangle = = \int_M \langle PP^*\sigma, \sigma \rangle + \int_M \langle Q^*Q\sigma, \sigma \rangle = = \int_M |P^*\sigma|^2 + \int_M |Q\sigma|^2$, womit auch (ii) bewiesen ist.

Sei nun (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wendet man die obige Konstruktion auf den Komplex

$$\Omega^{k-1} M \xrightarrow[d]{} \Omega^k M \xrightarrow[d]{} \Omega^{k+1} M$$

$(k = 0, \dots, n = \dim M)$, so entsteht der <u>Laplace-Operator</u>

$$\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d : \Omega^k M \to \Omega^k M$$

der ein formal selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung 2 ist. Den Kern von Δ,

$$\mathcal{H}^k(M, g) = \{\omega \in \Omega^k M : \Delta\omega = 0\}$$

nennt man den Raum der <u>harmonischen k-Formen</u> auf (M, g). Ist M kompakt, so ist $\omega \in \Omega^k M$ harmonisch genau dann, wenn $d\omega = 0$ und $\delta\omega = 0$ (d. h. wenn ω gleichzeitig geschlossen und <u>ko-geschlossen</u> ist).

<u>Beispiel</u>. Wie wichtig die harmonischen Formen sind, zeigt die folgende Tatsache: Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es die Zerlegung

$$Z^1M = B^1M \oplus \mathcal{H}^1(M,g)$$

also auch einen (natürlichen) Isomorphismus

$$\mathcal{H}^1(M,g) \cong H^1(M,\mathbb{R}) = Z^1M / B^1M.$$

(dasselbe werden wir später auch für beliebige k-Formen beweisen). Tatsächlich, sei $\omega \in Z^1M$. Nach der Greenschen Formel ist $\int_M \delta\omega \cdot V_g = 0$, so daß es $f \in C^\infty(M)$ gibt mit $\delta\omega = \Delta f = \delta df$ (Folgerung 20, S. 277). Für $\eta = \omega - df$ ist $d\eta = 0$ (weil $d\omega = 0$) und, wegen der Auswahl von f, $\delta\eta = 0$. Somit

ist $\omega = df + \eta$, $df \in B^1M$, $\eta \in \mathcal{H}^1(M,g)$. Daß dies eine <u>direkte</u> Summe ist, sieht man dadurch, daß für $\omega \in B^1M \cap \mathcal{H}^1(M,g)$, ω die Gestalt $\omega = dh$ mit $0 = \delta\omega = \delta dh = \Delta h$ hat, wobei $h \in C^\infty(M)$, also h ist konstant und $\omega = dh = 0$. Jetzt haben wir die folgende Folgerung: <u>Für eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit</u> (M,g), <u>deren Ricci-Tensor</u> r <u>überall positiv definit ist, ist</u> $H^1(M,\mathbb{R}) = \{0\}$.

Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{H}^1(M,g) = \{0\}$. Für jedes $\omega \in \Omega^1M$ haben wir (S. 112) $\int_M r(\omega,\omega) = \int_M (\delta\omega)^2 - \int_M \omega_{i;j}\,\omega^{j;i}$ (wobei ω mit

Hilfe von g als ein Vektorfeld angesehen wird). Ist nun ω harmonisch und nicht identisch Null, so $\delta\omega = 0$ und $\omega_{i;j} = \omega_{j;i}$, d. h. wir haben einen Widerspruch: $0 < \int_M r(\omega,\omega) = -\int_M \omega_{i;j}\omega^{j;i} =$

$$= -\int_M \omega_{i;j}\omega^{i;j} = -\int_M |\nabla\omega|^2 \leq 0.$$

Sei nun (M,g) eine <u>orientierte</u> n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $y \in M$ und $k = 0,\dots,n$ definieren wir den <u>Hodge-Operator</u>, der eine lineare Abbildung

$$* : (\Lambda^k M)_y \longrightarrow (\Lambda^{n-k} M)_y$$

ist, die durch die Metrik $g(y)$ in $T_y M$ sowie durch die Orientierung von $T_y M$ folgendermaßen bestimmt ist. Sei V

das Volumenelement von (M,g) (das auch von der Orientierung abhängt). Für $\omega \in (\Lambda^k M)_y$, $\eta \in (\Lambda^{n-k} M)_y$, ist $\omega \wedge \eta$ eine n-Form, also ein Vielfaches von $V(y)$: $\omega \wedge \eta = \lambda_\omega(\eta) \cdot V(y)$, mit einem <u>linearen</u> Funktional $(\Lambda^{n-k} M)_y \ni \eta \longmapsto \lambda_\omega(\eta) \in \mathbb{R}$. Da wir in $(\Lambda^{n-k} M)_y$ unser Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ haben, hat dieses λ_ω die Gestalt $\lambda_\omega(\eta) = \langle *\omega, \eta\rangle$ mit einem eindeutig bestimmten $*\omega \in (\Lambda^{n-k} M)_y$. Somit ist $*$ definiert. Da λ_ω linear von ω abhängt, ist $*$ auch linear.

Der Hodge-Operator $*$ kann auch folgendermaßen beschrieben werden: für jede positiv orientierte Orthonormalbasis $\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{n}{\xi}$ von $(\Lambda^1 M)_y = T_y^* M$ (d. h. für jede Basis $\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{n}{\xi}$, deren Dualbasis $X_1, \dots, X_n$

in $T_y M$ positiv orientiert und orthonormal ist)

$$*(\overset{1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{k}{\xi}) = \overset{k+1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\xi}.$$

Tatsächlich, es genügt die $*\omega$ definierende Gleichung

$$\omega\wedge\eta = \langle *\omega, \eta\rangle \cdot V(y)$$

für $\omega = \overset{1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{k}{\xi}$ und für alle η der Form $\eta = \overset{i_1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{i_{n-k}}{\xi}$ mit $i_1<\ldots<i_{n-k}$ zu beweisen, da die letzteren eine Basis von $(\Lambda^{n-k}M)_y$ bilden, wobei wir in dieser Gleichung statt $*\omega$ die Form $\overset{k+1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\xi}$ einsetzen. Ist $i_1\le k$, so ist $\omega\wedge\eta = 0$, während $\langle\overset{k+1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\xi}, \overset{i_1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{i_{n-k}}{\xi}\rangle$ aus dem folgenden Grund verschwinden muß: für $\zeta,\theta\in(\Lambda^s M)_y$ und für $\zeta_{i_1\ldots i_s} = \zeta(\underset{i_1}{X},\ldots,\underset{i_s}{X})$, $\theta_{i_1\ldots i_s} = \theta(\underset{i_1}{X},\ldots,\underset{i_s}{X})$ ist bekanntlich $\langle\zeta,\theta\rangle = \sum_{i_1<\ldots<i_s}\zeta_{i_1\ldots i_s}\theta_{i_1\ldots i_s}$

(die $\underset{i}{X}$ bilden dabei unsere Dualbasis), während, für $j_1<\ldots<j_s$, $i_1<\ldots<i_s$,

$$(\overset{j_1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{j_s}{\xi})_{i_1\ldots i_s} = \begin{cases}1, & i_1=j_1,\ldots,i_s=j_s\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Ist dagegen $i_1>k$, so, notwendigerweise, $(i_1,\ldots,i_{n-k}) = (k+1,\ldots,n)$, woher die linke Seite $\omega\wedge\eta = \overset{1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{k}{\xi}\wedge\overset{k+1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\xi} = V(y)$ (da $(\overset{1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\xi})(\underset{1}{X},\ldots,\underset{n}{X}) = 1$), und die rechte Seite $\langle\overset{k+1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\xi}, \overset{k+1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{n}{\xi}\rangle V(y) = V(y)$ (nach der obigen Regel für Skalarprodukte). Somit ist die Formel für $*(\overset{1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{k}{\xi})$ bewiesen. Man bemerke auch daß, für $\overset{i}{\xi}$ wie oben, und für jede Permutation τ von $1,\ldots,n$, hat man wegen dieser Formel

$$*(\overset{\tau_1}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{\tau_k}{\xi}) = \varepsilon(\tau)\,\overset{\tau_{k+1}}{\xi}\wedge\ldots\wedge\overset{\tau_n}{\xi},$$

wobei $\varepsilon(\tau)$ das Vorzeichen von τ ist.

Für die Komposition $*\circ * : (\Lambda^k M)_y \to (\Lambda^k M)_y$ von $* : (\Lambda^k M)_y \to (\Lambda^{n-k} M)_y$ mit $* : (\Lambda^{n-k} M)_y \to (\Lambda^k M)_y$ gilt

$$*\circ * = (-1)^{k(n-k)} \cdot Id.$$

Tatsächlich, sei $\omega = \overset{1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{k}{\xi}$ mit $\overset{i}{\xi}$ wie auf S. 676 ($i = 1, \dots, n$). Dann $*\omega = \overset{k+1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{n}{\xi}$ (S. 677) und $**\omega = *(\overset{k+1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{n}{\xi}) = \varepsilon(k+1, \dots, n, 1, \dots, k)\, \overset{1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{k}{\xi} = (-1)^{k(n-k)} \omega$ (S. 678). Da solche Formen ω (für verschiedene Basen $\overset{i}{\xi}$) eine Basis von $(\Lambda^k M)_y$ liefern, folgt unsere Gleichung für $*\circ *$.

Für $*\omega$ ($\omega \in (\Lambda^k M)_y$) haben wir auch die Komponentenformel, die in beliebigen lokalen Koordinaten um y gilt:

$$(*\omega)_{i_{k+1} \dots i_n} = \frac{1}{k!} \omega^{i_1 \dots i_k} V_{i_1 \dots i_n}.$$

Um dies zu beweisen, genügt es $\omega = \overset{1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{k}{\xi}$ nehmen (vgl. S. 679) mit $\overset{i}{\xi}$ wie auf S. 676. Da die beiden Seiten tensorielle Transformationsregel haben, dürfen wir spezielle Koordinaten x^i um y wählen, nämlich solche, für die $\partial_i(y) = \underset{i}{X}$ die zu $\overset{i}{\xi}$ duale Basis von $T_y M$ bilden. Dann hat $*\omega$ (bzw. ω, V) die einzige wesentliche Komponente $(*\omega)_{k+1; \dots; n} = 1$ (bzw. $\omega_{1 \dots k} = 1$, $V_{1 \dots n} = 1$), da $*\omega = \overset{k+1}{\xi} \wedge \dots \wedge \overset{n}{\xi}$. Somit, für $(i_{k+1}, \dots, i_n) = (k+1, \dots, n)$,

$$(*\omega)_{k+1; \dots; n} = 1 = \omega^{1 \dots k} V_{1 \dots n} = \frac{1}{k!} \omega^{i_1 \dots i_k} V_{i_1 \dots i_k; k+1; \dots; n}$$

während,

für $i_{k+1}, \dots, i_n$ die keine Permutation von $k+1, \dots, n$ bilden, die beiden Seiten verschwinden müssen.

Aus der obigen Koordinatenformel folgt nun, daß für jede C^∞-differenzierbare k-Form ω auf M die punktweise definierte $(n-k)$-Form $*\omega$ ebenfalls C^∞-differenzierbar sein muß.

Sei nun (M,g) wieder eine orientierte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann haben wir für den formal adjungierten Operator zu $d: \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$ auch die folgende Formel

$$d^* = \delta = (-1)^{nk-1} * \circ d \circ * : \Omega^{k+1} M \to$$
$$\to \Omega^k M.$$

Tatsächlich, sei $\omega \in \Omega_0^k M$, $\eta \in \Omega^{k+1} M$.

Also

$$\int_M \langle d\omega, \eta \rangle V_g = (-1)^{(k+1)(n-1)} \int_M *\eta \wedge d\omega$$

weil $\langle d\omega, \eta \rangle V_g = \langle \eta, d\omega \rangle V_g =$
$= (-1)^{(k+1)(n-1)} \langle *(*\eta), d\omega \rangle V_g =$
$= (-1)^{(k+1)(n-1)} *\eta \wedge d\omega$ (vgl. die Formel für $*\circ*$ auf S. 679 und die Definition von $*$). Wir haben auch

$$\int_M *\eta \wedge d\omega = (-1)^{n-k} \int_M d(*\eta) \wedge \omega,$$

weil $d(*\eta \wedge \omega) = d(*\eta) \wedge \omega + (-1)^{n-k-1} *\eta \wedge d\omega$ und $\int_M d(*\eta \wedge \omega) = 0$ wegen der Formel von Stokes (S. 468). Insgesamt ist

$$\int_M \langle d\omega, \eta \rangle V_g = (-1)^{nk-1} \int_M d*\eta \wedge \omega,$$

da $(k+1)(n-1)+n-k \equiv nk-1 \pmod 2$.

Es ist aber $d{*}\eta \wedge \omega = \langle {*}d{*}\eta, \omega\rangle V_g$,

woher $\int_M \langle d\omega, \eta\rangle V_g = (-1)^{nk-1} \int_M \langle {*}d{*}\eta, \omega\rangle V_g$,

d.h. $d^*\eta = (-1)^{nk-1} {*}d{*}\eta$.

Sei nun ω eine Differentialform auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Ist $d\omega = 0$, so, nach der obigen Formel für δ, $\delta({*}\omega) = 0$. Ist dagegen $\delta\omega = 0$, so $d({*}\omega) = 0$. Falls M kompakt ist, bedeutet dies ${*}\omega \in \mathcal{H}^{n-k}(M,g)$ für $\omega \in \mathcal{H}^k(M,g)$, d.h. <u>der Hodge-Operator liefert einen Isomorphismus</u>

$$*: \mathcal{H}^k(M,g) \to \mathcal{H}^{n-k}(M,g)$$

(mit dem inversen Isomorphismus $\pm *$). Dabei ist die Kompaktheitsvoraussetzung

nicht wesentlich: im Allgemeinen ist ${*}\circ\Delta = \Delta\circ{*}$, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k M & \xrightarrow{*} & \Omega^{n-k} M \\ \Delta\downarrow & & \downarrow\Delta \\ \Omega^k M & \xrightarrow[*]{} & \Omega^{n-k} M \end{array}$$

kommutiert, was man sofort sieht, wenn man $\Delta = d\circ\delta + \delta\circ d$ schreibt und δ durch $*$ und d ausdrückt. Somit ist ${*}(\mathcal{H}^k(M,g)) \subset \mathcal{H}^{n-k}(M,g)$, so daß $*$ einen Isomorphismus zwischen den Räumen der harmonischen Formen bildet, auch wenn M nichtkompakt ist.

<u>Weitere Beispiele von elliptischen Operatoren</u>. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Der Operator $P: \Omega^*M \to \Omega^*M$ mit $P = d + \delta$ ist elliptisch und selbstadjungiert. Dabei ist $\Omega^*M = \Gamma(\Lambda^*M)$,

$\Lambda^* M = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k M$ $(n = \dim M)$, so daß $\Lambda^* M$ eine natürliche Fasermetrik trägt, und, für $\omega \in \Omega^k M$, $P\omega = (d+\delta)\omega = d\omega + \delta\omega \in \Omega^{k+1}M \oplus \Omega^{k-1}M \subset \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k M = \Omega^* M$. Offenbar ist $P^* = d^* + \delta^* = \delta + d = P$, während $P \circ P = d \circ \delta + \delta \circ d = \Delta$ (weil $\delta \circ \delta = (d \circ d)^* = 0$); dabei operiert Δ in selbstverständlicher Weise auf $\Omega^* M$ als ein elliptischer Operator). Nun muß auch P elliptisch sein (Symbol der Komposition!), weil $P \circ P$ es ist.

b) Sei nun $\Lambda^{ev} M = \bigoplus_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ gerade}}} \Lambda^k M$, $\Lambda^{od} M = \bigoplus_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ ungerade}}} \Lambda^k M$ $(n = \dim M)$, $\Omega^{ev} M = \Gamma(\Lambda^{ev} M)$, $\Omega^{od} M = \Gamma(\Lambda^{od} M)$, so daß

$\Lambda^* M = \Lambda^{ev} M \oplus \Lambda^{od} M$ und $\Omega^* M = \Omega^{ev} M \oplus \Omega^{od} M$. Für den Operator P wie in a) sieht man sofort, daß $P(\Omega^{ev} M) \subset \Omega^{od} M$, $P(\Omega^{od} M) \subset \Omega^{ev} M$, so daß durch Einschränkung von P die folgenden Differentialoperatoren der Ordnung 1 entstehen:

$P_{ev} : \Omega^{ev} M \to \Omega^{od} M$, $P_{od} : \Omega^{od} M \to \Omega^{ev} M$ und, offenbar, $P_{ev}^* = P_{od}$. Die Operatoren P_{ev}, P_{od} sind <u>elliptisch</u>: als Einschränkung des elliptischen Operators P muß P_{ev} sowie $P_{od} = P_{ev}^*$ injektives Symbol haben. Der Kern von P_{ev} (bzw. von P_{od}) ist $\mathcal{H}^{ev}(M,g) = \bigoplus_{k \text{ gerade}} \mathcal{H}^k(M,g)$ (bzw. $\mathcal{H}^{od}(M,g) = \bigoplus_{k \text{ ungerade}} \mathcal{H}^k(M,g)$), vorausge-

setzt, daß M kompakt ist. Ist nämlich $P_{ev}\,\omega = 0$ mit $\omega = \omega_0 + \omega_2 + \omega_4 + \dots$, $\omega_i \in \Omega^i M$, so $0 = P_{ev}(\omega_0 + \omega_2 + \dots) =$
$= (d\omega_0 + \delta\omega_2) + (d\omega_2 + \delta\omega_4) + \dots$,
wobei die in den Klammern zusammengefaßten Ausdrücke in $\Omega^1 M$, $\Omega^3 M$, usw. liegen, also verschwinden müssen. Ist nun $\xi \in \Omega^k M$, $\eta \in \Omega^{k+2} M$ mit $d\xi + \delta\eta = 0$, so

$$\int_M \langle d\xi, d\xi\rangle V_g = -\int_M \langle d\xi, \delta\eta\rangle V_g = -\int_M \langle dd\xi, \eta\rangle V_g = 0,$$

d.h., $d\xi = 0$ und $\delta\eta = 0$. Also, $\omega_0 \in \mathcal{H}^0(M,g)$, $\omega_2 \in \mathcal{H}^2(M,g)$ usw.

c) Sei $n = \dim M = 2$. Also, wir haben den elliptischen Operator

$$P_{ev} : \Omega^{ev} M \to \Omega^{od} M$$

der wesentlichen Ordnung 1. Dabei

ist $\Lambda^{ev} M = \Lambda^0 M \oplus \Lambda^2 M$ und $\Lambda^{od} M = \Lambda^1 M = T^* M$. Ist M orientierbar, so muß $\Lambda^{ev} M$ trivial sein, während $\Lambda^{od} M$ oft nicht-trivial ist (z. B. für $M = S^2$). Somit haben wir neue Beispiele von elliptischen Operatoren der Ordnung 1 zwischen nicht-isomorphen Bündeln (vgl. S. 658) und jetzt sehen wir, daß eines dieser Bündel auch trivial sein kann.

d) Für $k = 0, 1, \dots, n = \dim M$ betrachten wir den Differentialoperator

$$Q = d \circ \delta - \delta \circ d : \Omega^k M \to \Omega^k M$$

der wesentlichen Ordnung 2. Offenbar ist $Q^* = Q$. Da $Q \circ Q = \Delta \circ \Delta$, muß Q elliptisch sein. Man sieht leicht, daß (falls M kompakt ist) der Kern von Q der harmonische Raum $\mathcal{H}^k(M,g)$ ist.

Sobolew-Räume von Schnitten in Vektorbündeln.

Sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel mit einer Fasermetrik $\langle , \rangle$ über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Von M setzen wir immer voraus, daß es einen abzählbaren Atlas zuläßt. Unter einem meßbaren Schnitt von E verstehen wir eine Abbildung $\sigma: M \to E$ mit $\pi \circ \sigma = Id_M$ (π ist die Bündelprojektion) und mit der Eigenschaft, daß für jedes System von lokalen Basisschnitten e_α für E auf einer offenen Menge $U \subset M$, die Komponentenfunktionen $\sigma^\alpha : U \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) meßbar sind. Dies ist ein geometrischer Begriff. Für einen meßbaren Schnitt σ von E ist die

Funktion $|\sigma| = \langle \sigma, \sigma \rangle^{1/2}$ auf M meßbar und wir setzen, für $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$,

$$\|\sigma\|_{L^p} = \Big(\int_M |\sigma|^p V_g\Big)^{1/p} = \| |\sigma| \|_{L^p},$$

wobei rechts die L^p-"Norm" für meßbare Funktionen auf (M,g) steht. Sei $L^p(E) = L^p(E, \langle , \rangle, g)$ die Menge der Äquivalenzklassen aller meßbaren Schnitte σ von E mit $\|\sigma\|_{L^p} < \infty$, wobei wir zwei Schnitte als äquivalent ansehen, wenn sie außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Man sieht leicht, daß für meßbare Schnitte σ, τ von E und für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Höldersche Ungleichung

$$\int_M |\langle \sigma, \tau \rangle| V_g \leq \|\sigma\|_{L^p} \|\tau\|_{L^q}$$

gilt (Hinweis: wegen $|\langle\sigma,\tau\rangle| \leq |\sigma|\cdot|\tau|$ genügt es die Höldersche Ungleichung für Funktionen $|\sigma|$, $|\tau|$ anzuwenden). Für solche σ, τ und für $p \geq 1$ haben wir auch die Minkowski-Ungleichung

$$\|\sigma+\tau\|_{L^p} \leq \|\sigma\|_{L^p} + \|\tau\|_{L^p}$$

(Hinweis: $\|\sigma+\tau\|_{L^p} \leq \| |\sigma| + |\tau| \|_{L^p}$ und die Minkowski-Ungleichung für Funktionen $|\sigma|$, $|\tau|$). Somit ist $L^p(E)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_{L^p}$ ist eine Norm in $L^p(E)$. Ist M kompakt, so ist der Raum $L^p(E)$ sowie, bis auf Äquivalenz, die Norm $\|\cdot\|_{L^p}$, von $\langle,\rangle$ und g unabhängig (weil dies für die Normen $|\sigma|$ sowie für L^p-Räume von Funktionen gilt).

SATZ von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesgue). Seien $E, \langle,\rangle, M, g$ wie oben, σ_k und σ meßbare Schnitte von E $(k=1,2,\ldots)$, mit $\sigma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \sigma$ punktweise, fast überall in M (d.h. außerhalb einer Nullmenge). Gibt es $F \in L^p(M,g)$ mit $|\sigma_k| \leq F$ für alle k (p reell, fest, $p \geq 1$), so $\sigma, \sigma_k \in L^p(E)$ und $\sigma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \sigma$ in $L^p(E)$ (d. h. bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p}$).

<u>Beweis</u>. Da $|\sigma_k| \leq F$, $|\sigma| \leq F$ fast überall, ist $\sigma, \sigma_k \in L^p(E)$. Jetzt kann man den Satz auf S. 154 auf die Funktionen $|\sigma - \sigma_k|$ mit $|\sigma-\sigma_k| \leq 2F$ anwenden.

q.e.d.

SATZ von F. Riesz. Für $E, \langle,\rangle, M, g$ sei $\sigma_k \in L^p(E)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der L^p-Norm. Dann gibt es $\sigma \in L^p(E)$ mit

(i) $\sigma = \lim\limits_k \sigma_k$ in $L^p(E)$,

(ii) $\sigma = \lim\limits_m \sigma_{k_m}$ punktweise, fast überall, für eine Teilfolge σ_{k_m} von σ_k.

Beweis: Wie auf S. 156, wobei man diesmal mit $|\cdot|$ die Fasernorm in E bezeichnet.

q. e. d.

Nach dem Satz von Riesz ist $L^p(E)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p}$ ein Banach-Raum. Für $p = 2$ ist es sogar ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{L^2} = \int_M \langle \sigma, \tau \rangle \, V_g .$$

Seien $E, \langle , \rangle, M, g$ wie oben (S. 689) und sei außerdem ∇ ein fester $\langle , \rangle$-metrischer Zusammenhang in E. Im Raum $C_0^k(E)$ aller C^k-Schnitte von E mit kompakten Trägern definieren wir die

C^k-Norm

$$\|\sigma\|_{C^k} = \sum_{s=0}^{k} \sup_M |\nabla^s \sigma|$$

wobei die höheren Ableitungen $\nabla^s \sigma$, $s \geq 1$, mit Hilfe des Riemannschen Zusammenhanges gebildet werden (dabei ist $\nabla^s \sigma$ ein Schnitt des Bündels $\underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{s\text{-fach}} \otimes E$, das eine natürliche Fasermetrik trägt, vgl. S. 555). Ähnlich definieren wir, für $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$ die Sobolew-Norm $\|\cdot\|_{L^p_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, im Raum $\Gamma_0(E)$ aller C^∞-Schnitte von E mit kompakten Trägern:

$$\|\sigma\|_{L^p_k} = \sum_{s=0}^{k} \|\nabla^s \sigma\|_{L^p} = \sum_{s=0}^{k} \Big(\int_M |\nabla^s \sigma|^p \Big)^{1/p}.$$

Für $p = 2$ können wir statt $\|\cdot\|_{L^2_k}$ auch die äquivalente Norm $\|\cdot\|_k$ in $\Gamma_0(E)$

betrachten,

$$\|\sigma\|_k = \Big(\sum_{s=0}^{k} \|\nabla^s\sigma\|^2_{L^2} \Big)^{1/2},$$

die den Vorteil hat, daß sie durch das <u>Sobolewsche</u> <u>Skalarprodukt</u> $\langle\, , \rangle_k$ bestimmt ist:

$$\langle \sigma, \tau\rangle_k = \sum_{s=0}^{k} \langle \nabla^s\sigma, \nabla^s\tau\rangle_{L^2} .$$

Die Normen $\|\cdot\|_{C^k}$ und $\|\cdot\|_{L^p_k}$ sowie $\|\cdot\|_k$ hängen natürlich von $\nabla, \langle\, , \rangle$ und g ab.

Für $k < l$ und $\sigma \in \Gamma_0(E)$ ist offenbar

$$\|\sigma\|_{L^p_k} \leq \|\sigma\|_{L^p_l}$$

sowie

$$\|\sigma\|_{L^p_k} \leq (\mathrm{Vol}(A))^{1/p} \|\sigma\|_{C^k} ,$$

wobei A der Träger von σ ist.

Für jede feste Funktion $\varphi \in C_0^\infty(M)$ sieht man leicht, das die folgenden linearen

Operatoren in normierten Räumen,

$$(C_0^k(E), \|\cdot\|_{C^k}) \ni \sigma \longmapsto \varphi\sigma \in (C_0^k(E), \|\cdot\|_{C^k})$$

und

$$(\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^p_k}) \ni \sigma \longmapsto \varphi\sigma \in (\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^p_k})$$

stetig sind (vgl. S. 158, 160). Außerdem sind die Normen $\|\cdot\|_{C^k}$ und $\|\cdot\|_{L^p_k}$ im folgenden Sinne lokal, bis auf Äquivalenz, von $\nabla, \langle\, , \rangle$ und g unabhängig: in einer offenen Menge $\mathcal{U}$, deren Abschließung kompakt und in einer Koordinaten- und Trivialisierungsmenge enthalten ist, gibt es für $\nabla, \langle\, , \rangle, g$ sowie für jedes andere System $\tilde\nabla, \langle\, ,\tilde\rangle, \tilde g$ der gleichen Art in E (bzw. auf M) Konstanten C, C' mit

$$\|\sigma\|_{C^k(\nabla, \langle\, ,\rangle, g)} \leq C \,\|\sigma\|_{C^k(\tilde\nabla, \langle\, ,\tilde\rangle, \tilde g)}$$

und

$$\|\sigma\|_{C^k(\tilde\nabla,\tilde{\langle,\rangle},\tilde g)} \leq C'\|\sigma\|_{C^k(\nabla,\langle,\rangle,g)}$$

für alle $\sigma \in C^k_0(E)$ mit Träger$(\sigma) \subset \mathcal{U}$, und ähnlich für $\|\cdot\|_{L^p_k}$ (vgl. S. 160-162).

VERALLGEMEINERUNG DES SATZES von S.163: Sei jedem System $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$, wobei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel einer festen Faserdimension m über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit einer festen Dimension n ist, $\langle,\rangle$ eine Fasermetrik in E und ∇ ein $\langle,\rangle$-metrischer Zusammenhang in E, eine Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}$ in $\Gamma_0(E)$ zugeordnet, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\|\cdot\|$ ist lokal, d.h. für $E, \dots, g$ wie

oben und für jede offene Untermannigfaltigkeit $\mathcal{U} \subset M$,

$$\|\sigma\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g} = \|\sigma\|_{E/_{\mathcal{U}},\nabla,\langle,\rangle,\mathcal{U},g}$$

für alle $\sigma \in \Gamma_0(E/_{\mathcal{U}})$ (dabei ist $E/_{\mathcal{U}}$ die Einschränkung des Bündels E auf $\mathcal{U}$).

(ii) $\|\cdot\|$ ist äquivariant unter Diffeomorphismen: Ist $\Phi: E \to E'$ ein "allgemeiner" Bündelisomorphismus mit Basisdiffeomorphismus $\Psi: M \to M'$ (wobei $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ und $E', \nabla', \langle,\rangle', M', g'$ Systeme des obigen Typs sind), d. h. Φ, Ψ sind Diffeomorphismen für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \xrightarrow[\Psi]{} & M' \end{array}$$

kommutiert, und Φ ist linear auf jeder Faser, und ist außerdem $\nabla = \Phi^*\nabla'$, $\langle,\rangle = \Phi^*\langle,\rangle'$, $g = \Psi^* g'$ (im selbstverständlichen Sinn), so

$$\|\Phi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}\|_{E',\nabla',\langle,\rangle',M',g'} = \|\sigma\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}$$

für alle $\sigma \in \Gamma_0(E)$.

(iii) Ist M ein Ball in $\mathbb{R}^n$, $E = M \times \mathbb{F}^m$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), $\mathcal{U} \subset M$ ein kleinerer Ball, so ist die Norm $\|\cdot\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}$ im Raum $\Gamma_0(\mathcal{U} \times \mathbb{F}^m)$ bis auf Äquivalenz von $\nabla, \langle,\rangle, g$ unabhängig.

(iv) Für $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie oben und für $\varphi \in C_0^\infty(M)$ ist die Abbildung

$$\left(\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}\right) \ni \sigma \longmapsto$$

$$\longmapsto \varphi\sigma \in \left(\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}\right)$$

stetig.

Dann gilt folgendes:

(a) Ist $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie oben, $\mathcal{U} \subset M$ eine offene, relativ kompakte Untermannigfaltigkeit, so ist die Norm

$\|\cdot\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}$ im Raum $\Gamma_0(E|_{\mathcal{U}})$ bis auf Äquivalenz von $\nabla, \langle,\rangle, g$ unabhängig.

(b) Sind $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ zwei Normen mit (i) - (iv) und ist die Abbildung

$$(\Gamma_0(E), \|\cdot\|) \xrightarrow[Id]{} (\Gamma_0(E), \|\cdot\|')$$

stetig, bzw. kompakt (im Sinne der S. 164) falls $M = B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball ist, g die euklidische Metrik, $E = B \times \mathbb{F}^m$, $\langle,\rangle$ das konstante Skalarprodukt und ∇ der kanonische flache Zusammenhang, so ist auch, für jedes $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie oben und für jede offene relativ kompakte Untermannigfaltigkeit $\mathcal{U} \subset M$, die Abbildung

$$\left(\Gamma_0(E|_{\mathcal{U}}), \|\cdot\|_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}\right) \xrightarrow[Id]{} \left(\Gamma_0(E|_{\mathcal{U}}), \|\cdot\|'_{E,\nabla,\langle,\rangle,M,g}\right)$$

stetig (bzw. kompakt).

<u>Beweis</u>. Genauso wie auf S. 165.

q.e.d.

Da die Voraussetzungen des obigen Satzes für die Normen $\|\cdot\|_{C^k}$ sowie $\|\cdot\|_{L^p_k}$ gelten, sehen wir, daß falls M kompakt ist, sind die Normen $\|\cdot\|_{C^k}$ und $\|\cdot\|_{L^p_k}$ in $\Gamma_0(E)$ bis auf Äquivalenz von $\nabla, \langle , \rangle$ und g unabhängig.

LEMMA von Rellich. Sei E ein Vektorbündel über M, M kompakt, $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k, l \geq 0$ und $k > l$. Dann ist die Identitätsabbildung

$$(\Gamma(E), \|\cdot\|_{L^p_k}) \longrightarrow (\Gamma(E), \|\cdot\|_{L^p_l})$$

ein kompakter Operator im Sinne von

S. 164 (wobei wir $\nabla, \langle , \rangle, g$ beliebig wählen).

<u>Beweis</u>. Wie auf S. 166-172, wobei es klar ist, wie man die Faltung einer reellwertigen und einer $\mathbb{F}^m$-wertigen Funktion definiert (dieselbe Formel), so daß eine $\mathbb{F}^m$-wertige Funktion entsteht.

q.e.d.

<u>Beispiel</u>. Sei (M,g) eine <u>kompakte</u> Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann <u>sind alle harmonischen Räume</u> $\mathcal{H}^k(M,g)$, $k=0,\dots, n=\dim M$, <u>endlich dimensional</u>. Für $k=0$ ist das trivial. Sei nun $k=1$, $\omega \in \mathcal{H}^1(M,g)$. Also (siehe S. 674-675),

$$\int_M |\nabla\omega|^2 = \int_M r(\omega,\omega) \leq C \int_M |\omega|^2,$$

wobei $C = \sup\limits_M |r|$. Wäre $\mathcal{H}^1(M,g)$ unendlich dimensionel, so finden wir eine unendliche L^2-orthonormale Folge ω_m in $\mathcal{H}^1(M,g)$. Nach der obigen Ungleichung ist diese Folge $\|\cdot\|_{L^2_1}$-beschränkt und somit enthält, nach dem Lemma von Rellich, eine L^2 Cauchy-Teilfolge, was der Orthonormalität widerspricht. Betrachten wir nun $k \geqslant 2$. Für jedes C^∞ Tensorfeld vom Typ $(0,k)$ auf (M,g) haben wir die Ricci-Identität*

$$\omega_{i_1\cdots i_k,jl} - \omega_{i_1\cdots i_k,lj} =$$

$$= R_{lji_1}{}^{s}\omega_{si_2\cdots i_k} + R_{lji_2}{}^{s}\omega_{i_1 s i_3\cdots i_k} + \cdots$$

$$\cdots + R_{lji_k}{}^{s}\omega_{i_1\cdots i_{k-1}s},$$

was man am einfachsten folgendermaßen sieht: die Iden-

*siehe auch Aufgabe X.3

tität gilt für $k=1$ (S. 41). Unser ω ist, lokal, eine Summe von Tensorprodukten $\omega_{i_1\cdots i_k} = \overset{1}{\xi}_{i_1}\cdots\overset{k}{\xi}_{i_k}$. Aus der Ricci-Identität für die $\overset{s}{\xi}$ folgt nun leicht diese für ω. Nun haben wir, für $\omega\in\mathcal{H}^k(M,g)$,

$$\int_M \omega_{i_1\cdots i_k,i}\,\omega^{i_1\cdots i_k,i} = -\int_M \omega_{i_1\cdots i_k,i}{}^{i}\,\omega^{i_1\cdots i_k}.$$

Da $d\omega = 0$, ersetzen wir $\omega_{i_1\cdots i_k,i}{}^{i}$ durch eine Summe von Ausdrücken $\pm\,\omega_{i_1\cdots i_{q-1}}{}^{i}{}_{i_{q+1}\cdots i_k,i_q i}$. Vertauscht man die Differentiationsindizes i_q, i, so entsteht 0, weil $\delta\omega = 0$. Was übrig bleibt, ist, nach der Ricci-Identität eine Summe von k Integralen der Form

$$\int_M R\cdot\omega\cdot\omega$$

wobei $R\cdot\omega\cdot\omega$ für einen 3-linearen Ausdruck in R, w, w steht, also

$$\int_M w_{i_1\ldots i_k, i}\, w^{i_1\ldots i_k, i} \leq$$

$$\leq k \cdot \sup_M |R| \int_M w_{i_1\ldots i_k}\, w^{i_1 \ldots i_k}.$$

Jetzt beweist man genau wie im Fall $k=1$, daß $\dim \mathcal{H}^k(M,g) < \infty$.

Für $k=1$ bedeutet dies auch, daß $\dim H^1(M, \mathbb{R}) < \infty$ für jede kompakte Mannigfaltigkeit M (vgl. S. 673).

Für $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie oben, definieren wir den Sobolew-Raum $L^p_k(E) = L^p_k(E, \nabla, \langle,\rangle, g)$ als die abstrakte Komplettierung des normier-

ten Raumes $(\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^p_k})$. Also hat man den natürlichen Isomorphismus

$$L^p_0(E) \cong L^p(E)$$

(der auch eine Isometrie ist; die Komplettierungen $L^p_k(E)$ tragen nämlich die natürlichen Fortsetzungen der L^p_k-Normen, die man auch mit $\|\cdot\|_{L^p_k}$ bezeichnet). Der Unterraum $\Gamma_0(E)$ liegt nämlich dicht in $L^p(E)$ (Beweis: Wie auf S. 177, genügt es Schnitte in $L^p(E)$ mit kleinen Trägern durch $\Gamma_0(E)$ approximieren zu können. Diese Schnitte σ sind durch L^p-Komponentenfunktionen σ^α vertreten, die ihrerseits durch C^∞-Funktionen mit kompakten Trägern L^p-approximierbar sind, vgl. S. 177).

Ist $\sigma \in L^p(E)$ im Vektorbündel E mit Fasermetrik $\langle , \rangle$ über (M,g), so ist $\sigma = 0$ fast überall genau dann, wenn $\int_M \langle \sigma, \tau \rangle V_g = 0$ für alle $\tau \in \Gamma_0(E)$. Tatsächlich, sei die letzte Bedingung erfüllt. Sind e_α lokale $\langle , \rangle$-orthonormale Basisschnitte über der offenen Menge $\mathcal{U} \subset M$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ (reellwertig), so, für jedes α, $0 = \int_{\mathcal{U}} \langle \sigma, \varphi e_\alpha \rangle V_g = \int_{\mathcal{U}} \varphi \operatorname{Re} \sigma^\alpha V_g + i \int_{\mathcal{U}} \operatorname{Im} \sigma^\alpha \varphi V_g$, für jedes φ, woher (Lemma 7) $\sigma^\alpha = 0$ fast überall in $\mathcal{U}$, also $\sigma = 0$ fast überall in M.

Seien nun $E, \nabla, \langle , \rangle, M, g$ wie oben. Ist $k \geq l$, so besitzt die stetige Identitätsabbildung $(\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^p_k}) \to (\Gamma_0(E), \|\cdot\|_{L^p_l})$ eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung $L^p_k(E) \to L^p_l(E)$, die wir die <u>Inklusion</u> nennen. Ist M kompakt und $k > l$, so ist die Inklusion $L^p_k(E) \to L^p_l(E)$ ein

kompakter Operator (Lemma von Rellich). Dies gilt, allgemeiner, auch wenn wir eine relativ kompakte offene Menge $\mathcal{U} \subset M$ und die Inklusion zwischen den Abschließungen von $\Gamma_0(E|_{\mathcal{U}})$ in $L^p_k(E)$ bzw. $L^p_l(E)$ betrachten. Außerdem ist, für $k \geq l$, die Inklusion $L^p_k(E) \to L^p_l(E)$ immer <u>injektiv</u>: um dies zu sehen, genügt es den Fall $k = l+1$ zu betrachten. Sei also $\sigma_m \in \Gamma_0(E)$ eine L^p_{l+1}-Cauchy-Folge mit $\sigma_m \to 0$ in $L^p_l(E)$. Also, für $s = 0, \ldots, l$, $\nabla^s \sigma_m \to 0$ in L^p, während $\nabla^{l+1} \sigma_m \to H$ in L^p mit $H \in L^p(\underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{(l+1)\text{-fach}} \otimes E)$. Für $\tau \in \Gamma_0(\underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{(l+1)} \otimes E)$ ist $\int_M \langle H, \tau \rangle = \lim_m \int_M \langle \nabla^{l+1} \sigma_m, \tau \rangle =$

$$= \lim_m \int_M (\sigma_m)^\alpha{}_{,j_1 \ldots j_{l+1}} \tau^{j_1 \ldots j_{l+1}}{}_\alpha =$$

$$= -\lim_m \int_M (\sigma_m)^\alpha{}_{,j_1 \ldots j_l} \left(\nabla_{j_{l+1}} \tau^{j_1 \ldots j_{l+1}}{}_\alpha \right) = 0$$

(wegen der L^p-Konvergenz $\nabla^\ell \sigma_m \to 0$ mit der Beschränktheit von τ und dessen Ableitungen), woher (S. 707) $H = 0$ fast überall, d.h. $\sigma_m \to 0$ in $L^p_{\ell+1}(E)$.

Die Injektivität der Inklusionen zwischen den Sobolew-Räumen $L^p_k(E)$ erlaubt es, alle diese Räume als Unterräume von $L^p_0(E) = L^p(E)$ anzusehen, was wir von nun an immer tun werden.

Die Räume $C^k_0(E)$ haben die folgende Vollständigkeitseigenschaft: ist $\sigma_m \in C^k_0(E)$ eine $\|\cdot\|_{C^k}$-Cauchy-Folge und Träger$(\sigma_m) \subset A$ mit einer von m unabhängigen kompakten Menge $A \subset M$, so hat σ_m einen $\|\cdot\|_{C^k}$-Grenzwert $\sigma \in C^k_0(E)$. Ist M kompakt, so ist insbesondere $C^k(E) = C^k_0(E)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{C^k}$ ein Banach-Raum. Beweis: wie bei Lemma 8.

LEMMA von Sobolew. Seien $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie oben, $p \geq 1$, $n = \dim M$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > \frac{n}{p} + s$. Dann

(i) $L^p_k(E) \subset C^s(E)$, d.h., jedes Element von $L^p_k(E)$, als L^p-Schnitt von E angesehen, stimmt fast überall mit einem C^s-Schnitt von E überein.

(ii) Ist M kompakt, so ist die Inklusion $L^p_k(E) \to C^s(E)$ stetig (bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{L^p_k}$ und $\|\cdot\|_{C^s}$).

<u>Beweis</u>: Genauso wie bei Satz 13. q.e.d.

Für $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie oben definieren wir die <u>C^∞-Konvergenz</u> in $\Gamma_0(E)$ genauso wie auf S. 191. Somit hängt die C^∞-Konvergenz von $\nabla, \langle,\rangle$ und g nicht ab und, für jeden Differentialoperator $P: \Gamma(E) \to$

$\to \Gamma(E')$ ist $P: \Gamma_0(E) \to \Gamma_0(E')$ stetig bezüglich der C^∞-Konvergenz. Unter einer Distribution (oder einem Distributionsschnitt) im reellen (bzw. komplexen) Bündel E über M verstehen wir ein $\mathbb{F}$-lineares Funktional $v: \Gamma_0(E) \to \mathbb{F}$ mit $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), das stetig bezüglich der C^∞-Konvergenz in $\Gamma_0(E)$ ist. Bei fester Fasermetrik $\langle , \rangle$ in E haben wir eine (im komplexen Fall antilineare) Inklusion $L^1_{loc}(E) \subset \Gamma_0(E)^*$, wobei $L^1_{loc}(E)$ der Raum aller meßbaren Schnitte* σ von E mit $\int_A |\sigma| \cdot V_g < \infty$ für jede kompakte Menge $A \subset M$ ist (diese Bedingung hängt von $\langle , \rangle$ und von der Metrik g auf M nicht ab), während $\Gamma_0(E)^*$ der Raum aller Distributionen in E ist. Diese Inklusion ordnet jedem

* dabei werden zwei Schnitte als gleich angesehen, wenn sie fast überall übereinstimmen

$\sigma \in L^1_{loc}(E)$ die Distribution $\Gamma_0(E) \ni \tau \mapsto$
$\mapsto \int_M \langle \tau, \sigma \rangle V_g$ (die Inklusion hängt also wesentlich von $\langle , \rangle$ und g ab; daß sie tatsächlich injektiv ist, folgt aus der Behauptung auf S. 707). Bei festem $\langle , \rangle$ und g werden wir also annehmen, daß $L^p_k(E) \subset L^p(E) \subset L^1_{loc}(E) \subset \Gamma_0(E)^*$. Die schwache Konvergenz in $\Gamma_0(E)^*$ definieren wir wie auf S. 194-195.

Für $E, \langle , \rangle, M, g$ und $E', \langle , \rangle', M, g$ wie oben kann man jeden Differentialoperator $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ zu einer linearen Abbildung $P: \Gamma_0(E)^* \to \Gamma_0(E')^*$ fortsetzen, indem man P^* verwendet wie auf 194. Diese Distributionsfortsetzung von P ist stetig bezüglich der schwachen Konvergenz (vgl. S. 195).

Unser Lemma 10 auf S. 220 (Stetigkeit von Differentialoperatoren bezüglich der Sobolew-Normen) gilt unverändert (für $s \geq 0$ in (ii) von Lemma 10), mit demselben Beweis, für $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ über M. Ebenfalls haben wir in Vektorbündeln die Ungleichung für drei Sobolew-Normen (Folgerung 12 auf S. 226).

Betrachten wir nun über dem flachen Torus (T^n, g) (S. 227) das triviale komplexe Produktbündel $E = T^n \times \mathbb{C}^m$. Für $\sigma \in L^2(E)$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{\sigma}(\alpha) = \int_{T^n} \sigma \overline{\chi_\alpha} \in \mathbb{C}^m$$

wobei $\chi_\alpha : T^n \to \mathbb{C}$ auf S. 228 definiert ist. In E haben wir die "konstante" Fasermetrik $\langle , \rangle$ und den kanonischen

"flachen" Zusammenhang ∇; d.h. für eine feste Orthonormalbasis e_j von $\mathbb{C}^m$ $(j = 1, ..., m)$ die den e_j entsprechenden "konstanten" Schnitte von E sind $\langle , \rangle$-orthonormal und ∇-parallel $(\langle e_j, e_l \rangle = \delta_{jl}, \ \nabla e_j = 0)$. Da man jeden Schnitt σ von E orthogonal in seine e_j-Komponenten zerlegen kann, was mit den kovarianten (d.h. partiellen) Differentiationen vertauschbar ist, gelten die auf S. 231–233 für Funktionen bewiesene Formeln ebenfalls für Schnitte von E. Also,

$$\|\sigma\|_0^2 = \|\sigma\|_{L^2}^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\sigma}(\alpha)|^2 \quad \text{für } \sigma \in L^2(E),$$

$$\sigma = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{\sigma}(\alpha) \chi_\alpha \quad \text{für } \sigma \in L^2(E) \quad (L^2\text{-konvergente Reihe}),$$

und, für die Sobolew-Norm $\| \cdot \|_k$,

$$\|\sigma\|_k^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2k}) |\hat{\sigma}(\alpha)|^2$$

falls $\sigma \in \Gamma(E)$.

Sind $E = T^n \times \mathbb{C}^m$, $E' = T^n \times \mathbb{C}^{m'}$ zwei komplexe Produktbündel über T^n und ist

$P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der Ordnung k, so ist

$$P\sigma = \underset{k}{H}^{s_1 \dots s_k} \partial_{s_1} \dots \partial_{s_k} \sigma + \dots + \underset{1}{H}^{s} \partial_s \sigma + \underset{0}{H} \sigma$$

wobei ∂_s die (parallelen, orthonormalen) Basisfelder auf T^n sind, $\sigma \in \Gamma(E)$ (bzw. $P\sigma \in \Gamma(E')$) als eine Abbildung $\sigma: T^n \to \mathbb{C}^m$ (bzw. $P\sigma: T^n \to \mathbb{C}^{m'}$) angesehen wird und $\underset{k}{H}^{s_1 \dots s_k}, \dots, \underset{1}{H}^{s}, \underset{0}{H}$ C^∞-Abbildungen von T^n nach dem Raum $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{m'})$ sind (vgl. S. 233).

DIE UNGLEICHUNG VON FRIEDRICHS: Seien $E, \nabla, \langle , \rangle, M, g$ und $E', \nabla', \langle , \rangle', M, g$ wie oben, $\mathcal{U} \subset M$ offen und relativ kompakt, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung k mit injektivem Symbol. Für jedes $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$, gibt es eine Konstante $C \geq 0$ mit

$$\|\sigma\|_{s+k} \leq C(\|P\sigma\|_s + \|\sigma\|_s)$$

für alle $\sigma \in \Gamma_0(E|_{\mathcal{U}})$.

<u>Beweis</u>. a) Sei $\mathcal{U} = M = T^n$, $E = T^n \times \mathbb{C}^m$, $E' = T^n \times \mathbb{C}^{m'}$ und sei $P\sigma = H^{s_1 \dots s_k} \partial_{s_1} \dots \partial_{s_k} \sigma$ (vgl. S. 715) wobei die Funktionen $H^{s_1 \dots s_k}: T^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{m'})$ <u>konstant</u> sind. Injektivität des Symbols von P bedeutet, daß

$$|(H^{s_1 \dots s_k} \xi_{s_1} \dots \xi_{s_k})\sigma| > 0$$

für $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$ und $\sigma \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$. Nimmt man $|\xi| = 1$, $|\sigma| = 1$, so bleibt der obige Ausdruck als positive Funktion auf $S^{n-1} \times S^{2m-1}$ von unten durch eine Zahl $C_0 > 0$ beschränkt, woher

$$|(H^{s_1 \dots s_k} \xi_{s_1} \dots \xi_{s_k})\sigma| \geq C_0 |\xi|^k |\sigma|$$

für alle $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\sigma \in \mathbb{C}^m$. Nun ist für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ und $\sigma \in \Gamma(E)$

$$(P\sigma)^\wedge(\alpha) = H^{s_1 \dots s_k} (\partial_{s_1} \dots \partial_{s_k} \sigma)^\wedge(\alpha) =$$

$$= i^k \sum_{s_1,\dots,s_k} (H^{s_1\dots s_k} \alpha^{s_1} \dots \alpha^{s_k}) \hat{\sigma}(\alpha) \text{, woher}$$

$|(P\sigma)^\wedge(\alpha)| \geqslant C_0 |\alpha|^k |\hat{\sigma}(\alpha)|$, und im Fall a) folgt die Behauptung wie auf S. 235. Nun beweisen wir die Ungleichung im allgemeinen Fall wie es auf S. 236–239 dargestellt ist.

q.e.d.

ENDLICHE DIMENSIONALITÄT DES KERNS FÜR OPERATOREN MIT INJEKTIVEM SYMBOL ÜBER KOMPAKTEN MANNIGFALTIGKEITEN: Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit M. Ist $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung k mit injektivem Symbol, so ist, für jedes natürliche s, der Kern $\operatorname{Ker}_{s+k} P$ von $P: L^2_{s+k}(E) \to L^2_s(E')$ (Distributionsfortsetzung) ein endlich dimensionaler Vektorraum.

Beweis. Siehe S. 239–240.

q.e.d.

DIE UNGLEICHUNG VON POINCARÉ. Seien E, E', M, P wie auf S. 717, s eine natürliche Zahl. Dann gibt es $C \geqslant 0$ mit

$$\|\sigma\|_{s+k} \leqslant C \|P\sigma\|_s$$

für alle $\sigma \in L^2_{s+k}(E)$, die L^2-orthogonal zum Unterraum $\operatorname{Ker}_{s+k} P$ sind (Bezeichnung: siehe S. 717).

Beweis. Sonst gibt es eine Folge $\sigma_m \in L^2_{s+k}(E)$ mit $\|\sigma_m\|_{s+k} = 1$, $\|P\sigma_m\|_s \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ und $\sigma_m \underset{L^2}{\perp} \operatorname{Ker}_{s+k} P$. Sei $k \geqslant 1$ (sonst ist die Behauptung trivial). Nach dem Lemma von Rellich, dürfen wir annehmen, daß $\sigma_m \to \sigma$ in $L^2_s(E)$ (indem wir nur eine Teilfolge von σ_m betrachten). Nach der Ungleichung von Friedrichs,

$$\|\sigma_m - \sigma_{m'}\|_{s+k} \leqslant C(\|P\sigma_m - P\sigma_{m'}\|_s + \|\sigma_m - \sigma_{m'}\|_s)$$

also ist σ_m eine L^2_{s+k}-Cauchy-Folge, d.h. $\sigma_m \to \tilde{\sigma}$ in $L^2_{s+k}(E)$. Da dann auch $\sigma_m \to \tilde{\sigma}$

in $L^2_s(E)$, haben wir $\tilde{\sigma} = \sigma$ und somit $\sigma \in L^2_{s+k}(E)$, $\sigma_m \to \sigma$ in $L^2_{s+k}(E)$, also $\|\sigma\|_{s+k} = 1$, $\sigma \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Ker}_{s+k} P$. Nun aber $\|P\sigma\|_s = \lim\limits_m \|P\sigma_m\|_s = 0$, d. h. $\sigma \in$ $\in \mathrm{Ker}_{s+k} P$. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung. q. e. d.

ABGESCHLOSSENHEIT DES BILDES FÜR OPERATOREN MIT INJEKTIVEM SYMBOL ÜBER KOMPAKTEN MANNIGFALTIGKEITEN. Seien E, E', M, P wie auf S. 717. Dann hat $P: L^2_{s+k}(E) \to L^2_s(E')$ abgeschlossenes Bild, für jede natürliche Zahl s.

<u>Beweis</u>. Siehe S. 242-243. q. e. d.

LÖSBARKEITSKRITERIUM FÜR ELLIPTISCHE NICHTHOMOGENE SYSTEME MIT DER RECHTEN SEITE IN L^2: Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der kompakten

Mannigfaltigkeit M. Für jeden Differentialoperator $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$, der wesentlichen Ordnung k, mit injektivem Symbol, stimmt das Bild von $P: L^2_k(E) \to L^2(E')$ überein mit dem L^2-Orthogonalkomplement des Unterraumes

$$\mathrm{Ker}_0 P^* = \{\tau \in L^2(E') : P^*\tau = 0 \text{ (Distribution)}\}$$

(dabei verwenden wir in E, E' und in TM feste Fasermetriken). In anderen Worten, die Gleichung

$$P\sigma = \tau$$

mit $\tau \in L^2(E')$ besitzt eine Lösung $\sigma \in L^2_k(E)$ genau dann, wenn $\tau \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Ker}_0 P^*$.

<u>Beweis.</u> Siehe S. 243. q. e. d.

Betrachten wir wieder das Produktbündel $E = T^n \times \mathbb{C}^m$ über dem flachen Torus (T^n, g) mit der konstanten Fasermetrik $\langle\, , \rangle$ und dem kanonischen flachen Zusammenhang ∇. Für $\sigma, \tau \in L^2_k(E)$ haben wir

$$\langle\sigma,\tau\rangle_k = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})\langle\hat{\sigma}(\alpha),\hat{\tau}(\alpha)\rangle$$

was man genauso sieht, wie auf S. 247–249 (indem man wie damals bemerkt, daß für jede feste Orthonormalbasis e_j von $\mathbb{C}^m$, die Schnitte

$$\left\{ \frac{\chi_\alpha e_j}{\|\chi_\alpha e_j\|_k} \right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n,\ j=1,\dots,m}$$

eine Hilbert-Basis von $L^2_k(E)$ bilden).

Sei nun $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie auf S. 697. Für $k\in\mathbb{Z}, k>0$ und $\sigma\in L^2(E)$ ist das Funktional

$$\Gamma_0(E)\ni\tau \longmapsto \int_M \langle\tau,\sigma\rangle V_g \in\mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

auf $\Gamma_0(E)$ stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_k$ (S. 206). Bezeichnen wir seine Funktionalnorm mit $\|\sigma\|_{-k}$. Also, da $\Gamma_0(E)$

dicht in $L^2_k(E)$ liegt,

$$\|\sigma\|_{-k} = \sup\left\{ \frac{|\int_M\langle\tau,\sigma\rangle V_g|}{\|\tau\|_k} : \tau\in\Gamma_0(E), \|\tau\|_k>0 \right\}$$

und dieselbe Formel gilt wenn man τ den Raum $L^2_k(E)$ durchlaufen läßt. Wie auf S. 206-209 sieht man, daß für die "negativen" Sobolew-Räume $L^2_{-k}(E)$, die man als die Komplettierungen von $(L^2(E), \|\cdot\|_{-k})$ definiert, dieselben Eigenschaften wie im Fall der Funktionen gelten, und daß die Formel

$$F(\sigma)\tau = \int_M \langle\tau,\sigma\rangle V_g \ , \ \sigma\in L^2(E)$$

eine (antilineare) Isometrie $F: L^2_{-k}(E) \to (L^2_k(E))^*$ definiert. Die Räume $L^2_{-k}(E)$ sind kanonisch in $\Gamma_0(E)^*$ enthalten.

Wie auf S. 211-213 beweist man folgendes: für eine Distribution $v\in\Gamma_0(E)^*$

ist $v \in L^2_s(E)$ genau dann, wenn

$$\sup\left\{\frac{|v(\sigma)|}{\|\sigma\|_{-s}} : \sigma \in \Gamma_0(E), \|\sigma\|_{-s} > 0\right\} < \infty$$

($s \in \mathbb{Z}$ beliebig) und, in diesem Fall, stimmt das obige Supremum mit $\|v\|_s$ überein. Die Ungleichungen auf S. 217-218 gelten unverändert für Distributionen in ~~Vektor~~bündeln. Also, falls M kompakt ist, hängen die Unterräume $L^2_s(E) \subset \Gamma_0(E)^*$, $s \in \mathbb{Z}$, sowie ihre Normen $\|\cdot\|_s$ (bis auf Äquivalenz) von ∇, $\langle,\rangle$ und g nicht ab. (ii) von Lemma 10 bleibt auch jetzt gültig. Außerdem definieren wir für $k > 0$ den selbstadjungierten elliptischen Operator $P_k : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ der Ordnung $2k$ mit

$$P_k \sigma = \sigma + \nabla^* \nabla \sigma + (\nabla^*)^2 \nabla^2 \sigma + \dots$$
$$\dots + (\nabla^*)^k \nabla^k \sigma,$$

und wir zeigen (S. 213-214), daß die Distributionsfortsetzung $P_k : L^2_k(E) \to L^2_{-k}(E)$ eine lineare Isometrie ist.

Sei $v \in \Gamma(E)^*$ eine Distribution im Bündel $E = T^n \times \mathbb{C}^m$ (mit $\nabla, \langle,\rangle, g, e_j$ wie auf S. 713-714). Für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ setzen wir

$$\hat{v}(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} v(\overline{\chi}_\alpha e_j) e_j \in \mathbb{C}^m.$$

Dann ist, für $k > 0$ und $v \in L^2_{-k}(E)$,

$$\|v\|^2_{-k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\alpha|^2 + \dots + |\alpha|^{2k})^{-1} |\hat{v}(\alpha)|^2.$$

Dieser Ausdruck hat für jede Distribution v einen Wert in $[0, \infty]$, den wir ebenfalls mit $\|v\|^2_{-k}$ bezeichnen. Nun ist $\|v\|_{-k} < \infty$ genau dann, wenn $v \in L^2_{-k}(E)$ (S. 249-252). Statt $\|\cdot\|_s$, $s \in \mathbb{Z}$ können wir die "Normen" $\|\cdot\|'_s$ in

$\Gamma(E)^*$ über T^n betrachten, mit

$$(\|v\|_s')^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (1+|\alpha|^2)^s |\hat{v}(\alpha)|^2.$$

Nun ist $\|v\|_s' < \infty$ genau dann, wenn $v \in L_s^2(E)$ und in diesem Fall ist $\|\cdot\|_s'$ eine mit $\|\cdot\|_s$ äquivalente Norm in $L_s^2(E)$ (S. 253). Auf dem Torus ist, für $k > 0$ und $v \in \Gamma(E)^*$,

$$(P_k v)^\wedge(\alpha) = (1+|\alpha|^2+\dots+|\alpha|^{2k})\hat{v}(\alpha)$$

(S. 254) und somit ist, für jedes $s \in \mathbb{Z}$,

$$P_k : L_{s+2k}^2(E) \to L_s^2(E)$$

ein linearer Homöomorphismus (S. 254).

VERALLGEMEINERTE UNGLEICHUNG VON FRIEDRICHS ÜBER DEM TORUS:

Die Behauptung auf S. 715 gilt auch für $s < 0$.

Beweis. Wie auf S. 256-257. q.e.d.

In unserem Produktbündel E über T^n definieren wir, für $v \in \Gamma(E)^*$ und $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $|h| \le 1$, $\tau_h v$ und v^h genauso wie auf S. 257-258, und alle dort angegebenen Eigenschaften, sowie Lemma 13 auf S. 259, gelten unverändert.

Nun gilt auch Lemma 14 (S. 260) für Produktbündel E, E' über T^n und Operatoren $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ mit injektivem Symbol.

Für $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$ wie auf S. 697, kann man alle Definitionen von S. 266-271 wiederholen, sowie die Beweise aller dort angegebenen Tatsachen. Insbesondere haben wir, für $s \in \mathbb{Z}$, die Räume

$$L_{s,loc}^2(E) \subset \Gamma_0(E)^*$$

von allen $v \in \Gamma_0(E)^*$ mit $\varphi v \in L_s^2(E)$ für jedes $\varphi \in C_0^\infty(M)$; diese Räume hängen von $\nabla, \langle,\rangle, g$ nicht ab.

Unser Lemma 15 auf S. 271 gilt nun in der folgenden Form: Seien $E, \nabla, \langle,\rangle, M, g$, $E', \nabla', \langle,\rangle', M, g$ wie auf S. 697 und sei $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung $k \geq 1$ mit injektivem Symbol. Ist $v \in \Gamma_0(E)^*$ mit $v \in L^2_{s+k,loc}(E)$, $s \in \mathbb{Z}$ und $Pv \in L^2_{s+1,loc}(E')$, so ist $v \in L^2_{s+k+1,loc}(E)$.

<u>Beweis</u>: Wie auf S. 271-273 mit nur einem Unterschied: Ein Differentialoperator P mit injektivem Symbol in einer offenen Menge $U \subset T^n$ muß aus einer kleineren offenen Menge $\tilde{U} \subset U$ auf ganz T^n (mit injektivem Symbol) fortgesetzt werden. Diesmal wählen wir $\tilde{U}$ so klein, daß das Symbol von P auf $\tilde{U}$ beinahe konstant ist (wir verwenden eine Trivialisierung, so daß das Symbol aus Koeffizientenfunktionen

besteht) und dann setzen wir das Symbol <u>konstant</u> fort, was möglich ist, weil die injektiven Symbole eine offene und somit lokal konvexe Menge bilden.

q. e. d.

REGULARITÄTSSATZ FÜR DIFFERENTIALOPERATOREN MIT INJEKTIVEM SYMBOL. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M, $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung k mit injektivem Symbol, $v \in \Gamma_0(E)^*$. Ist $Pv \in L^2_{s,loc}(E')$, so liegt v in $L^2_{s+k,loc}(E)$.

<u>Beweis</u>. Siehe S. 273-275. q. e. d.

<u>Bemerkung</u>. In diesem Satz setzen wir stillschweigend voraus, daß E, E' Faserметriken mit metrischen Zusammenhängen zulassen und M eine Riemannsche Metrik

besitzt; dies gilt immer, wenn M kompakt ist. Dieselbe Voraussetzung wird auch in der folgenden Folgerung angenommen.

FOLGERUNG: DER C^∞-REGULARITÄTSSATZ. Seien E, E', M, P wie auf S. 728. Ist $v \in \Gamma_0(E)^*$ mit $Pv \in \Gamma(E')$ (z. B. $Pv = 0$), so ist $v \in \Gamma(E)$.

<u>Beweis</u>. Wir haben $\Gamma(E) = \bigcap_{s \in \mathbb{Z}} L^2_{s,loc}(E)$.

q. e. d.

FOLGERUNG: DIE SOBOLEW-REGULARITÄT ÜBER KOMPAKTEN MANNIGFALTIGKEITEN. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit M und sei $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein Differentialoperator der wesentlichen Ordnung k mit injektivem Symbol. Ist $v \in \Gamma(E)^*$

mit $Pv \in L^2_s(E')$, $s \in \mathbb{Z}$, so ist $v \in L^2_{s+k}(E)$.

<u>Beweis</u>: Ist M kompakt, so $L^2_{s,loc}(E) = L^2_s(E)$.

q. e. d.

FOLGERUNG: LÖSBARKEITSKRITERIUM FÜR ELLIPTISCHE SYSTEME. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel mit festen Fasermetriken über der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), und sei $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung k. Dann ist

$$P(\Gamma(E)) = \{\tau \in \Gamma(E') : \tau \underset{L^2}{\perp} \operatorname{Ker} P^*\}$$

und, für $s \in \mathbb{Z}$ mit $s \geq 0$,

$$P(L^2_{s+k}(E)) = \{\tau \in L^2_s(E') : \tau \underset{L^2}{\perp} \operatorname{Ker} P^*\}.$$

Insbesondere haben wir die L^2-orthogonalen Zerlegungen

$$\Gamma(E') = P(\Gamma(E)) \oplus \operatorname{Ker} P^*$$

$$L^2_s(E') = P(L^2_{s+k}(E)) \oplus \operatorname{Ker} P^*, \quad s \geq 0.$$

<u>Bemerkung</u>. Da P^* ebenfalls elliptisch ist,

Können wir wegen des Regularitätssatzes statt $\mathrm{Ker}_s P^*$ einfach $\mathrm{Ker}\, P^*$ schreiben.

<u>Beweis</u>. Die Bilder $P(\Gamma(E))$, $P(L^2_{s+k}(E))$ sind zu $\mathrm{Ker}\, P^*$ L^2-orthogonal: Ist $\sigma \in \Gamma(E)$ (bzw. $\sigma \in L^2_{s+k}(E)$) und $\varphi \in \mathrm{Ker}\, P^* \subset \Gamma(E')$, so $\langle P\sigma, \varphi\rangle_{L^2} = \int_M \langle P\sigma, \varphi\rangle' V_g =$

$= \lim_m \int_M \langle P\sigma_m, \varphi\rangle' V_g = \lim_m \int_M \langle \sigma_m, P^*\varphi\rangle V_g =$

$= 0$, wobei $\sigma_m \in \Gamma(E)$ eine Folge mit $\sigma_m \to \sigma$ in $L^2_{s+k}(E)$ ist. Sei umgekehrt $\tau \in \Gamma(E')$ (bzw. $\tau \in L^2_s(E')$) mit $\tau \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Ker}\, P^*$. Nach dem Lösbarkeitskriterium von S. 719 gibt es $\sigma \in L^2_k(E)$ mit $P\sigma = \tau$, und, wegen des Regularitätssatzes, $\sigma \in \Gamma(E)$ (bzw. $\sigma \in L^2_{s+k}(E)$).

Unsere L^2-orthogonalen Zerlegungen entstehen nun folgendermaßen. Sei $\tau \in \Gamma(E')$ (bzw. $\tau \in L^2_s(E')$). Da

$\mathrm{Ker}\, P^* \subset \Gamma(E') \subset L^2(E')$ endlich dimensional ist (S. 717), also in $L^2(E')$ abgeschlossen, besitzt es in $L^2(E')$ ein orthogonales Komplement, d. h. $\tau =$ $= \tau_1 + \tau_0$ mit $\tau_0 \in \mathrm{Ker}\, P^* \subset \Gamma(E') \subset$ $\subset L^2_s(E')$ und $\tau_1 \underset{L^2}{\perp} \mathrm{Ker}\, P^*$, woher auch $\tau_1 = \tau - \tau_0 \in \Gamma(E')$ (bzw. $\tau_1 \in L^2_s(E')$) und somit $\tau_1 \in P(\Gamma(E))$ (bzw. $\tau_1 \in P(L^2_{s+k}(E))$).

q. e. d.

LEMMA von Hodge. Seien E', E, E'' reelle oder komplexe Vektorbündel mit festen Fasermetriken über der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und sei

$$\Gamma(E') \xrightarrow[P]{} \Gamma(E) \xrightarrow[Q]{} \Gamma(E'')$$

ein Komplex von Differentialoperatoren

der gleichen Ordnung k mit

(a) $Q \circ P = 0$

und

(b) $\operatorname{Im} \sigma_{\xi, P, k} = \operatorname{Ker} \sigma_{\xi, Q, k}$

für alle $y \in M$ und $\xi \in T_y^* M \setminus \{0\}$.

Dann haben wir die L^2-orthogonale Zerlegung

$$\Gamma(E) = P(\Gamma(E')) \oplus \operatorname{Ker}\Delta \oplus Q^*(\Gamma(E''))$$

wobei Δ der auf S. 670 definierte Laplace-Operator ist. Außerdem stimmt die Summe

$$P(\Gamma(E')) \oplus \operatorname{Ker} \Delta$$

mit dem Kern von $Q: \Gamma(E) \to \Gamma(E'')$ überein.

<u>Beweis</u>. Man sieht leicht, daß unsere drei Zerlegungsräume tatsächlich zueinander L^2-orthogonal sind. Sei nun $v \in \Gamma(E)$. Da $\Gamma(E) = \Delta(\Gamma(E)) \oplus$

$\oplus \operatorname{Ker} \Delta$ (S. 730 mit $\Delta^* = \Delta$), ist

$v = v_0 + \Delta\sigma$, $v_0 \in \operatorname{Ker} \Delta$, $\sigma \in \Gamma(E)$,

also $v = P(P^*\sigma) + v_0 + Q^*(Q\sigma)$,

woher die Existenz unserer Zerlegung folgt. Wegen (a) ist $P(\Gamma(E')) \subset \operatorname{Ker} Q$, während aus $v \in \operatorname{Ker} \Delta$, $Qv = 0$ folgt ((ii), S. 670), so daß $P(\Gamma(E')) \oplus \operatorname{Ker}\Delta \subset$ $\subset \operatorname{Ker} Q$. Ist, umgekehrt, $\sigma \in \Gamma(E)$ mit $Q\sigma = 0$, so ist wegen unserer Zerlegung $\sigma = P(\tau') + \sigma_0 + Q^*(\tau'')$, $\tau' \in \Gamma(E')$, $\tau'' \in \Gamma(E'')$, $\sigma_0 \in \operatorname{Ker} \Delta$

also, wegen (a), $0 = Q\sigma = QQ^*(\tau'')$,

d.h. $0 = \int_M \langle QQ^*\tau'', \tau'' \rangle V_g =$

$= \int_M |Q^*\tau''|^2 V_g$ und $Q^*\tau'' = 0$;

somit ist $\sigma = P(\tau') + \sigma_0$.

q.e.d.

SATZ von Hodge und De Rham. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(i) Für $k = 0, \dots, n$ haben wir die L^2-orthogonale Zerlegung

$$Z^k M = B^k M \oplus \mathcal{H}^k(M,g).$$

Insbesondere gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H^k(M,\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^k(M,g).$$

(ii) Alle Kohomologieräume $H^k(M,g)$ sind endlich dimensional. Die Dimension

$$b_k(M) = \dim H^k(M,g)$$

nennt man die k-te Betti-Zahl von M.

(iii) Ist M orientierbar, so haben wir die Poincaré-Dualität

$$b_k(M) = b_{n-k}(M), \quad k = 0, \dots, n.$$

Beweis. (i) Man wende das Lemma von Hodge auf den Komplex

$$\Omega^{k-1}M \xrightarrow[d]{} \Omega^k M \xrightarrow[d]{} \Omega^{k+1}M$$

an (vgl. S. 670).

(ii) Folgt aus (i) mit $\dim \mathcal{H}^k(M,g) < \infty$ (S. 702 oder S. 717)

(iii) $* : \mathcal{H}^k(M,g) \to \mathcal{H}^{n-k}(M,g)$ ist ein Isomorphismus (S. 683). q. e. d.

Beispiel. Die graduierte Kohomologiealgebra $H^*(T^n,\mathbb{R})$ des Torus T^n ist mit der äußeren Algebra $\Lambda^* \mathbb{R}^n$ isomorph, d. h. mit $(\Lambda^* T^n)_y$ in einem beliebigen Punkt $y \in T^n$, wobei der Isomorphismus jeder harmonischen Form auf dem flachen Torus (T^n, g) ihren Wert in y zuordnet.

Die Ungleichung auf S. 705 besagt nämlich, daß auf einer kompakten *flachen* Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) eine Form $\omega \in \Omega^k M$ ist genau dann harmonisch, wenn sie parallel ist ($\nabla\omega = 0$). Da wir in (T^n, g) globale *parallele* Schnitte dx^j von T^*T^n haben, ist $\omega = \sum\limits_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$ genau dann parallel, wenn die Funktionen $\omega_{j_1 \ldots j_k}$ konstant sind. Somit ist $\mathcal{H}^k(T^n, g) \ni \omega \longmapsto \omega(y) \in (\Lambda^k T^n)_y$ ein Isomorphismus (Bemerkung: im allgemeinen ist das äußere Produkt zweier harmonischen Formen *nicht* mehr harmonisch; der flache Torus bildet hier eine Ausnahme).

Bemerkung. Es ist manchmal zweckmäßig der kompakten Mannigfaltigkeit

M ihr sogenanntes *Poincaré-Polynom* P_M zuzuordnen. Dies ist ein Polynom von einer Veränderlichen t mit

$$P_M(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k(M)\, t^k, \qquad n = \dim M.$$

Man kann z. B. beweisen, daß, für das kartesische Produkt $M \times N$, $P_{M \times N} = P_M \cdot P_N$ (die *Künnethsche Formel*). Im Fall des Torus ist $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ und $P_{T^n}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$, während $P_{S^1}(t) = P_{T^1}(t) = 1 + t$.

Fredholm-Operatoren.

Seien V, W reelle oder komplexe Vektorräume, $F: V \to W$ eine lineare Abbildung. Unter dem Kokern von F verstehen wir den Quotientenraum

$$\operatorname{Coker} F = W / F(V).$$

Wir sagen, daß F ein Fredholm-Operator ist, wenn $\dim \operatorname{Ker} F < \infty$ und $\dim \operatorname{Coker} F < \infty$ (die letzte Bedingung bedeutet, daß es einen endlich dimensionalen Unterraum $W' \subset W$ gibt mit $W = F(V) \oplus W'$). Unter dem Index des Fredholm-Operators F versteht man die ganze Zahl

$$\operatorname{Index} F = \dim \operatorname{Ker} F - \dim \operatorname{Coker} F.$$

Beispiele.

(a) Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume. Dann ist jede lineare Ab-

bildung $F: V \to W$ ein Fredholm-Operator mit $\operatorname{Index} F = \dim V - \dim W$, weil $F(V) \cong V/_{\operatorname{Ker} F}$, so daß $\dim \operatorname{Ker} F - \dim \operatorname{Coker} F = \dim \operatorname{Ker} F - (\dim W - \dim F(V)) = (\dim F(V) + \dim \operatorname{Ker} F) - \dim W = \dim V - \dim W$.

(b) Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit M und sei $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ein elliptischer Differentialoperator der wesentlichen Ordnung k.

b)i) Für $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$ ist

$$P: L^2_{s+k}(E) \to L^2_s(E')$$

ein Fredholm-Operator, weil $\dim \operatorname{Ker}_{s+k} P < \infty$ (S. 717) und $L^2_s(E') = P(L^2_{s+k}(E)) \oplus \operatorname{Ker} P^*$ (S. 730). Für dieses P ist $\operatorname{Index} P = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Ker} P^*$ (von s unabhängig wegen des Regularitätssatzes, S. 729).

b)ii) Die Abbildung $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ist ein Fredholm-Operator mit $\operatorname{Index} P = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Ker} P^*$ (S. 717, 730).

Also, man kann vom <u>Index des elliptischen Operators</u> P sprechen, der mit dem Index irgendeines der genannten Fredholm-Operatoren übereinstimmt. Dabei hängt $\operatorname{Ker} P^*$ von der Fasermetriken in E, E' und TM, seine Dimension aber nicht (weil $\operatorname{Ker} P^* \cong \Gamma(E')/P(\Gamma(E))$).

Die in b)i) erwähnten Operatoren sind Beispiele von <u>stetigen Fredholm-Operatoren zwischen Hilbert-Räumen</u>; für solche Fredholm-Operatoren werden wir uns vor allem interessieren.

c) Sei $F: V \to W$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Dann ist F ein Fredholm-Operator mit $\operatorname{Index} F = 0$.

d) Seien $F: V \to W$ und $F': V' \to W'$ Fredholm-Operatoren. Dann ist die direkte Summe $F \oplus F': V \oplus V' \to W \oplus W'$ ebenfalls ein Fredholm-Operator und $\operatorname{Index}(F \oplus F') = \operatorname{Index} F + \operatorname{Index} F'$ (wobei $(F \oplus F')(v, v') = (F(v), F'(v'))$). Tatsächlich, $\operatorname{Ker}(F \oplus F') = \operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Ker} F'$, $\operatorname{Im}(F \oplus F') = \operatorname{Im} F \oplus \operatorname{Im} F'$, und die Abbildung

$$\operatorname{Coker}(F \oplus F') \longrightarrow \operatorname{Coker} F \oplus \operatorname{Coker} F'$$

mit $(w, w') (\operatorname{mod} \operatorname{Im}(F \oplus F')) \longrightarrow$

$\longrightarrow (w \operatorname{mod} \operatorname{Im} F,\ w' \operatorname{mod} \operatorname{Im} F')$

ist ein Isomorphismus.

e) Seien $F: V \to W$, $G: W \to U$ Fredholm-Operatoren. Dann ist $G \circ F: V \to U$ ein Fredholm-Operator und $\operatorname{Index}(G \circ F) = \operatorname{Index} F + \operatorname{Index} G$.

<u>Beweis</u>. Wir werden endlich dimensionale Unterräume $V_0 \subset V$, $W_0 \subset W$, $U_0 \subset U$ und Unterräume $V_1 \subset V$, $W_1 \subset W$, $U_1 \subset U$ finden mit $V = V_0 \oplus V_1$, $W = W_0 \oplus W_1$, $U = U_0 \oplus U_1$ und mit der Eigenschaft, daß $F(V_i) \subset W_i$,

$G(W_i) \subset \mathcal{U}_i$, $i=1,2$, wobei $F: V_1 \to W_1$ und $G: W_1 \to \mathcal{U}_1$ Isomorphismen sind. Dann gilt, für die Einschränkungen $F_i = F/_{V_i}: V_i \to W_i$, $G_i = G/_{W_i}: W_i \to \mathcal{U}_i$, $i = 1,2$, die Zerlegung $F = F_0 \oplus F_1$, $G = G_0 \oplus G_1$, so daß, wegen c), d) und a), mit $G \circ F = (G_0 \circ F_0) \oplus (G_1 \circ F_1)$,

$\mathrm{Index}\,(G \circ F) = \mathrm{Index}\,(G_0 \circ F_0) + \mathrm{Index}\,(G_1 \circ F_1) =$
$= \mathrm{Index}\,(G_0 \circ F_0) = \dim V_0 - \dim \mathcal{U}_0 =$
$= (\dim V_0 - \dim W_0) + (\dim W_0 - \dim \mathcal{U}_0) =$
$= \mathrm{Index}\, F_0 + \mathrm{Index}\, G_0 = \mathrm{Index}\,(F_0 \oplus F_1) +$
$+ \mathrm{Index}\,(G_0 \oplus G_1) = \mathrm{Index}\, F + \mathrm{Index}\, G.$

Nun konstruieren wir die V_i und W_i. Der endlich dimensionale Unterraum $F(V) \cap \mathrm{Ker}\, G$ von $F(V)$ besitzt ein Komplement W_1 in $F(V)$:

$$F(V) = (F(V) \cap \mathrm{Ker}\, G) \oplus W_1$$

sowie ein endlich dimensionales Komplement W_2 im endlich dimensionalen Raum $\mathrm{Ker}\, G$:

$$\mathrm{Ker}\, G = (F(V) \cap \mathrm{Ker}\, G) \oplus W_2.$$

Da $W_1 \cap \mathrm{Ker}\, G = \{0\}$, ist G auf W_1 injektiv. Für $\mathcal{U}_1 = G(W_1) \subset \mathcal{U}$ ist somit $G: W_1 \to \mathcal{U}_1$ ein Isomorphismus. Es ist auch $W_2 \cap F(V) = \{0\}$, weil $W_2 \cap F(V) \subset$ $\subset (F(V) \cap \mathrm{Ker}\, G) \cap W_2 = \{0\}$. Somit enthält W die <u>direkte</u> Summe $F(V) \oplus W_2 =$ $= (F(V) \cap \mathrm{Ker}\, G) \oplus W_2 \oplus W_1$, die in W endliche Kodimension hat (da ihr Unterraum $F(V)$ diese Eigenschaft besitzt); diese direkte Summe hat also in W ein endlich dimensionales Komplement W_3:

$$W = (F(V) \cap \mathrm{Ker}\, G) \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_1$$

Wählen wir nun in V ein Komplement V_2 zu $\mathrm{Ker}\, F$:

$$V = \mathrm{Ker}\, F \oplus V_2.$$

Da $F: V_2 \to F(V_2) = F(V) = (F(V) \cap \mathrm{Ker}\, G) \oplus$ $\oplus W_1$ ein Isomorphismus ist, können wir

V_2 entsprechend zerlegen:

$$V_2 = V_3 \oplus V_1$$

mit dem endlich dimensionalen Raum

$V_3 = (F|_{V_2})^{-1}(F(V) \cap \operatorname{Ker} G)$ und mit

$V_1 = (F|_{V_2})^{-1}(W_1)$, so daß

$F: V_1 \to W_1$ ein Isomorphismus ist. Also

$$V = V_3 \oplus \operatorname{Ker} F \oplus V_1 .$$

Sei $U_3 = G(W_3)$, also $\dim U_3 < \infty$.

Da $W = (F(V) \cap \operatorname{Ker} G) \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_1 = \operatorname{Ker} G \oplus W_3 \oplus W_1$, bildet G das Komplement $W_3 \oplus W_1$ zu $\operatorname{Ker} G$ in W isomorph auf $G(W)$ ab, woher

$$G(W) = U_3 \oplus U_1 .$$

Wählen wir ein endlich dimensionales Komplement U_2 zu $G(W)$ in U:

$$U = U_2 \oplus G(W) = U_2 \oplus U_3 \oplus U_1 .$$

Jetzt operieren F und G wie die Pfeile im folgenden Diagramm zeigen:

$$\begin{array}{cccccc} V = & V_3 & \oplus & \operatorname{Ker} F & \oplus & V_1 \\ {\scriptstyle F}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F=0} & & \downarrow{\scriptstyle F\ \text{isomorph}} \\ W = & \overbrace{(F(V) \cap \operatorname{Ker} G) \oplus W_2}^{\operatorname{Ker} G} & \oplus & W_3 & \oplus & W_1 \\ {\scriptstyle G}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle G=0} & & \downarrow{\scriptstyle G} & & \downarrow{\scriptstyle G\ \text{isomorph}} \\ U = & U_2 & \oplus & U_3 & \oplus & U_1 \end{array}$$

Mit den obigen V_1, W_1, U_1 sowie mit den endlich dimensionalen Räumen $V_0 = V_3 \oplus \operatorname{Ker} F$, $W_0 = \operatorname{Ker} G \oplus W_3$, $U_0 = U_2 \oplus U_3$, haben wir die gewünschten Zerlegungen von V, W und U gefunden.

q.e.d.

f) Sei V ein unendlich dimensionaler Banach-Raum und $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ (bzw. $k < 0$). Dann gibt es einen Banach-Raum V_1 und einen stetigen Homomorphismus $F: V \to V_1$ (bzw. $F: V_1 \to V$)

der ein Fredholm-Operator mit Index $F =$
$= k$ ist.

<u>Beweis.</u> Sei $k > 0$ und wählen wir in V einen k-dimensionalen Unterraum V_0.

f)i): Ist V_0 ein Unterraum endlicher Dimension k im Banach-Raum V, so gibt es einen <u>abgeschlossenen</u> Unterraum $V_1 \subset V$ mit der <u>algebraischen</u> Zerlegung

$$V = V_0 \oplus V_1$$

(für Hilbert-Räume gilt dies trivialerweise für beliebige abgeschlossene Unterräume V_0: $V_1 = V_0^{\perp}$).

Tatsächlich, sei $f_1, \dots, f_k$ eine Basis ~~des~~ dualen Raumes V_0^*. Nach dem Satz von Hahn und Banach besitzen die f_i stetige Fortsetzungen zu Funktionalen F_i auf V. Sei $V_1 = \operatorname{Ker} F_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} F_k$. Da die f_i eine Basis in V_0^* bilden, ist $V_0 \cap V_1 = \{0\}$. Sei nun $v \in V$ und sei $x_1, \dots, x_k$ die zu $f_1, \dots, f_k$

duale Basis von V_0. Es ist $v =$
$= v_0 + v_1$ mit $v_0 = \sum_{i=1}^{k} F_i(v) x_i \in V_0$ und $v_1 = v - v_0 \in V_1$, weil $F_i(v_1) =$
$= F_i(v) - F_i(v) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Somit ist f)i) bewiesen.

f)ii): Sind V_0, V_1 Banach-Räume mit Normen $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$, so definieren wir die <u>direkte</u> <u>Summe</u> $(V, \|\cdot\|) =$
$= (V_0, \|\cdot\|_0) \oplus (V_1, \|\cdot\|_1)$ als den Banach-Raum $V = V_0 \oplus V_1$ mit der Norm
$\|(v_0, v_1)\| = \|v_0\| + \|v_1\|$.

f)iii): Seien V_0, V_1 abgeschlossene Unterräume eines Banach-Raumes V, für die die <u>algebraische</u> Zerlegung gilt:

$$V = V_0 \oplus V_1.$$

Dann gilt sie auch <u>topologisch</u> (aber nicht immer isometrisch), d. h. die Norm von V ist äquivalent (nicht immer identisch) mit der direkten

Summe der Normen von V_0 und V_1.

Tatsächlich ist die lineare Abbildung $V_0 \oplus V_1 \ni (v_0, v_1) \mapsto v_0 + v_1 \in V$ stetig und bijektiv, wobei $V_0 \oplus V_1$ mit der direkten Summe der Normen versehen ist. Nach dem Satz von der offenen Abbildung muß dies also ein Homöomorphismus sein.

f) iv): Beweis von f). Nach f) i) wählen wir für einen k-dimensionalen Unterraum V_0 $(k > 0)$ von V ein abgeschlossenes algebraisches Komplement V_1, woher $V = V_0 \oplus V_1$ auch topologisch (f) iii)). Dann ist die Projektion $V = V_0 \oplus V_1 \to V_1$ (bzw. die Einbettung $V_1 \to V_0 \oplus V_1 = V$) ein Fredholm-Operator vom Index k (bzw. vom Index $-k$). q.e.d.

<u>Bemerkung</u>. Jeder stetige Fredholm-Operator $F: V \to W$ zwischen Banach-Räumen V, W hat die folgende wichtige Eigenschaft: <u>das Bild</u> $F(V)$ <u>ist abgeschlossen</u> in W.

Tatsächlich, wählen wir ein abgeschlossenes Komplement V_1 zu Ker F in V, sowie ein endlich dimensionales Komplement W_0 zu $F(V) = F(V_1)$ in W. Dann ist die Abbildung $\Phi: V_1 \oplus W_0 \to W$ mit $\Phi(v_1, w_0) = F(v_1) + w_0$ eine stetige lineare Bijektion und somit ein Homöomorphismus (Satz von der offenen Abbildung). Also ist das Bild $\Phi(V_1 \oplus \{0\}) = F(V_1) = F(V)$ des abgeschlossenen Unterraumes $V_1 \oplus \{0\} \subset$ $\subset V_1 \oplus W_0$ ebenfalls abgeschlossen.

Seien nun V, W reelle oder komplexe Banach-Räume. Alle auftretenden Normen werden wir mit $\|\cdot\|$ bezeichnen. Im Vektorraum $L(V,W)$ aller stetigen linearen Abbildungen $F: V \to W$ definiert man die Operator-Norm

$$\|F\| = \sup\{\|Fv\| : v \in V, \|v\| \leq 1\}.$$

Somit ist $\|F\|$ die kleinste Zahl $C \geq 0$ mit $\|Fv\| \leq C\|v\|$ für alle $v \in V$. Mit der Operator-Norm versehen ist $L(V,W)$ ein Banach-Raum. Sind V, W, U drei Banach-Räume, so ist die Kompositionsabbildung

$$L(V,W) \times L(W,U) \ni (F,G) \mapsto G \circ F \in L(V,U)$$

stetig, weil sie bilinear ist und $\|G \circ F\| \leq \|G\| \cdot \|F\|$ (denn $\|GFv\| \leq$ $\leq \|G\| \|Fv\| \leq \|G\| \|F\| \|v\|$).

<u>Wichtige Eigenschaften des Raumes $L(V,W)$ für Banach-Räume V, W.</u>

(i) Die linearen <u>Homöomorphismen</u> $V \to W$ <u>bilden eine offene Menge</u> in $L(V,W)$ (die auch leer sein kann).

(ii) Für jede ganze Zahl k bilden die <u>stetigen Fredholm-Operatoren</u> $V \to W$ <u>vom Index</u> k <u>eine offene Menge</u> in $L(V,W)$.

<u>Beweis</u>. (i) 1. Schritt: Ist $F \in L(V,V)$ und $\|F\| < 1$, so ist $Id_V - F$ ein linearer Homöomorphismus von V. Tatsächlich, sei

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} F^i = Id_V + F + F^2 + \dots .$$

Diese Reihe konvergiert im Banach-Raum $L(V,V)$, weil sie absolut konvergiert:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|F^i\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \|F\|^i \leqslant \frac{1}{1-\|F\|} \quad (\|F\|<1).$$

Somit ist $G \in L(V,V)$ sinnvoll definiert und, offenbar, $(Id_V - F) \circ G = G \circ (Id_V - F) =$

$= Id_V$, d.h. $G = (Id_V - F)^{-1}$!

2. Schritt: Sei $F \in L(V,W)$ ein Homöomorphismus. Die lineare Abbildung $L(V,W) \ni G \mapsto$ $\mapsto F^{-1} \circ G \in L(V,V)$ ist stetig (S. 751), d.h. es gibt $C > 0$ mit $\| F^{-1} \circ G \| \leq$ $\leq C \| G \|$ für $G \in L(V,W)$. Sei nun $G \in L(V,W)$ mit $\| G \| < \frac{1}{C}$. Dann $\| F^{-1} \circ G \| < 1$, also $Id_V - F^{-1} \circ G$ ist ein Homöomorphismus. Somit ist

$$F \circ (Id_V - F^{-1} \circ G) = F - G$$

ein Homöomorphismus für alle $G \in L(V,W)$ mit $\| G \| < \frac{1}{C}$, was (i) beweist.

(ii) Sei $F_0 \in L(V,W)$ ein Fredholm-Operator vom Index k. Wählen wir abgeschlossene Komplemente $V_1 \subset V$, $W_0 \subset W$ mit $V = \operatorname{Ker} F_0 \oplus V_1$, $W = F_0(V) \oplus W_0$ ((f)i), S. 747) und sei $\pi : W = F_0(V) \oplus W_0 \to$

$\to F_0(V)$ die (stetige) Projektion ((f)iii), S. 748). Somit ist $\pi \circ F_0 : V_1 \to F_0(V)$ ein linearer Homöomorphismus. Da der Einschränkungshomomorphismus $L(V,W) \to$ $\to L(V_1, W)$ sowie die Komposition mit π $(L(V_1,W) \to L(V_1, F_0(V)))$ stetige Operatoren sind (S. 751) ist, wegen (i) auf S. 752,

$$\pi \circ F : V_1 \to F_0(V)$$

ebenfalls ein Homöomorphismus für alle $F \in L(V,W)$ nahe F_0. Von nun an betrachten wir ein solches F; wir werden zeigen, daß F ein Fredholm-Operator vom Index k ist.

Es ist

$$W = F(V_1) \oplus W_0 .$$

Einerseits $F(V_1) \cap W_0 = \{0\}$: $\pi : F(V_1) \to$ $\to F_0(V)$ ist ein Isomorphismus (weil

$\pi \circ F$ es ist), während $\pi = 0$ auf W_0. Andererseits, für $w \in W$, gibt es $w_1 \in F(V_1)$ mit $\pi(w) = \pi(w_1)$ (weil $\pi : F(V_1) \to F_0(V)$ ein Isomorphismus ist), woher $w = (w - w_1) + w_1$, $w - w_1 \in W_0 = \operatorname{Ker} \pi$, $w_1 \in F(V_1)$. Wir haben auch

$$F(V) = (W_0 \cap F(V)) \oplus F(V_1).$$

Die Räume auf ~~der~~ rechten Seite haben nämlich trivialen Durchschnitt ($\pi = 0$ auf dem ersten, π injektiv auf dem zweiten), während, für $w \in F(V) \subset W = F(V_1) \oplus W_0$, $w = F(v_1) + w_0$, $v_1 \in V_1$, $w_0 \in W_0$, woher auch $w_0 = w - F(v_1) \in F(V)$.

Wählen wir noch $W_1 \subset W_0$ mit

$$W_0 = (W_0 \cap F(V)) \oplus W_1,$$

so ist insgesamt

$$W = \underbrace{W_1 \oplus (W_0 \cap F(V))}_{W_0} \oplus F(V_1), \qquad \overbrace{(W_0 \cap F(V)) \oplus F(V_1)}^{F(V)}.$$

Da F auf V_1 injektiv ist, ist die natürliche Abbildung

$$\operatorname{Ker} F \longrightarrow V/V_1 \cong \operatorname{Ker} F_0$$

auch injektiv (also $\dim \operatorname{Ker} F \leq \dim \operatorname{Ker} F_0 < \infty$) und es gibt $V_2 \subset V$ mit $\dim V_2 < \infty$ und

$$V = V_1 \oplus \operatorname{Ker} F \oplus V_2 .$$

Nun bildet F das Komplement $V_1 \oplus V_2$ zu $\operatorname{Ker} F$ in V isomorph auf $F(V) = (W_0 \cap F(V)) \oplus F(V_1)$ ab und dabei ist $F : V_1 \to F(V_1)$ auch ein Isomorphismus. Also

$$\dim V_2 = \dim (W_0 \cap F(V))$$

woher

$\text{Index } F = \dim \text{Ker } F - \dim W_1 =$

$= \dim(\text{Ker } F \oplus V_2) -$

$- \dim(W_1 \oplus (W_0 \cap F(V))) =$

$= \dim(V/V_1) - \dim W_0 =$

$= \dim \text{Ker } F_0 - \dim \text{Coker } F_0 =$

$= \text{Index } F_0 = k.$

q. e. d.

Seien V, W Banach-Räume. Unter einer <u>stetigen</u> <u>Familie</u> <u>von</u> <u>Fredholm-Operatoren</u> $V \to W$ <u>mit</u> <u>Parameterraum</u> T verstehen wir eine stetige Abbildung $T \ni t \mapsto P_t \in L(V, W)$ des topologischen Raumes T nach $L(V, W)$, die Werte in Fredholm-Operatoren annimmt. Aus (ii) von S. 752 folgt nun, daß eine solche

Familie <u>mit</u> <u>zusammenhängendem</u> <u>Parameterraum</u> T (z. B. eine stetige Kurve von Fredholm-Operatoren) <u>konstanten</u> <u>Index</u> haben muß, d. h. es gibt $k_0 \in \mathbb{Z}$ mit $\text{Index } P_t = k_0$ für alle $t \in T$. Tatsächlich ist

$$T = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ t \in T : \text{Index } P_t = k \}$$

eine Zerlegung von T in disjunkte offene Mengen, so daß eine dieser Mengen ganz T sein muß.

<u>Definition</u>. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M, T ein topologischer Raum. Unter einer <u>stetigen</u> <u>Familie</u> <u>von</u> <u>Differentialoperatoren</u> $E \to E'$ <u>der</u> <u>Ordnung</u> k <u>mit</u> <u>Parameterraum</u>

T verstehen wir eine Abbildung, die jedem $t \in T$ einen solchen Operator P_t zuordnet und dabei die Koeffizientenfunktionen in allen lokalen Darstellungen von P_t stetig von (t, y), $y \in M$, abhängen. Die letzte Stetigkeitsbedingung ist offenbar eine geometrische Eigenschaft; äquivalent kann man sagen, daß in der globalen Lichnerowicz-Darstellung für P_t (S. 661-662) die Koeffiziententensorfelder $\underset{s}{H}$, $s = 0, \dots, k$, stetig von (t, y) abhängen.

Sei nun $T \ni t \longmapsto P_t : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ eine stetige Familie wie oben, und sei M kompakt.* Betrachtet man die Distributionsfortsetzungen

$$P_t : L^2_k(E) \to L^2(E'),$$

* während T ein metrischer Raum ist.

so ist $T \ni t \longmapsto P_t \in L(L^2_k(E), L^2(E'))$ eine stetige Abbildung (bezüglich der Operator-Norm).

Beweis. Statt $L^2_k(E)$ können wir den dichten Unterraum $\Gamma(E)$ betrachten. Sei

$$P_t = \langle \underset{k}{H}(t), \nabla^k \rangle + \dots + \langle \underset{0}{H}(t), \nabla^0 \rangle$$

(S. 661-662) mit festen Zusammenhängen und Fasermetriken. Dann ist für $\sigma \in \Gamma(E)$ offenbar $(t, t_0 \in T)$

$$\| P_t \sigma - P_{t_0} \sigma \|_{L^2} \leq \sup_M | \underset{k}{H}(t) - \underset{k}{H}(t_0) | \cdot \| \nabla^k \sigma \|_{L^2} + \dots$$

$$\dots + \sup_M | \underset{0}{H}(t) - \underset{0}{H}(t_0) | \cdot \| \nabla^0 \sigma \|_{L^2} \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{k} \sup_M | \underset{s}{H}(t) - \underset{s}{H}(t_0) | \cdot \| \sigma \|_{L^2_k}.$$

Seien nun $t_0 \in T$ und $s = 0, \dots, k$ fest. Wir behaupten, daß es für jedes $\varepsilon > 0$

eine Umgebung $\mathcal{U}$ von t_0 in T gibt mit $\sup_M |\underset{s}{H}(t) - \underset{s}{H}(t_0)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathcal{U}$ (dann wird also $\| P_t - P_{t_0} \| < \varepsilon$ für t dicht genug bei t_0 sein, woher unsere Behauptung folgt). Wäre dies nicht der Fall, so finden wir $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $t_m \in T$, $y_m \in M$ mit $t_m \to t_0$ und

$$|\underset{s}{H}(t_m, y_m) - \underset{s}{H}(t_0, y_m)| \geq \varepsilon_0 ;$$

ersetzt man hier y_m durch eine konvergente Teilfolge ($y_m \to y$), so wäre

$$0 = |\underset{s}{H}(t_0, y) - \underset{s}{H}(t_0, y)| \geq \varepsilon_0 > 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

q. e. d.

<u>Homotopie - Invarianz des Index für elliptische Operatoren</u>. Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit M.

(i) Ist $T \ni t \mapsto P_t : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ eine stetige Familie von <u>elliptischen</u> Operatoren der wesentlichen Ordnung k mit zusammenhängendem metrischem Parameterraum T, so ist Index P_t von $t \in T$ unabhängig.

(ii) Der Index eines beliebigen elliptischen Operators $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ hängt nur vom Symbol σ_P ab.

(iii) Der Index eines elliptischen Operators $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ hängt nur von der <u>Homotopieklasse</u> seines Symbols σ_P ab, was folgendermaßen zu verstehen ist: Sind $P_0, P_1 : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ elliptische Operatoren der gleichen wesentlichen Ordnung k und gibt es eine stetige Kurve $[0,1] \ni t \mapsto$ $\mapsto H_t \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E,E') \otimes S^k TM)$ (Stetigkeit im Sinne von S. 759), die aus elliptischen Symbolen besteht und $H_0 = \sigma_{P_0}$, $H_1 = \sigma_{P_1}$ hat, so ist

$$\mathrm{Index}\, P_0 = \mathrm{Index}\, P_1 .$$

<u>Beweis</u>. (i) $P_t : L^2_k(E) \to L^2(E')$ bilden eine stetige Familie von Fredholm-Operatoren, so daß die Behauptung folgt (vgl. S. 758).

(ii) Bei festen Zusammenhängen und Fasermetriken ist $\mathrm{Index}\, P = \mathrm{Index} \langle \sigma_P, \nabla^k \rangle$ (Bezeichnung: S. 651), wobei k die wesentliche Ordnung des <u>beliebigen</u> elliptischen Operators P ist. Tatsächlich,

$$P = \langle \sigma_P, \nabla^k \rangle + Q$$

wobei Q ein Operator der Ordnung $k-1$ ist. Nun ist $[0,1] \ni t \mapsto P_t =$ $= \langle \sigma_P, \nabla^k \rangle + (1-t) Q$ eine stetige Kurve von elliptischen Operatoren, so daß $\mathrm{Index}\, P = \mathrm{Index}\, P_0 =$ $= \mathrm{Index}\, P_1 = \mathrm{Index} \langle \sigma_P, \nabla^k \rangle$ wegen (i).

(iii) Wegen (ii) ist $\mathrm{Index}\, P_0 = \mathrm{Index} \langle H_0, \nabla^k \rangle$, $\mathrm{Index}\, P_1 = \mathrm{Index} \langle H_1, \nabla^k \rangle$, während nach (i) der Index von $\langle H_t, \nabla^k \rangle$ bezüglich $t \in [0,1]$ konstant ist.

q. e. d.

<u>Beispiele</u>. a) Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Für jeden elliptischen Operator $P : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ist

$$\mathrm{Index}\, P = 0 .$$

Tatsächlich, sei $2m$ die wesentliche Ordnung von P (S. 135) und sei z. B.

$\sigma_P < 0$ (wir können immer P durch $-P$ ersetzen). Dann ist $[0,1] \ni t \mapsto$ $\mapsto (1-t)P + t\Delta^m$ eine stetige Kurve von elliptischen Operatoren, die P mit Δ^m verbindet (für eine feste Metrik g) und $\operatorname{Index} P = \operatorname{Index} \Delta^m = 0$, weil $\Delta = \Delta^*$ (im Allgemeinen ist der Index jedes formal selbstadjungierten elliptischen Operators gleich 0). Dies bedeutet, daß der Begriff Index für elliptische Operatoren auf Funktionen uninteressant ist. Die Gleichung $\operatorname{Index} P = 0$ liefert uns jedoch die Fredholmsche Alternative: Entweder hat die homogene Gleichung $Pf = 0$ eine nicht-triviale Lösung $f \in C^\infty(M)$, oder gibt es für jedes

$h \in C^\infty(M)$ genau eine Lösung $f \in C^\infty(M)$ der inhomogenen Gleichung $Pf = h$ (man sagt auch: für solche Gleichungen ist die Existenz der Lösung eine Konsequenz ihrer Eindeutigkeit).

b) In der kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) haben wir den elliptischen Operator

$$P = d + \delta : \Omega^{ev} M \to \Omega^{od} M$$

(S. 686), der von g abhängt. Da man je zwei Metriken auf M mit einer C^∞-Kurve* von Metriken verbinden kann, hängt $\operatorname{Index} P$ von g nicht ab; er muß also eine Art topologische Invariante von M sein. Da wir $\operatorname{Ker} P$ und $\operatorname{Ker} P^*$ kennen (S. 686), können wir ausrechnen

$$\operatorname{Index} P = \dim \mathcal{H}^{ev}(M,g) - \dim \mathcal{H}^{od}(M,g) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k(M), \quad n = \dim M; \quad \text{z. B.}$$

* z. B. mit einer geradlinigen Strecke

für $M = S^n$, n gerade, Index $P = 2$.
Es gibt also elliptische Operatoren P mit Index $P \neq 0$.

Bemerkung. Die Dimension des Kerns ist keine Homotopie-Invariante des elliptischen Operators: In einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g), sei $P_t f = \Delta f + tf$, $f \in C^\infty(M)$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $\dim \operatorname{Ker} P_1 = 0$, aber $\dim \operatorname{Ker} P_0 = 1$.

Beispiel. Sei (M,g) eine kompakte zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Divergenz-Operator $\delta : \Gamma(S^2_0(TM)) \to \Gamma(T^*M)$ (S. 656) ist immer elliptisch. Sei nun $M = S^2$ und sei g eine Metrik konstanter Krümmung. Dann ist $\operatorname{Ker} \delta = \{0\}$. Tatsächlich, sei $a \in \Gamma(S^2_0(TM))$

mit $\delta a = 0$, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$, $g^{ij} a_{ij} = 0$ und $a_{is,}{}^{s} = 0$. Setzen wir $b_{ij} = V_{is} a^s{}_j$, wobei V das Volumenelement von (S^2, g) ist (für eine feste Orientierung). Für $y \in S^2$ wählen wir Koordinaten x^i um y, für die $\partial_1(y), \partial_2(y)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_y S^2$ ist. Für diese Koordinaten haben wir in y $V_{12} = -V_{21} = 1$, also $b_{12} = V_{12} a^2{}_2$, $b_{21} = V_{21} a^1{}_1 = V_{12} a^2{}_2 = b_{12}$ (weil $a^1{}_1 + a^2{}_2 = 0$), d.h. b ist symmetrisch. Offenbar ist auch $b_{ij,}{}^{j} = 0$, sowie $b^s{}_s = 0$. Sei nun X ein beliebiges Killing-Feld auf (S^2, g). Für $\omega_i = a_{ij} X^j$ ist offenbar $\omega_{i,}{}^{i} = 0$, d.h. $\omega \in \Omega^1 S^2$ und $\delta\omega = 0$. Da b dieselben Eigenschaften hat wie a, ist auch $0 = (b_{ij} X^j)_,{}^{i} = (V_i{}^s a_{sj} X^j)_,{}^{i} =$

$= (V_i{}^s \omega_s)_{,}{}^i = V^{is}\omega_{s,i} =$

$= \frac{1}{2} V^{is}(\omega_{s,i} - \omega_{i;s})$, da $\nabla V = 0$ und $V^{is} = -V^{si}$. Da $\Omega^2 S^2$ Faserdimension 1 hat, muß die zu V in jedem Punkt orthogonale 2-Form $d\omega$ verschwinden. Somit ist ω harmonisch, also $\omega = 0$ (S. 674), d.h. $a_{ij}X^j = 0$ für jedes Killing-Feld X, woher $a = 0$, weil die Killing-Felder auf (S^2, g) in jedem Punkt alle Tangentialvektoren als Werte annehmen (Bemerkung: dasselbe Argument funktioniert auch für eine Metrik g auf S^2, die ein nichttriviales Killing-Feld X zuläßt; aus $a_{ij}X^j = 0$ und $a_{ij} = a_{ji}$, $g^{ij}a_{ij} = 0$, mit der Tatsache, daß $X \neq 0$ fast überall, vgl. c), S. 543, folgt dann $a = 0$, falls $\delta a = 0$).

Also $\operatorname{Ker}\delta = \{0\}$. Man sieht nun leicht, daß $\delta^*: \Gamma(T^*M) = \Gamma(TM) \to \Gamma(S^2_0(TM))$ durch die Formel $(\delta^* X)_{ij} = X_{i,j} + X_{j,i} - X^s{}_{,s} g_{ij}$ gegeben ist, so daß insbesondere $\delta^* X = 0$ für jedes Killing-Feld X. Auf der Sphäre (S^2, g) konstanter Krümmung gibt es 3 unabhängige Killing-Felder; also $\dim \operatorname{Ker}\delta^* \geqslant 3$ und Index $\delta \leqslant -3$, also auch Index $\delta \neq 0$ (man kann zeigen, daß $\operatorname{Ker}\delta = \{0\}$, $\dim \operatorname{Ker}\delta^* = 6$ und somit Index $\delta = -6$ für jede Metrik g auf S^2).

Bedeutung der Homotopie-Invarianz des Index von elliptischen Operatoren.

Seien E, E' reelle oder komplexe Vektorbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit M. Der Index eines elliptischen Operators $P: \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ ist per definitionem eine <u>analytische</u> Größe; um ihn auszurechnen, muß man feststellen, wieviele linear unabhängige Lösungen gewisse Systeme partieller Differentialgleichungen haben können. Andererseits wissen wir ((iii), S. 762), daß Index P durch die Homotopieklasse des Symbols σ_P allein bestimmt ist; er ist also auch eine <u>topologische</u> Invariante (sogar eine Homotopieinvariante) von σ_P. Die Vermutung liegt nahe, daß es eine Formel gibt:

$$\text{Index } P = \text{topologisch}(\sigma_P)$$

und es ist in der Regel zu erwarten, daß die ganzzahlige topolo-

gische Invariante auf der rechten Seite dadurch entsteht, daß man auf M eine gewisse "charakteristische Klasse" integriert (d. h. ein Element von H^*M, das man irgendwie ähnlich wie die uns bekannte Euler-Klasse bildet), die σ_P zugeordnet ist. Diese <u>Indexformel</u> mit einem expliziten Ausdruck auf der rechten Seite wurde von M. F. Atiyah und I. M. Singer (1963) gefunden und bewiesen*. Wir müssen hier auf die genaue Formulierung der Indexformel verzichten. Es soll jedoch erwähnt werden, daß sie zweierlei Anwendungen hat, die Beweise von vielen wichtigen Sätzen

*Siehe z. B. P. Shanahan, The Atiyah-Singer Index Theorem, Springer Lect. Notes in Math. No. 638, 1978 oder B. Booß, Topologie und Analysis - Eine Einführung in die Atiyah-Singer-Indexformel, Springer-Verlag 1977 liefern: manchmal kennt man den analytischen Index von P ($\dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Ker} P^*$), so daß man von der rechten Seite topologische Folgerungen bekommt; in anderen Fällen kann man den topologischen Ausdruck auf der rechten Seite ausrechnen und wenn sich z. B. herausstellt, daß deshalb $\operatorname{Index} P \neq 0$, so weiß man schon, daß eine der Gleichungen $P\sigma = 0$, $P^*\tau = 0$ nicht-triviale Lösungen besitzen muß.

<u>Noch über Fredholm-Operatoren.</u>

(i) Seien V, W reelle oder komplexe Banach-Räume. Ist $F: V \to W$ ein stetiger Fredholm-Operator, so ist $F^*: W^* \to V^*$ ebenfalls ein Fredholm-Operator mit $\operatorname{Index} F^* = - \operatorname{Index} F$.

<u>Beweis</u>. $\operatorname{Ker} F^* = \{ f \in W^* : f \circ F = 0 \} = \{ f \in W^* : f$ verschwindet auf $F(V) \}$.

Da $F(V)$ abgeschlossen ist (S. 750), kann man den Banach-Raum $W/_{F(V)}$ bilden und offenbar ist $\operatorname{Ker} F^*$ kanonisch mit $\left(W/_{F(V)}\right)^*$ identifizierbar. Da $\dim\left(W/_{F(V)}\right) = \dim \operatorname{Coker} F < \infty$, ist $\dim \operatorname{Ker} F^* = \dim \operatorname{Coker} F < \infty$.

Sei nun $V_1 \subset V$ ein abgeschlossenes Komplement zu $\operatorname{Ker} F$: $V = \operatorname{Ker} F \oplus V_1$ (f)i), S. 747). Ein stetiges Funktional auf V ist durch seine Einschränkungen auf $\operatorname{Ker} F$ und V_1 eindeutig bestimmt, d.h. $V^* = (\operatorname{Ker} F)^* \oplus V_1^*$ (vgl. f)iii), S. 748)

Nun ist $F^*(W^*) = V_1^*$ (der Raum aller Funktionale $f \in V^*$, die auf $\operatorname{Ker} F$ verschwinden), weil $F: V_1 \to F(V)$ ein linearer Homöomorphismus ist. Also

$\operatorname{Coker} F^* \cong (\operatorname{Ker} F)^* \cong \operatorname{Ker} F$, woher die Behauptung folgt.

(ii) Seien V, W Banach-Räume, $F \in L(V,W)$ ein Fredholm-Operator, $H \in L(V,W)$ ein kompakter Operator. Dann ist $F+H$ auch ein Fredholm-Operator und $\operatorname{Index}(F+H) = \operatorname{Index} F$.

<u>Beweis</u>. a) $\dim \operatorname{Ker}(F+H) < \infty$. Wählen wir ein abgeschlossenes Komplement V_1 zu $\operatorname{Ker} F$ in V (f/i), S. 747), so daß $F: V_1 \to F(V)$ ein Homöomorphismus ist (Satz von der offenen Abbildung). Dann ist $V_2 = V_1 \cap \operatorname{Ker}(F+H)$ ein abgeschlossener Unterraum endlicher Kodimension im Banach-Raum $\operatorname{Ker}(F+H)$, weil die natürliche Abbildung

$$\operatorname{Ker}(F+H)/V_2 \to V/V_1 \cong \operatorname{Ker} F$$

injektiv ist. Es genügt also zu zeigen, daß $\dim V_2 < \infty$. Man bemerke, daß $F: V_2 \to F(V_2)$ ein Homöomorphismus auf den abgeschlossenen Unterraum $F(V_2) \subset W$ ist, weil dasselbe für $V_1 \supset V_2$ gilt. Nun beweisen wir, daß jede beschränkte Folge x_m in V_2 eine konvergente Teilfolge besitzt (woher bekanntlich $\dim V_2 < \infty$ folgen wird). Für eine Teilfolge ist $Hx_m \to y \in W$, also da $V_2 \subset \operatorname{Ker}(F+H)$, $Fx_m = -Hx_m \to -y$. Da $F(V_2)$ abgeschlossen und $F: V_2 \to F(V_2)$ ein Homöomorphismus ist, gibt es $x \in V_2$ mit $x_m \to x$ (und $Fx = -y$); somit ist a) bewiesen.

b) Ist V ein Banach-Raum, $V_1 \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum und $V_0 \subset V$ endlich dimensional, so ist $V_0 + V_1 = \{v_0 + v_1 : v_0 \in V_0, v_1 \in V_1\}$ ebenfalls abgeschlossen.

Tatsächlich, wir dürfen annehmen, daß $V_0 = \mathbb{F} v_0$ eindimensional ist, wobei $v_0 \notin V_1$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$; nach endlich vielen Schritten wird der allgemeine Fall folgen. Sei $f: V_0 + V_1 \to \mathbb{F}$ das Funktional mit $f(\lambda v_0 + v_1) = \lambda$. Da $\operatorname{Ker} f = V_1$ in $V_0 + V_1$ abgeschlossen ist, muß f stetig sein (dies gilt auch in nicht-vollständigen normierten Räumen). Sei nun $\lambda_m v_0 + (v_1)_m \to z \in V$. Das f-Bild λ_m der Cauchy-Folge $\lambda_m \cdot v_0 + (v_1)_m$ in $V_0 + V_1$ ist eine Cauchy-Folge, also $\lambda_m \to \lambda \in \mathbb{F}$, woher $(v_1)_m \to z - \lambda v_0$; da V_1 abgeschlossen ist, ist $z - \lambda v_0 = v_1 \in V_1$ und somit $z = \lambda v_0 + v_1 \in V_0 + V_1$, was b) beweist.

c) Der Raum $\operatorname{Ker} F + \operatorname{Ker}(F+H) = \{x_1 + x_2 : x_1 \in \operatorname{Ker} F, x_2 \in \operatorname{Ker}(F+H)\}$ ist endlich dimensional wegen a), also besitzt es in V ein abgeschlossenes Komplement V_3:

$$V = \left(\operatorname{Ker} F + \operatorname{Ker}(F+H)\right) \oplus V_3$$

(S. 747). Für so ein V_3 ist $(F+H)(V_3)$ in W abgeschlossen.

Tatsächlich, sei $x_m \in V_3$, $(F+H)x_m \to y \in W$. Für eine Teilfolge ist $\|x_m\| \to a \in [0,\infty)$ oder $\|x_m\| \to \infty$. Ist $\|x_m\| \to a < \infty$, so ist (für eine Teilfolge) $Hx_m \to z \in W$, d. h. $\lim_m Fx_m = \lim_m (F+H)x_m - \lim_m Hx_m = y - z$. Da $F: V_3 \to F(V_3)$ ein Homöomorphismus ist (weil dasselbe für ein größeres abgeschlossenes Komplement zu Ker F gilt, das nach b) existieren um β), gibt es $x \in V_3$ mit $x_m \to x$, d. h. $y = (F+H)x$. Sei dagegen $\|x_m\| \to \infty$ (der übrige Fall).

Also für $z_m = \frac{x_m}{\|x_m\|}$, $Fz_m + Hz_m \to 0$ und (Teilfolge) $Hz_m \to w$, woher $Fz_m \to -w$ und, wie oben, gibt es $z \in V_3$ mit $z_m \to z$. Nun ist $(F+H)z = 0$, was mit $z \in V_3$ und $\|z\| = \|z_m\| = 1$ unvereinbar ist; somit kommt der Fall $\|x_m\| \to \infty$ nicht vor. Die Behauptung c) ist also bewiesen.

d) $(F+H)(V)$ ist abgeschlossen in W. Dies folgt sofort aus c) und b), weil, für V_3 wie in c), $(F+H)(V) = (F+H)(V_3) + W_2$, wobei $\dim W_2 < \infty$.

e) $\dim \operatorname{Coker}(F+H) < \infty$: Wegen d) ist $\operatorname{Coker}(F+H) = W/(F+H)(V)$ ein Banach-Raum und, offenbar, ist sein Dual

$$\left(W/(F+H)(V)\right)^* = \\ = \{f \in W^* : (F+H)^* f = 0\}$$

Da F^* ein Fredholm-Operator ist ((i), S. 773) und H^* kompakt ist (Aufgabe VIII. 7) ist $\dim \operatorname{Ker}(F+H)^* < \infty$ (wegen a)). Somit ist $\left(W/(F+H)(V)\right)^*$ endlich dimensional, also auch $\dim\left(W/(F+H)(V)\right) < \infty$ (wegen des Satzes von Hahn und Banach gibt es in jedem unendlich dimensionalen Banach-Raum unendlich viele unabhängige lineare Funktionale).

f) Wegen a) und e) ist $F+H$ ein Fredholm-Operator, falls $F \in L(V, W)$

ein Fredholm-Operator und $H \in L(V, W)$ kompakt ist. Also, wir haben die stetige Kurve

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto F_t = F + tH$$

von Fredholm-Operatoren $V \to W$, woher $\mathrm{Index}(F+H) = \mathrm{Index}\, F_1 = \mathrm{Index}\, F_0 = \mathrm{Index}\, F$ (S. 757–758).

q.e.d.

<u>Weitere</u> <u>Eigenschaften</u>. Seien V, W Banach-Räume, $F \in L(V, W)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) F ist ein Fredholm-Operator

(ii) Es gibt $G, G' \in L(W, V)$ und kompakte Operatoren $H \in L(V, V)$, $H' \in L(W, W)$ mit

$$G \circ F = \mathrm{Id}_V + H, \quad F \circ G' = \mathrm{Id}_W + H'.$$

<u>Beweis</u>. (i) $\to$ (ii). Sei $V = \mathrm{Ker}\, F \oplus V_1$, V_1 abgeschlossen (S. 747) und $W = F(V) \oplus W_0$. Ist $\pi : W \to F(V)$ die Projektion und $Q : F(V) \to V_1$ das Inverse des Homöomorphismus $F : V_1 \to F(V)$, so hat man (ii) mit $G = Q \circ \pi = G'$ (dabei sind H, H' nicht nur kompakt, sondern auch endlich dimensional).

(ii) $\to$ (i). Nach (ii), S. 775 sind $G \circ F$ und $F \circ G'$ Fredholm-Operatoren. Nun $\mathrm{Ker}\, F \subset \mathrm{Ker}(G \circ F)$, $F(V) \supset F(G'(V))$, d.h. $\dim \mathrm{Ker}\, F < \infty$ und $F(V)$ hat endliche Kodimension.

<u>Eine Kennzeichnung der Fredholm-Operatoren</u> in $L(V, V)$. Sei V ein Banach-Raum. Dann ist $L(V, V)$

nicht nur ein Banach-Raum, sondern eine Banach-Algebra (Multiplikation: $(F, G) \to F \circ G$, mit Neutralelement Id_V, wobei $\| Id_V \| = 1$ und $\| F \circ G \| \leq \| F \| \cdot \| G \|$). Man sieht leicht, daß die Menge $\mathcal{K}_V$ der kompakten Operatoren in $L(V, V)$ ein Ideal in dieser Algebra bildet, das auch abgeschlossen ist. Somit ist $\mathcal{A}_V = {}^{L(V,V)}/_{\mathcal{K}_V}$ nicht nur ein Banach-Raum, sondern eine Banach-Algebra. Für $F \in L(V, V)$ sei $[F] \in \mathcal{A}_V$ die Äquivalenzklasse von F. Nun haben wir (vgl. S. 781): $F \in L(V, V)$ ist ein Fredholm-Operator genau dann, wenn $[F]$ in der Gruppe der umkehrbaren Elemente von $\mathcal{A}_V$ liegt. Bezeichnen wir diese Gruppe (mit Multiplikation als Gruppenoperation)

mit $\overset{\circ}{\mathcal{A}}_V$. Dann ist die Abbildung

$$\text{Index} : \overset{\circ}{\mathcal{A}}_V \longrightarrow \mathbb{Z}$$

durch $\text{Index}\,[F] = \text{Index}\, F$ sinnvoll definiert weil, wenn $[F] = [G] \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_V$, so $G = F + H$ mit $H \in \mathcal{K}_V$ und daher $\text{Index}\, F = \text{Index}\, G$ ((ii), S. 775). Es ist klar, daß diese Index-Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist. Man kann auch leicht zeigen, daß sie stetig ist, d. h. lokal konstant: die offene Teilmenge $\overset{\circ}{\mathcal{A}}_V$ von $\mathcal{A}_V$ zerfällt in disjunkte offene Mengen, auf denen Index konstant ist.