textes mathématiques

3

géométrie riemannienne en dimension 4

Séminaire Arthur Besse

recherche

comité d'édition
Lionel Bérard-Bergery
Marcel Berger
Christian Houzel

CEDIC/FERNAND NATHAN

Dans la même collection
« Textes mathématiques » :

1 — Structures métriques pour les variétés riemanniennes. *M. Gromov ; rédigé par J. Lafontaine et P. Pausu.*

2 — Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie. *A. Guichardet.*

3 — Géométrie riemannienne en dimension 4. *Seminaire Arthur Besse 1978/79.*

Editions CEDIC
93, avenue d'Italie
75013 PARIS. Tél. : (1) 569.61.85

Ce volume porte la référence
ISBN 2-7124-0717-2

EXPOSE N° XVII

EXEMPLES DE METRIQUES DE KALHER ET D'EINSTEIN AUTODUALES SUR LE PLAN COMPLEXE

par

Andrzej DERZINSKI

INTRODUCTION

Le présent exposé donne une construction explicite de métrique de Kälher sur $\mathbb{C}^2$. Pour la définition et les propriétés de l'auto-dualité, voir les parties 2 et 3 de l'exposé N°XIII.

Dans la partie 1, on présente le lemme fondamental 1.1 et des lemmes techniques. Dans la partie 2, on construit des métriques de Kälher autoduales sur $\mathbb{C}^2$ qui ne sont pas localement conformes à une métrique Riemannienne localement symétrique. Dans la partie 3, on montrera que, si la courbure scalaire est positive, on peut obtenir par déformation conforme des métriques autoduales d'Einstein qui ne s'étendent pas en une métrique d'Einstein de $\mathbb{CP}^2$.

La construction développée ici vient d'une tentative de trouver de nouveaux exemples de variétés kälhériennes compactes autoduales. Cependant, d'après le théorème 1 de [3] , toutes ces variétés sont localement symétriques.

§ 1.- PRELIMINAIRES

La construction des métriques de Kälher et d'Einstein est basée sur les 4 lemmes suivants.

Lemme 1.1.- Soit M une variété de dimension 4 qui admet une base de champ de vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 tels que

$$[e_1,e_2] = [e_1,e_3] = [e_1,e_4] = 0 \quad , \quad [e_2,e_3] = 2(p-q^2)e_4 \tag{1}$$
$$[e_2,e_4] = 2\varepsilon e_3 \quad , \quad [e_3,e_4] = 2(p-q^2)e_2,$$

où p et q sont réels et $\varepsilon = \pm 1$.

Supposons qu'une fonction $u : M \to \mathbb{R}$ satisfasse les relations

$$\varepsilon(u^2-p) > 0 \quad , \quad \varepsilon(q-u) > 0 \tag{2}$$

et

$$D_{e_1} u = 2(q-u)(u^2-p) \quad , \quad D_{e_\alpha} u = 0 \quad , \quad \alpha = 2,3,4, \tag{3}$$

D_{e_α} étant la dérivée covariante dans la direction e_α.

On définit une structure presque complexe J et une métrique Riemannienne g par

$$Je_1 = e_3 \qquad Je_2 = e_4 \tag{4}$$

$$g(e_1,e_1) = g(e_3,e_3) = 48(q-u)(u^2-p) \tag{5}$$

$$g(e_2,e_2) = g(e_4,e_4) = 48\,\varepsilon\,(q-u) \qquad g(e_\alpha,e_\beta) = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

Alors

(i) La structure presque complexe J est intégrable.

(ii) La métrique hermitienne g sur (M,J) est kälhérienne.

(iii) La variété riemannienne (M,g) est auto duale pour l'orientation déterminée par J et n'est ni conformément plate, ni localement symétrique.

(iv) La courbure scalaire de g est égale à u et

$$(6) \qquad (\nabla_{\nabla u} \nabla u) \wedge \nabla u = 0$$

∇ étant la connexion riemannienne de g, les courbes intégrales de ∇u sont après reparamétrisation des géodésiques.

Soit $\Delta = \sum_{\alpha} \nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha}$ l'opérateur de Laplace et r le tenseur de Ricci de g, alors

$$(7) \qquad 12\, |\nabla u|^2 = (q-u)(u^2-p) \quad \text{et}$$

$$(8) \qquad 2\, \nabla^2 u + u\, r = \tfrac{1}{4}(2\, \nabla\, u + u^2) g$$

(v) $J(\nabla u)$ est un champ de vecteurs de Killing.

(vi) Les nombres p et q sont déterminés par g mais si $p \neq 0$, le quotient q^2/p ne dépend que de la classe d'homothétie de g.

(vii) Pour tous réels a, b et c tels que $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, les champs de vecteurs e_1 et $ae_2 + be_3 + ce_4$ sont intégrables et les surfaces intégrales sont totalement géodésiques si $b = 0$ ou $a = c = 0$.

(viii) Aux points où $u \neq 0$, la métrique hermitienne $u^{-2}g$ est, localement et à un facteur constant près, l'unique métrique d'Einstein conforme à g. La courbure scalaire λ de $u^{-2}g$ est constante et satisfait la relation

$$(9) \qquad \lambda = u^3 + 6u\, \Delta\, u - 12\, |\nabla u|^2 \; .$$

La métrique $u^{-2}g$ n'est pas localement homogène (donc pas localement symétrique).

(ix) Soit V un ouvert connexe de M où $u \neq 0$. Si, pour une fonction σ sur V, la métrique $\tilde{g} = e^{\sigma} g$ peut être obtenue par une construction analogue à celle de g (c'est-à-dire avec des $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_4$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{\varepsilon}$ et $\tilde{u}$) alors σ est constante.

Démonstration.- Des égalités (5), (3) et (1), on peut déduire

$$\nabla_{e_1}e_1 = (p+2qu-3u^2)e_1 \quad , \quad \nabla_{e_1}e_2 = (p-u^2)e_2 \quad ,$$

$$\nabla_{e_1}e_3 = (p+2qu-3u^2)e_3 \quad , \quad \nabla_{e_1}e_4 = (p-u^2)e_4 \quad ,$$

$$\nabla_{e_2}e_1 = (p-u^2)e_2 \quad , \quad \nabla_{e_2}e_2 = \varepsilon e_1 \quad , \quad \nabla_{e_2}e_3 = (p-u^2)e_4 \quad ,$$

$$\nabla_{e_2}e_4 = \varepsilon e_3 \quad , \quad \nabla_{e_3}e_1 = (p+2qu-3u^2)e_3 \quad , \quad \nabla_{e_3}e_2 = (2q^2-p-u^2)e_4 ,$$

$$\nabla_{e_3}e_3 = (3u^2-2qu-p)e_1 \quad , \quad \nabla_{e_3}e_4 = (u^2-2q^2+p)e_2 \quad ,$$

$$\nabla_{e_4}e_1 = (p-u^2)e_4 \quad , \quad \nabla_{e_4}e_2 = -\varepsilon e_3 \quad , \quad \nabla_{e_4}e_3 = (u^2-p)e_2 \quad ,$$

$$\nabla_{e_4}e_4 = \varepsilon e_1 \ .$$

D'où $\nabla_{e_\alpha}(Je_\beta) = J(\nabla_{e_\alpha}e_\beta)$ pour $\alpha,\beta = 1,2,3,4$, c'est-à-dire que $\nabla J = 0$ qui implique (i) et (ii). L'assertion (vii) est immédiate et l'égalité $e_1 = 24\,\nabla u$ qui se déduit de (3) et (5) implique (6) et (7).

On peut calculer les composantes non nulles du tenseur de courbure, du tenseur de Ricci et les quantités $\nabla_\alpha\nabla_\beta u = D_{e_\alpha}D_{e_\beta}u - u(\nabla_{e_\alpha}e_\beta)$.

$$R_{1212} = R_{1234} = R_{1414} = R_{1423} = R_{2323} = R_{3434} = 96\,\varepsilon\, u(q-u)^2(u^2-p),$$

$$R_{1313} = 192(3u-q)(q-u)^2(u^2-p)^2 \quad , \quad R_{1324} = 192\,\varepsilon\, u(q-u)^2(u^2-p) \quad ,$$

$$R_{2424} = 192(q+u)(q-u)^2 \quad \text{et} \quad r_{11} = r_{33} = 4(4u-q)(q-u)(u^2-p) \quad ,$$

$$r_{22} = r_{44} = 4\,\varepsilon\,(2u+q)(q-u) \quad \text{et}$$

$$\nabla_1\nabla_1 u = \nabla_3\nabla_3 u = 2(p+2qu-3u^2)(q-u)(u^2-p) \quad ,$$

$$\nabla_2\nabla_2 u = \nabla_4\nabla_4 u = 2\,\varepsilon\,(u-q)(u^2-p) \quad .$$

On vérifie alors (8) qui implique (iv), et (vi) se déduit de (7). On constate que (8) implique aussi que $\nabla^2 u$ commute avec J, c'est-à-dire que $\nabla(J(\nabla u))$ est antiautoadjoint d'où (v).

On calcule aussi les composantes du tenseur de Weyl :

$$W_{\alpha\beta\gamma\tau} = R_{\alpha\beta\gamma\tau} + \frac{1}{2}(g_{\beta\gamma}r_{\alpha\tau} + g_{\alpha\tau}r_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}r_{\beta\tau} - g_{\beta\tau}r_{\alpha\gamma}) + \\ + \frac{u}{6}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\tau} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\tau})$$

$$(10)\left\{\begin{array}{l} W_{1212} = - W_{1234} = W_{1414} = - W_{1423} = W_{2323} = W_{3434} = \\ = 96\,\varepsilon\, u(q-u)^2(p-u)^2 \quad , \quad W_{1313} = 192\; u(q-u)^2(u^2-p)^2 \quad , \\ W_{1234} = 192\,\varepsilon\, u(q-u)^2(u^2-p) \quad , \quad W_{2424} = 192\quad u(q-u)^2. \end{array}\right.$$

A partir des égalités $*(e_1 \wedge e_3) = \varepsilon(u^2-p)e_2 \wedge e_4$, $*(e_1 \wedge e_2) = e_4 \wedge e_3$ et $*(e_1 \wedge e_4) = e_3 \wedge e_2$, on voit que les formes $\omega^{\pm} = e_1 \wedge e_3 \pm \varepsilon\,(u^2-p)e_2 \wedge e_4$, $\eta^{\pm} = e_1 \wedge e_2 \pm e_4 \wedge e_3$ et $\theta^{\pm} = e_1 \wedge e_4 \pm e_3 \wedge e_2$ forme une base de $\Lambda^{2\pm}(M)$ en chaque point (remarque ω^+ est proportionnel à la forme de Kälher). Les égalités (10) impliquent (11),

$$(11) \qquad W(\omega^+) = 2\,\mu\, u\,\omega^+ \qquad W(\eta^+) = -\mu\, u\,\eta^+ \qquad W(\theta^+) = -\,\mu\;\, u\;\,\theta^+$$

$$W(\omega^-) = W(\eta^-) = W(\theta^-) = 0$$

où μ est une constante positive. Puisque la fonction u n'est pas constante (11) implique (iii). Soit V un ouvert de M où u ne s'annule pas et σ une fonction sur V, le tenseur de Ricci $\tilde{r}$ de $\tilde{g} = e^{\sigma}g$ donné par

$$\tilde{r} = r - \nabla^2\sigma + \frac{1}{2}\,d\sigma \otimes d\sigma - \frac{1}{2}(\Delta\sigma + |\nabla\sigma|^2)g,$$

si $\sigma = -\,2\,\log|u|$ l'égalité (9) est vérifiée et $\tilde{r}$ est un multiple fonctionnel de $\tilde{g}$. Donc $u^{-2}g$ est une métrique d'Einstein et (11) montre que la norme du tenseur est un multiple constant de $|u|^3$. Mais comme u n'est pas constant, $u^{-2}g$ n'est pas localement homogène. Dautre part, si pour une fonction σ $\tilde{g} = e^{\sigma}g$ est une métrique d'Einstein alors $\tilde{\delta}\tilde{\omega}$ défini localement par $(\tilde{\delta}\tilde{\omega})_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\tau} \tilde{\nabla}^{\tau}\tilde{\omega}_{\tau\alpha\beta\gamma}$ doit être identiquement nul. La relation $\tilde{\delta}\tilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2}\,W(\nabla\sigma,.,.,.)$ et (10) entraînent que l'application $x \mapsto W(x,.,.,.)$ est injective en tout point où $u \neq 0$, donc la condition $\tilde{\delta}\tilde{\omega} = 0$ détermine σ à une constante près, d'où (viii).

Enfin, si on considère la métrique $\tilde{g}$ de (ix) les propriétés (i) à (viii) sont vérifiées pour $\tilde{g}$ et le tenseur de Weyl de $\tilde{g}$ est un multiple fonctionnel de W, alors (11) implique que les formes de Kälher ω et $\tilde{\omega}$ de g et $\tilde{g}$ sont des formes propres de l'unique valeur propre simple de W, donc $\tilde{\omega} = f\omega$ et $\tilde{J} = \pm J$. L'égalité $0 = d\tilde{\omega} = df \wedge \omega$ implique que f est une constante ce qui avec $\tilde{J} = \pm J$ entraîne que σ est une constante. Ceci termine la démonstration du lemme fondamental 1.1. ∎

Remarque 1.2.- Les relations (1) définissent une algèbre de Lie de dimension 4 qui est une somme directe de $\mathbb{R}$ et d'une sous-algèbre de dimension 3. Par ailleurs, si $\varepsilon = -1$ et $q^2 < p$ les relations (2) et et (3) sont localement équivalentes à une équation différentielle en u pour des conditions initiales raisonnables. Ceci permet d'affirmer l'existence de métriques autoduales de Kälher sur $\mathbb{C}^2$.

Remarque 1.3.- (voir [3] parties 2 et 3). Il existe une réciproque partielle au lemme 1. Etant donné une variété kälhérienne autoduale de M dont le tenseur de Bach est zéro, dont la courbure scalaire u satisfait (6) et un point $x \in M$ vérifie $u(x) \neq 0$ et $du(x) \neq 0$, il existe une base de champs de vecteurs au voisinage de x e_1, e_2, e_3 et e_4 et des nombres p, q, ε réels $|\varepsilon| = 1$ qui vérifient (1) - (5) pour la structure complexe J initiale. Mais il y a des variétés kälhériennes non compactes autoduales qui ne satisfont pas (6).

Remarque 1.4.- La variété riemannienne (M,g) du lemme 1 a une courbure conforme récurrente au sens de [1], c'est-à-dire que pour tout $x \in M$ et $X \in T_xM$, les tenseurs $W(x)$ et $\nabla_X W$ sont linéairement indépendants. Ici d'après (11) $W = u\,P$ où P est un champ de tenseur parallèle. On démontre dans [3] que les variétés riemanniennes de dimension 4 localement irréductibles et qui ne sont pas conformément plates sont (localement) des variétés kälhériennes non conformement plates. Ce résultat est à comparer au théorème suivant de W. Roter : toute variété riemannienne analytique de dimension supérieure à 4 dont la courbure conforme est récurrente est conformément plate, localement symétrique ou localement isométrique au produit d'une surface par un espace à courbure constante.

Remarque 1.5.- Dans [4] W.Grycak a montré que toute variété pseudo-riemannienne analytique, non conformément plate, de dimension supérieure à 4 qui satisfait

$$(12) \qquad \nabla_\alpha \nabla_\beta \, W_{\alpha\rho\nu\tau} = \nabla_\beta \nabla_\alpha \, W_{\gamma\rho\nu\tau}$$

doit aussi satisfaire $\nabla_\alpha \nabla_\beta \, R_{\gamma\rho\nu\tau} = \nabla_\beta \nabla_\alpha \, R_{\gamma\rho\nu\tau}$. Le lemme 1.1 montre que ce théorème est faux en dimension 4.

Si l'on utilise les notations $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et

$$D_\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{pour } \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n .$$

Lemme 1.6.- *A une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on associe* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *par l'égalité* $F(x) = f(|x|)$ *où* $|\ |$ *est la norme euclidienne.*

(i) *Si* f *est de classe* C^k, k *entier positif et* $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(k)}(0) = 0$, *alors* F *est de classe* C^k *et* $D_\alpha F(0) = 0$ *si* $1 \le |\alpha| \le k$.

(ii) *Si* f *est analytique et paire*, F *est analytique*.

Démonstration.- On remarquera que $D_\beta F(x)$ est combinaison linéaire à coefficients constants de termes de la forme

$$(13) \qquad \frac{f^{(s)}(|x|)}{|x|^t} \, \frac{x_{\alpha_1}}{|x|} \cdots \frac{x_{\alpha_N}}{|x|}$$

où $|\beta| = m$, $s > 0$, $N,t \ge 0$ et $s+t \le m$, et que $f^{(s)}(|x|) = O(|x|^{k-s})$.∎

Nous allons maintenant étudier des fonctions qui seront les courbures scalaires de nos métriques de Kälher autoduales. Nous nous intéresserons à la restriction de ces fonctions sur des droites réelles passant par l'origine.

Lemme 1.7.-*Soient* p *et* q *des nombres réels tels que* $q^2 < p$, *alors il existe une fonction analytique unique* $K : \mathbb{R} \to [q, \sqrt{p}]$ *qui possède les propriétés suivantes*

(14) $\quad (p-q^2)\ tK'(t) = 2(q-K(t))(K(t)^2-p) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ , \quad K(0) = q \quad ,$

(15) $\quad \lim\limits_{|t|\to\infty} K(t) = \sqrt{p} \quad , \quad K'(0) = 0 \quad , \quad K'(t) \neq 0$ pour $t \neq 0 \quad ,$

$$K(t) = K(-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(16) $\quad K(t) = q + t^2 + O(t^4)$ lorsque $t \to 0$.

<u>Démonstration.</u>- Si l'on définit $F = K - q : \mathbb{R} \to [0, \sqrt{p} - q]$ (14) et (15) sont équivalentes à

(17) $\quad (q^2 - p)\ tF'(t) = 2F(t)(F(t) + q + \sqrt{p})(F(t) + q - \sqrt{p})$

avec $F(0) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{|t|\to\infty} F(t) = \sqrt{p} - q \quad , F'(t) \neq 0$ pour $t \neq 0$, $F'(0) = 0$ et $F(-t) = F(t)$.

La restriction F_+ de F sur $]0, +\infty)$ est un difféomorphisme analytique et l'on désigne par H l'application réciporque définie sur $]0, \sqrt{p} - q[$. L'égalité (17) devient

(18) $\quad (q^2 - p)H(s) = 2H'(s)s(s + q + \sqrt{p})(s + q - \sqrt{p}) \quad 0 < s < \sqrt{p} - q$.

On en déduit que H est unique à une constante positive multiplicative près.

Une solution est de la forme $H(s) = s^{1/2}(1 + O(s))$ lorsque $s \to 0$ et $H'(s) = \frac{1}{2} s^{-1/2}(1 + O(s))$, donc la fonction F doit satisfaire $F'(t) = 2(\mathrm{sign}\ t)s^{1/2}(1 + O(s))$, $t \neq 0$ où $s = F(t) = F(-t)$. Donc $\lim\limits_{t\to 0} F'(t) = 0$ et $F''(t) = \frac{dF'}{ds} F'(t) = 2(1 + O(F(t)))$, la fonction $F(t)$ est analytique d'après le théorème de Cauchy-Kovalevski. De plus $F''(0) = 2$ donc $K = F + q$ vérifie (14)-(16). ∎

<u>Lemme 1.8.</u>- <u>Soit</u> $L : \mathbb{R} \to [q, \sqrt{p}]$ <u>définie par</u> $L(t) = K(\frac{1}{t})$ <u>pour</u> $t \neq 0$ <u>et</u> $L(0) = \sqrt{p}$. <u>Alors</u> L <u>est de classe</u> C^2 <u>sur</u> $\mathbb{R}$, <u>analytique sur</u> $\mathbb{R} - \{0\}$ <u>et</u> $L'(0) = L''(0) = 0$.

(i) <u>Si</u> $k < \frac{4\sqrt{p}}{q + \sqrt{p}} < k < 1$ <u>pour un entier</u> k <u>ou si</u> $\frac{4\sqrt{p}}{q + \sqrt{p}} = k + 1$ <u>est un entier impair</u>, <u>alors</u> L <u>est de classe</u> C^k $L'(0) = L''(0) = \ldots = L^{(k)}(0) = 0$ <u>mais</u> $\lim\limits_{t\to 0} L^{(k+1)}(t)$ n'existe pas.

(ii) Si $\frac{4\sqrt{p}}{q+\sqrt{p}} = k+1$ est un entier pair, alors L est analytique dans $\mathbb{R}$ et $L'(0) = L''(0) = \ldots = L^{(k)}(0) = 0$.

Démonstration.- On utilise la même technique que pour le lemme 1.7. Soit $G = \sqrt{p} - L$. La fonction $F = G_+^{-1} :]0, \sqrt{p} - q[\to]0, +\infty)$ satisfait

$$(19) \qquad (p - q^2)T(s) = 2T'(s)s(s+q-\sqrt{p})(s-2\sqrt{p})$$

on déduit que $T(s) = C\, s^A(1 + O(s))$ où $A = \frac{\sqrt{p}+q}{4\sqrt{p}}$ lorsque $s \to 0$ où $C > 0$.

POur $t \neq 0$ $G'(t) = \frac{\text{sign } t}{CA} s^{1-A}(1 + O(s))$ où $s = G(t)$ pour $m \geq 1$ et $1 - mA \geq 0$

$$(20) \qquad G^{(m)}(t) = (\text{sign } t)^m B_m s^{1-mA}(1 + O(s))$$

où B_m est une constante non nulle.

Les hypothèses (i) et (ii) sont $1 - kA > 0 > 1 - (k+1)A$ où $k+1$ impair $1 - (k+1)A = 0$ pour (i) et $1 - mA = 0$ pour un m pair, alors $G^{(m)}(t) = B_m(1 + O(G(t)))$ qui montre que G, donc L, est analytique, soit (ii). ∎

Généralisation du lemme 1.8

Lemme 1.9.- Soient p et q des nombres réels tels que $q^2 < p$. On fixe un entier positif n et une fonction K définie au lemme 1.8, alors

(i) la fonction $u = u_{p,q,n} : \mathbb{CP}^n \to [q, \sqrt{p}]$ définie par $u(z) = K(|z|)$ pour $z \in \mathbb{C}^n$ et $u = \sqrt{p}$ sur l'hyperplan à l'infini est de classe C^2 et sa restriction à $\mathbb{C}^n$ est analytique réelle.

$$(21) \qquad u(z) = q + z^2 + O(|z^4|) \quad \text{si } z \to 0$$

(ii) si $k < \frac{4\sqrt{p}}{q+\sqrt{p}} < k+1$ pour un entier k ou si $\frac{4\sqrt{p}}{q+\sqrt{p}} = k+1$ est un entier impair, alors u est de classe C^k dans $\mathbb{CP}^n$.

(iii) si $\frac{4\sqrt{p}}{q+\sqrt{p}}$ est un entier pair u est analytique dans $\mathbb{CP}^n$,

(iv) <u>le champ de vecteurs</u> e_1 <u>sur</u> $\mathbb{C}^n$ <u>défini par</u> $e_1(z) = (p-q^2)z$ <u>satisfait la relation</u> $D_{e_1} u = 2(q-u)(u^2-p)$.

<u>Démonstration</u>.- D'après (ii) de 1.6 u est analytique réelle sur $\mathbb{C}^n$, (21) et (iv) résultent de (16) et (14). D'après les lemmes 1.6, 1.7 et 1.8 sous les hypothèses (ii) (respectivement (iii)) la fonction $\phi_{n,N}(z,\xi) = K(|z|/|\xi|) = L(|\xi|/|z|)$ est de classe C^k (respectivement analytique) dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N - \{(0,0)\}$. Comme $\frac{4\sqrt{p}}{q+\sqrt{p}} > 2$, si $q^2 < p$, (ii) implique que u est toujours de classe C^2. ∎

§ 2.- <u>CONSTRUCTION DE METRIQUES DE KALHER AUTODUALES SUR</u> $\mathbb{C}^2$

On fixe p et q des nombres réels satisfaisant $q^2 < p$ et on définit $u = u_{p,q,2} : \mathbb{CP}^2 \to [q,\sqrt{p}]$ comme au lemme 1.9.

Sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ les champs de vecteurs $e_1(z) = (p-q^2)z$, $e_2(z) = (p-q^2)^{1/2}z^*$, $e_3(z) = ie_1(z)$, $e_4(z) = ie_2(z)$, où $z = z_1,z_2)$ et $z^* = (-\bar{z}_2,\bar{z}_1)$, sont linéairement indépendants.

<u>Théorème 2.1</u>.- <u>Pour</u> $q^2 < p$, $\varepsilon = -1$ <u>donnés, il existe sur</u> $\mathbb{C}^2$ <u>une métrique autoduale kälhérienne</u> $\bar{g}^{p,q}$.

<u>Démonstration</u>.- Sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ les champs de vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4 ainsi que la fonction u vérifient les conditions (1) à (4) du lemme 1, J étant la structure standard de $\mathbb{C}^2$. Donc la métrique riemannienne analytique $g = g^{p,q}$ définie par (5) sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ doit être autoduale et de Kälher pour la structure complexe et l'orientation naturelle.

En coordonnées locales $z = (z_1,z_2) = (x_1+ix_2, x_3+ix_4)$. On a pour $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$

$$g(\partial/\partial x_\alpha, \partial/\partial x_\beta) = \frac{48(q-u)}{(p-q^2)^2 z^4} G_{\alpha\beta} \quad , \text{où}$$

$$G_{11} = G_{22} = (u^2-p)|z_1|^2 + (q^2-p)|z_2|^2 \quad ,$$

$$G_{12} = G_{34} = 0 \ , \ G_{13} = G_{24} = (u^2-q^2)\mathrm{Re}\ z_1\bar{z}_2 \ , \ G_{14} = -G_{23} = (u^2-q^2)\mathrm{Im}\ \bar{z}_1 z_2,$$

$$G_{33} = G_{44} = (q^2 - p)\ z_1{}^2 + (u^2 - p)\ z_2{}^2 \quad .$$

En utilisant (21) on voit que g s'étend analytiquement à $\mathbb{C}^2$, la valeur limite à l'origine de $g_{\alpha\beta}$ étant $48\ \delta_{\alpha\beta}/(p-q^2)$ ∎

<u>Proposition 2.2.- La métrique</u> $g^{p,q}$ <u>s'étend en une pseudo-métrique de</u> $\mathbb{CP}^2$ <u>de rang</u> 2.

<u>Démonstration</u>.- On considère le changement de coordonnées projectives $(\tilde z_1, \tilde z_2) = (z_1/z_2, 1/z_2)$ et $(\tilde{\tilde z}_1, \tilde{\tilde z}_2) = (z_2/z_1, 1/z_1)$. On vérifie que

$$g(\partial/\partial\tilde x_1, \partial/\partial\tilde x_1) = \frac{48(q-u)}{(p-q^2)^2(1+|\tilde z_1|^2)^2}\ ((u^2-p)|\tilde z_1|^2 + q^2 - p), \tag{22}$$

$$g(\partial/\partial\tilde x_3, \partial/\partial\tilde x_3) = \frac{48(q-u)(u+\sqrt{p})}{(p-q^2)^2}\ \frac{u-\sqrt{p}}{|\tilde z_2|^2}$$

où $\tilde z_1 = \tilde x_1 + i\,\tilde x_2 \quad , \quad \tilde z_2 = \tilde x_3 + i\,\tilde x_4$.

Des formules analogues sont obtenues pour la carte $(\tilde{\tilde z}_1, \tilde{\tilde z}_2)$.

Les lemmes 1.9 et 1.8 montrent que si L est de classe C^k alors la fonction $(u-\sqrt{p})/|\tilde z_2|^2$ est de classe C^{k-2} à l'infini (i.e. lorsque $\tilde z_2 = 0$) et $(u-\sqrt{p})/|z_2|^2 \to 0$ lorsque $\tilde z_2 \to 0$, en effet $(u-\sqrt{p})/|\tilde z_2|^2 = |\tilde z_2|^{-2}\,[L(|\tilde z_2|/(1+|\tilde z_1|^2)^{1/2} - \sqrt{p}]$. L'extension de $g^{p,q}$ à $\mathbb{CP}^2$ est de classe C^{k-2} où $k \geq 2$ est l'ordre de différentiabilité de $u = u_{p,q,2}$, en particulier si $4\sqrt{p}/(q+\sqrt{p})$ est un entier pair l'extension est analytique d'après le lemme 1.9. Par ailleurs, à l'infini $g^{p,q}$ étant semi définie et hermitienne, elle doit être de rang 2. ∎

<u>Remarque 2.3</u>.- Les métriques construites représentent une infinité non dénombrable de structures conformes qui ne sont pas localement équivalentes d'après (vi) et (ix).

Les $g^{p,q}$ ne sont pas localement conformes à une métrique riemannienne localement symétrique d'après (viii).

§ 3.- METRIQUES D'EINSTEIN HERMITIENNES AUTODUALES SUR $\mathbb{C}^2$

Théorème 3.1.- Etant donné $q^2 < p$ et $q > 0$, il existe sur C^2 une métrique $h^{p,q}$ hermitienne d'Einstein et autoduale.

Démonstration.- La métrique $g^{p,q}$ construite au § 2 a une courbure scalaire positive u pour $q > 0$, en effet $u = u_{p,q,2} : C^2 \to [q, p]$. D'après (viii) du lemme 1.1 $h^{p,q} = u^{-2} g^{p,q}$ définit la métrique cherchée.

Remarque 3.2.- Comme la métrique $g^{p,q}$, la métrique $h^{p,q}$ s'étend en une pseudo-métrique de $C\mathbb{P}^2$ qui devient continue ou de classe C^1 d'après le lemme 1.9, car $2 < \frac{4\,p}{q+\,p} < 4$.

Remarque 3.3.- Les métriques $h^{p,q}$ contiennent une famille à un paramètre de métriques d'Einstein à courbure sectionnelle positive non conformément équivalentes.

Remarque 3.4.- Les genres de métriques $h^{p,q}$ n'ont pas d'extension en une métrique complète. En effet, d'après un résultat récent de J. Kazdan, les métriques d'Einstein sont analytiques pour un certain atlas, donc l'extension du genre de $h^{p,q}$ à une variété orientable d'Einstein compacte devrait être autoduale. Ceci est impossible car N. Hitchin [5] a montré qu'une variété d'Einstein de dimension 4 autoduale à courbure scalaire positive doit être localement symétrique (et difféomorphe à S^4 ou $C\mathbb{P}^2$) . Ce qui n'est pas le cas des $h^{p,q}$ d'après (viii) du lemme 1.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. ADATI et T. MIYAZAWA : On a Riemannian space with recurrent conformal curvature, Tensor, N.S. 18 (1967), 348-354.

[2] M.F. ATIYAH, N.J. HITCHIN et I.M. SINGER : Self-duality in four dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London, A 362 (1978), 425-461.

[3] A. DERDZINSKI : Self-dual Kälher manifolds and Einstein manifolds of dimension four, to appear.

[4] W. GRYCAK : Riemannian manifolds with a symmetry condition imposed on the 2nd derivative of the conformal curvature tensor, to appear.

[5] N. HITCHIN : Kälherian twistor spaces, preprint.