Wiad. Mat. 48 (1) 2012, 1–32

Andrzej Derdziński (Columbus, Ohio)

Solitony Ricciego*

1. Potok Ricciego

W 1981 roku Richard Hamilton [20] zapoczątkował badanie równania

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}\,. \tag{1}$$

Równanie (1) – którego rodzinę rozwiązań nazywa się zwykle *potokiem Ricciego* – jest warunkiem nałożonym na niewiadomą krzywą gładką $t \mapsto g(t)$, złożoną z metryk Riemanna na ustalonej rozmaitości M. Warunek ten polega na żądaniu, by krzywa ta miała, w każdym t z przedziału, na którym jest określona, pochodną względem t równą tensorowi Ricciego metryki $g(t)$ pomnożonemu przez -2.

Rozwiązania (trajektorie) potoku Ricciego to krzywe $t \mapsto g(t)$ wychodzące z zadanej metryki początkowej $g(0)$ i określone na maksymalnym przedziale $[0, T)$ zmiennej t, przy czym $0 < T \leqslant \infty$.

We współrzędnych lokalnych x^j, $j = 1, \ldots, \dim M$, formuła (1) stanowi układ nieliniowych równań cząstkowych typu parabolicznego, nałożony na składowe $g_{jk} = g(e_j, e_k)$ metryk $g = g(t)$ tworzących naszą niewiadomą krzywą. Symbolem e_j oznaczamy tu j-te współrzędnościowe pole wektorowe (tak więc pochodna kierunkowa w kierunku e_j jest dokładnie tym samym, co pochodna cząstkowa ∂_j względem j-tej współrzędnej). Funkcje g_{jk} zależą od t i od zmiennych x^j. Współrzędnościowa postać warunku (1) jest dość zawiła:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial t} = -2R_{jk}, \quad \text{gdzie } R_{jk} = \partial_p \Gamma^p_{jk} - \partial_j \Gamma^p_{pk} + \Gamma^p_{qp}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^p_{jq}\Gamma^q_{pk},$$

* Rozszerzona wersja odczytu plenarnego na IV Forum Matematyków Polskich, Olsztyn, 1–3 lipca 2010 roku.

zaś Γ_{jk}^{p} są symbolami Christoffela metryki $g = g(t)$, danymi wzorem $2\Gamma_{jk}^{p} = g^{pq}(\partial_j g_{kq} + \partial_k g_{jq} - \partial_q g_{jk})$, w którym g^{jk} są składowymi kontrawariantnymi metryki, tzn. w każdym punkcie dziedziny układu współrzędnych macierz $[g^{jk}]$ jest odwrotnością macierzy $[g_{jk}]$. W wyrażeniach na R_{jk} i $2\Gamma_{jk}^{p}$ użyta jest konwencja Einsteina – powtórzone wskaźniki są wskaźnikami sumowania.

2. Rola potoku Ricciego w dowodzie hipotezy Poincarégo

Hamilton, który w pracy [20] udowodnił istnienie i jedyność maksymalnej trajektorii potoku Ricciego dla dowolnej metryki początkowej $g(0)$ na każdej rozmaitości zwartej, próbował użyć tego faktu do udowodnienia trójwymiarowej hipotezy Poincarégo.

Zaproponowany przez niego zarys takiego dowodu (znany jako „program Hamiltona") składał się z pewnej całkiem konkretnej serii kroków. Przeprowadzić te kroki do samego końca zdołał dopiero w roku 2002 Grigorij Perelman (patrz [29–31]).

Perelman udowodnił też przy okazji znacznie ogólniejszą *hipotezę Thurstona* o geometryzacji rozmaitości trójwymiarowych.

Kluczową częścią argumentu Perelmana były chirurgie, które trzeba wykonać, gdy potok Ricciego napotyka osobliwość w skończonym czasie ($T < \infty$). Po chirurgii potok Ricciego użyty jest ponownie, w nieco uproszczonej sytuacji topologicznej.

3. Solitony Ricciego – „punkty stałe" potoku Ricciego

Soliton Ricciego to metryka Riemanna $g = g(0)$ na rozmaitości M, którą potok Ricciego deformuje w sposób *nieistotny*, tzn. tak, że wszystkie stadia $g(t)$ są metrykami identycznymi z $g(0)$ z dokładnością do dyfeomorfizmów i mnożeń przez stałe dodatnie („przeskalowań"). Inaczej mówiąc, metryka taka odpowiada punktowi stałemu potoku Ricciego w ilorazie przestrzeni metryk na M przez odpowiednio zdefiniowaną relację równoważności.

Powyższa definicja ma oczywisty sens na rozmaitościach zwartych, ze względu na istnienie i jedyność maksymalnej trajektorii potoku Ricciego z dowolną zadaną metryką wyjściową. Bez założenia zwartości, przez soliton Ricciego rozumie się metrykę Riemanna g na rozmaitości M, dla której równanie (1) ma rozwiązanie spełniające warunek początkowy $g(0) = g$ i deformujące metrykę w sposób nieistotny.

W § 5 pojawi się inna, równoważna charakteryzacja solitonów Ricciego – poprzez równanie różniczkowe.

4. Granice typu homotetii

Zupełne niezwarte solitony Ricciego pojawiają się bardzo często jako produkty uboczne potoku Ricciego na rozmaitościach zwartych – „granice typu homotetii" (*blow-up limits*, *rescaling limits*) metryk $g(t)$ obciętych do odpowiedniego zbioru otwartego, gdy zmienna $t \in [0, T)$ dąży do T (zdefiniowanego w § 1), zaś samo T ma wartość skończoną.

Następujący wynik Perelmana z pracy [29] (znany jako *no-breathers theorem*) stwierdza, że na rozmaitościach zwartych solitony Ricciego mogą być równoważnie scharakteryzowane przez warunek pozornie dużo słabszy niż ich normalna definicja.

Twierdzenie 4.1. *Jeśli w trajektorii $t \mapsto g(t)$ potoku Ricciego na rozmaitości zwartej istnieją choćby dwie takie różne wartości czasu t, że odpowiadające im stadia są ze sobą identyczne* modulo *dyfeomorfizm i przeskalowanie, to trajektoria ta jest solitonem Ricciego.*

W wymiarze 3 twierdzenie to udowodnił Thomas Ivey [22].

5. Równanie solitonowe

Nietrudno sprawdzić, że metryka g na rozmaitości M jest solitonem Ricciego wtedy i tylko wtedy, gdy dla jakiegoś pola wektorowego w na M zachodzi *równanie solitonowe*

$$\pounds_w g + \mathrm{Ric} = \lambda g, \quad \text{gdzie } \lambda \text{ jest stałą}, \tag{2}$$

przy czym Ric oznacza tu tensor Ricciego metryki g, zaś $\pounds_w g$ – jej pochodną Liego w kierunku pola w.

Terminu *soliton Ricciego* używa się też mówiąc bądź o rozmaitości Riemanna (M, g) spełniającej (wraz z jakimś w) warunek (2), bądź o trajektorii $t \mapsto g(t)$ potoku Ricciego, której wyjściowe stadium $g(0)$ – lub, równoważnie, każde stadium $g(t)$ – ma własność (2). Pole w może tu zależeć od t.

Obiekty w i λ występujące w (2) będziemy nazywać *polem solitonowym* i *stałą solitonową*.

Współrzędnościowa wersja warunku (2) ma postać

$$w_{j,k} + w_{k,j} + R_{jk} = \lambda g_{jk}.$$

Zamiast $w_{j,k}$ pisze się też $\nabla_k w_j$. Aby wyrazić ten warunek wprost poprzez składowe g_{jk} metryki g i składowe w^j pola w, wystarczy zastąpić R_{jk} przez wzór z § 1, zaś sumę $w_{j,k} + w_{k,j}$ przez $\partial_k w_j + \partial_j w_k - 2\Gamma^p_{jk} w_p$, dla w_j zadanych równością $w_j = g_{jk} w^k$.

6. Kierunki dalszej dyskusji

Solitony Ricciego, choćby ze względu na ich bliski związek z potokiem Ricciego (§§ 3–4), wydają się warte dokładnego zbadania. Ich charakteryzacja jako metryk Riemanna spełniających pewne równanie różniczkowe (§ 5) sugeruje badanie ich metodami analizy geometrycznej, używanymi już wcześniej w podobnych sytuacjach.

Pozostała część tekstu zajmuje się kilkoma wybranymi przypadkami, w których takie podejście prowadzi do lepszego zrozumienia solitonów Ricciego na rozmaitościach *zwartych*. Przykładami ich są metryki Einsteina (§ 7) i solitony Kählera–Ricciego (§ 8), oraz pewne iloczyny kartezjańskie (§ 9). W odróżnieniu od najniższych wymiarów, $n = 2$ i $n = 3$, w których zwarte solitony Ricciego są od dawna sklasyfikowane (§ 7), przypadek $n \geqslant 4$ to w znacznym stopniu *terra incognita*. Ilustracją tego faktu jest problem otwarty opisany w § 9.

§§ 11–15 poświęcone są sformułowaniu i dowodowi pewnego wyniku Perelmana, który – mimo dość ezoterycznej natury – stanowi istotny krok w kierunku lepszego poznania struktury zwartych solitonów Ricciego. W § 16 omówione są z kolei twierdzenia, udowodnione w latach 1957–2004 przez ośmiu różnych matematyków, które łącznie pokazują, że solitony Kählera–Ricciego tworzą naturalną klasę *metryk kanonicznych* na zwartych powierzchniach zespolonych o dodatniej bądź ujemnej pierwszej klasie Cherna.

Końcowa część artykułu (§§ 17–26) przedstawia dwie klasy przykładów solitonów Ricciego na rozmaitościach zwartych. Są to metryki einsteinowskie Page'a i Bérard Bergery'ego (patrz [4, 28]) oraz metryki kählerowskie Koiso–Cao (patrz [8, 24]). Ich opis jest dość techniczny i prześledzenie go wymaga „zakasania rękawów” – w odróżnieniu na przykład od przypadku jednorodnych rozmaitości Einsteina o nieprzywiedlnie działającej grupie izotropii, które można omówić całkiem zwięźle (§ 7). Konstrukcja w §§ 17–26 używa zmian konforemnych metryk Kählera, tzn. mnożenia ich przez odpowiednio dobrane funkcje dodatnie. Wprowadzone tam warunki dostateczne na to, by po takiej zmianie powstawał soliton Ricciego, stanowią układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu z warunkami brzegowymi. Znane rozwiązania tworzą trzy rodziny, z których pierwsze dwie (§§ 23, 25) odpowiadają dwóm wspomnianym wyżej klasom przykładów, zaś trzecia nie daje nic nowego – otrzymane z niej solitony Ricciego są izometryczne z metrykami Koiso–Cao, co wykazał Gideon Maschler w pracy [27]; dowód wyniku Maschlera przedstawimy w § 26.

7. Metryki Einsteina

Najbardziej oczywistą klasę solitonów Ricciego na rozmaitościach zwartych stanowią *metryki Einsteina*. Są to metryki Riemanna g spełniające (2) z $w = 0$, czyli tzw. *warunek einsteinowski*

$$\mathrm{Ric} = \lambda g \quad \text{dla jakiejś stałej } \lambda. \tag{3}$$

Stałą solitonową λ nazywa się w tym przypadku *stałą Einsteina*.

W wymiarach $n < 4$, każdy zwarty soliton Ricciego jest einsteinowski; udowodnił to dla $n = 2$ Hamilton (patrz [21]), a dla $n = 3$ Ivey (patrz [22]). Z czysto algebraicznych powodów, dla $n < 4$ z równania (3) wynika, że metryka g ma stałą krzywiznę sekcyjną. Lokalnie, z dokładnością do izometrii i przeskalowań, omawiane rozmaitości niskowymiarowe są więc standardowymi sferami, przestrzeniami euklidesowymi, bądź przestrzeniami hiperbolicznymi.

Przez *rozmaitość Einsteina* rozumie się rozmaitość Riemanna (M, g), której metryka g jest einsteinowska.

Einsteinowskość wspomnianych wyżej metryk o stałej krzywiźnie sekcyjnej (sferycznych, euklidesowych, hiperbolicznych) wynika z przyczyn dużo ogólniejszej natury. Mianowicie, *każda jednorodna rozmaitość Riemanna (M, g) o nieprzywiedlnie działającej grupie izotropii jest rozmaitością Einsteina*. Założenie o jednorodności oznacza, że grupa izometrii metryki g działa na M tranzytywnie, zaś *nieprzywiedlność* odnosi się tu do grupy H_x tych izometrii, które zachowują ustalony punkt $x \in M$, działającej infinitezymalnie w przestrzeni stycznej T_xM. Einsteinowskość jest tu trywialną konsekwencją lematu Schura i faktu, że tensor Ricciego – jako naturalny niezmiennik metryki – jest zachowywany przez wszystkie izometrie.

Poza metrykami sferycznymi, euklidesowymi i hiperbolicznymi, powyższe twierdzenie stosuje się też np. do metryk kanonicznych (Fubiniego–Study'ego) na zespolonych przestrzeniach rzutowych $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$, pokazując, że są one metrykami Einsteina.

8. Solitony Kählera–Ricciego

Pierwsze przykłady nieeinsteinowskich zwartych solitonów Ricciego, reprezentujących wszystkie parzyste wymiary $n \geqslant 4$, skonstruowali na początku lat dziewięćdziesiątych XX wieku Norihito Koiso w artykule [24] i (niezależnie) Huai-Dong Cao w pracy [8]. Wszystkie ich przykłady, jak również uogólnienia tych przykładów, znalezione przez innych autorów (patrz [11, 16, 25]), są *solitonami Kählera–Ricciego*, tzn. – jednocześnie – solitonami Ricciego i metrykami Kählera.

Przypadek szczególny solitonów Kählera–Ricciego stanowią *metryki Kählera–Einsteina*, tj. metryki Kählera, które są także einsteinowskie.

Przypomnijmy, że jedna z możliwych (wzajemnie równoważnych) definicji metryki Kählera brzmi następująco. Jest to metryka g na rozmaitości M taka, że pewien automorfizm liniowy J wiązki stycznej TM (tzn. pewna gładka rodzina $x \mapsto J_x$ automorfizmów liniowych $J_x\colon T_xM \to T_xM$) spełnia warunki $J(Jv) = -v$, $g(Jv, Jw) = g(v, w)$ i $\nabla_v(Jw) = J(\nabla_v w)$ dla dowolnych gładkich pól wektorowych v i w, przy czym ∇ oznacza koneksję Leviego-Civity metryki g.

Przez *metrykę Kählera na rozmaitości zespolonej* M rozumiemy z kolei metrykę Kählera w powyższym sensie na M (traktowanej jako rozmaitość rzeczywista), dla której automorfizmem $J\colon TM \to TM$ o żądanych własnościach jest operator mnożenia przez i w przestrzeniach stycznych (stanowiących w naturalny sposób przestrzenie zespolone).

Szczegóły konstrukcji Koiso–Cao będą omówione w § 25. Na razie warto tylko wspomnieć, że przykłady Koiso–Cao są metrykami Kählera na zwartych rozmaitościach zespolonych M_k^m, które, dla liczb całkowitych m, k spełniających warunek $m > k > 0$, zdefiniowane są następująco:

> M_k^m to przestrzeń totalna wiązki holomorficznej o włóknie $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$
> nad przestrzenią rzutową $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1}$, otrzymanej jako uzwarcenie (∗)
> rzutowe k-tej potęgi tensorowej tautologicznej wiązki prostych.

Zauważmy, że m jest tu wymiarem zespolonym rozmaitości M_k^m. Rozmaitość M_1^m można też otrzymać przez rozdmuchanie punktu w $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$.

Na tych samych rozmaitościach zespolonych M_k^m istnieją również inne, nie mniej interesujące solitony Ricciego – konforemnie kählerowskie (choć nie kählerowskie) metryki Einsteina. Skonstruowali je Don N. Page w [28] dla $m = 2$ i Lionel Bérard Bergery w [4] w wymiarach $m \geqslant 3$.

Metrykę Riemanna g na rozmaitości M nazywa się *konforemnie kählerowską*, jeśli dla pewnej funkcji dodatniej $\mu\colon M \to \mathbb{R}$ iloczyn μg jest metryką Kählera.

Przykłady Page'a i Bérard Bergery'ego są opisane dalej, w § 23.

Dla wymiarów zespolonych $m \geqslant 3$ konstrukcje Koiso–Cao i Bérard Bergery'ego można identyczną metodą przeprowadzić – jak już wskazali sami ich autorzy w [4, 8, 24] – w nieco szerszej klasie rozmaitości niż opisana wyżej rodzina M_k^m. Powód zawężenia naszej dyskusji do rozmaitości M_k^m jest czysto pragmatyczny – definicja wspomnianej tu szerszej klasy jest dość zawiła. Definicja ta zostanie jednak wprowadzona w dowodzie lematu 17.1, który stanowi wstępny krok naszego opisu omawianych przykładów. Opis ten będzie się więc stosował nie tylko do rodziny M_k^m, ale też do jej powyższego uogólnienia.

9. Problem otwarty

Riemannowski iloczyn kartezjański dwóch solitonów Ricciego o tej samej stałej solitonowej λ jest znowu solitonem Ricciego. Używając tego faktu, przykładów Koiso–Cao (§ 8), oraz metryk Einsteina (§ 7), konstruuje się bez trudu zwarte solitony Ricciego, które nie są ani einsteinowskie ani kählerowskie, i reprezentują wszystkie wymiary $n \geqslant 7$.

Gang Tian (patrz [34]) w różnych odczytach, oraz Huai-Dong Cao, w pracy [9], zadali następujące pytanie.

Pytanie. Czy istnieje zwarty soliton Ricciego, który nie jest ani einsteinowski, ani lokalnie kählerowski, i nie jest lokalnie rozkładalny w iloczyn kartezjański rozmaitości Riemanna niższych wymiarów?

Jeśli taki przykład istnieje, musi on mieć dodatnią stałą solitonową, skończoną grupę podstawową, zaś krzywiznę skalarną (§ 10) niestałą, a także dodatnią. Jest tak dlatego, że zwarte solitony Ricciego nie spełniające któregoś z wymienionych warunków są automatycznie einsteinowskie. Te cztery fakty udowodnili, w wymienionej kolejności: Jean-Pierre Bourguignon w [6], jeszcze w roku 1974; Xue-Mei Li w [26] w roku 1993 (oraz, niezależnie, Manuel Fernández-López i Eduardo García-Río w [17] w roku 2004, jak również Zhenlei Zhang w [38] w roku 2007); Daniel H. Friedan w [18] w roku 1985; i Ivey w [22] w roku 1993. Wyniki Hamiltona i Ivey'ego z prac [21] i [22] wspomniane w § 7 pokazują też, że przykład taki miałby wymiar $n \geqslant 4$.

10. Trochę oznaczeń i tożsamości

Aby uprościć dalsze rozważania, wprowadźmy kilka symboli. Dla ustalonej rozmaitości Riemanna (M, g) niech $\mathcal{F}M$, $\mathcal{X}M$, ΩM i SM oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji gładkich $M \to \mathbb{R}$, pól wektorowych gładkich na M, gładkich 1-form na M (tzn. przekrojów wiązki kostycznej) i, odpowiednio, gładkich symetrycznych pól 2-tensorowych na M. Przykładami tych ostatnich są metryka g, tensor Ricciego Ric i hesjan ∇df dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}M$, tzn. pochodna kowariantna różniczki df. Poza gradientem $\nabla\colon \mathcal{F}M \to \mathcal{X}M$ i różniczką $d\colon \mathcal{F}M \to \Omega M$, do interesujących operatorów liniowych między parami tych przestrzeni należą też *g-ślad* $\mathrm{tr}_g\colon SM \to \mathcal{F}M$, jak również *$g$-dywergencja* $\delta\colon SM \to \Omega M$, *mnożenie wewnętrzne* $\imath_v\colon SM \to \Omega M$

przez dowolne $v \in \mathcal{X}M$, oraz *g-laplasjan* $\Delta\colon \mathcal{F}M \to \mathcal{F}M$, scharakteryzowane przez równości $\mathrm{tr}_g\, b = \mathrm{tr}\, B$, gdy $b \in \mathcal{S}M$ i B jest endomorfizmem liniowym wiązki stycznej TM takim, że

$$g(Bv, w) = b(v, w) \quad \text{dla } v, w \in \mathcal{X}M, \tag{4}$$

oraz $(\delta b)_j = g^{pq}\nabla_p b_{pj}$, $\imath_v b = b(v, \cdot)$ i $\Delta f = \mathrm{tr}_g \nabla \mathrm{d}f$.

Część g-bezśladowa symetrycznego pola 2-tensorowego $b \in \mathcal{S}M$ to z definicji pole tensorowe $\{b\}_0 \in \mathcal{S}M$, dane wzorem

$$\{b\}_0 = b - (\mathrm{tr}_g\, b)g/n, \quad \text{gdzie } n = \dim M. \tag{5}$$

Funkcję $\mathrm{s} = \mathrm{tr}_g\,\mathrm{Ric}$ nazywa się *krzywizną skalarną* metryki g. Zachodzą dobrze znane tożsamości (patrz na przykład [12, wzory (2.4) i (2.9)])

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 2\delta\,\mathrm{Ric} = \mathrm{ds}, \\ &\text{b)} \quad \delta b = \mathrm{d}Y + \imath_v \mathrm{Ric}, \\ &\text{c)} \quad 2\imath_v b = \mathrm{d}Q \end{aligned} \tag{6}$$

dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}M$, jej gradientu $v = \nabla f$, hesjanu $b = \nabla df$ i laplasjanu $Y = \Delta f$, oraz $Q = g(v, v)$. Będziemy też używać *nieliniowego* operatora różniczkowego $\mathcal{R}\colon \mathcal{F}M \to \mathcal{F}M$, zadanego, w dowolnej rozmaitości Riemanna (M, g), wzorem

$$\mathcal{R}f = \Delta f - |\nabla f|^2/2. \tag{7}$$

Mówimy, że symetryczne pole 2-tensorowe $b \in \mathcal{S}M$ na rozmaitości Kählera (M, g) jest *hermitowskie*, jeśli endomorfizm $B\colon TM \to TM$ o własności (4) jest $\mathbb{C}$-liniowy (komutuje z J). Jest to równoważne skośnej symetrii pola 2-tensorowego $b(J\cdot, \cdot)$. Dla każdego $x \in M$ operator $B_x\colon T_xM \to T_xM$ musi być wtedy diagonalizowalny i jego wartości własne mają parzyste krotności nad $\mathbb{R}$. W szczególności,

$$g \text{ i Ric są zawsze hermitowskie.} \tag{8}$$

Poniżej – i w dalszej części tekstu – symbole t i T będą użyte w sensie, który nie ma nic wspólnego z ich znaczeniem w §§ 1–5.

Dla funkcji $t, \chi\colon M \to \mathbb{R}$ na rozmaitości M, będziemy nazywać χ *funkcją gładką funkcji* t, jeśli t nie jest stała i $\chi = G \circ t$, gdzie G jest gładką funkcją na przedziale $\Lambda = t(M)$, tj. na zbiorze wartości t. Pisząc $(\cdot)^{\dot{}} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, będziemy tworzyć pierwsze i drugie pochodne $\dot\chi = \dot G \circ t$, $\ddot\chi = \ddot G \circ t$, traktując je jednocześnie jako funkcje $M \to \mathbb{R}$ i jako funkcje zmiennej $t \in \Lambda$. Przy ustalonej metryce Riemanna g na M, dla χ, σ, które są funkcjami gładkimi niestałej funkcji $t\colon M \to \mathbb{R}$, kładąc $\phi = e^t g(\nabla t, \nabla t)/2$, mamy oczywiste równości $\nabla\chi = \dot\chi\nabla t$ oraz

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad g(\nabla\sigma, \nabla\chi) = 2e^{-t}\dot\sigma\dot\chi\phi, \\ &\text{b)} \quad \mathrm{d}\chi = \dot\chi \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{9}$$

Ponadto $\nabla d\chi = \dot\chi\nabla dt + \ddot\chi dt\otimes dt$. Tak więc $\nabla de^t = e^t(\nabla dt + dt\otimes dt)$, skąd, dla $\tau = e^t$, dostajemy $\nabla dt = e^{-t}\nabla d\tau - dt\otimes dt$, oraz

$$\nabla d\chi = \dot\chi e^{-t}\nabla d\tau + (\ddot\chi - \dot\chi)dt\otimes dt. \tag{10}$$

11. Gradientowe solitony Ricciego

Mówimy, że dany soliton Ricciego (M, g) jest *gradientowy*, jeśli pole solitonowe w, spełniające (wraz z odpowiednią stałą λ) równość (2), można wybrać tak, by było gradientem pewnej funkcji. Rozmaitość Riemanna (M, g) jest gradientowym solitonem Ricciego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje *funkcji solitonowa* $f\colon M\to\mathbb{R}$ spełniająca *gradientowe równanie solitonowe*

$$\nabla df + \mathrm{Ric} = \lambda g, \quad \text{gdzie } \lambda \text{ jest stałą.} \tag{11}$$

Symbol ∇ jest tu koneksją Leviego-Civity metryki g (choć będziemy go też używać dla g-gradientu), a ∇df oznacza, jak w § 10, hesjan f.

To, że warunek (2) przyjmuje postać (11) gdy $2w = \nabla f$ (tzn. gdy $2w$ jest gradientem funkcji f) bierze się z tożsamości $\pounds_v g = 2\nabla df$, prawdziwej dla dowolnej funkcji f i jej gradientu $v = \nabla f$.

Gradientowe równanie solitonowe (11) ma następujące ciekawe konsekwencje, zauważone jeszcze przez Hamiltona (patrz też [10, p. 201]).

Lemat 11.1. *Z warunku* (11) *dla funkcji* f *na rozmaitości Riemanna* (M, g) *wynika stałość trzech funkcji*: $\Delta f + \mathrm{s}$, $\Delta f - g(\nabla f, \nabla f) + 2\lambda f$, *oraz* $\mathcal{R}f + \lambda f + \mathrm{s}/2$, *gdzie* s *jest krzywizną skalarną, a* $\mathcal{R}f = \Delta f - |\nabla f|^2/2$.

Dowód. Stosując do obu stron równości (11) operatory tr_g, $d\circ\mathrm{tr}_g - 2\delta + 2\imath_v$ oraz $\delta - \imath_v$, otrzymujemy nasze trzy konkluzje jako trywialne konsekwencje tożsamości (6). □

Stałość dwóch ostatnich funkcji w lemacie wynika z tożsamościowego znikania ich różniczek, gdyż rozmaitości są tu – z definicji – spójne.

Perelman [29] wykazał gradientowość zwartych solitonów Ricciego:

Twierdzenie 11.2. *Każdy zwarty soliton Ricciego jest gradientowy.*

Dowód tego twierdzenia (§ 15) opiera się na rozwiązalności pewnych quasiliniowych równań eliptycznych, którą udowodnił Oscar S. Rothaus w [33] w roku 1981. Wynik Rothausa można sformułować następująco.

Twierdzenie 11.3. *Dla zwartej rozmaitości Riemanna* (M, g) *wymiaru* $n \geqslant 3$, *operatora* $\mathcal{R}$ *zadanego wzorem* (7), *oraz dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej* λ, *odwzorowanie* $f \mapsto \mathcal{R}f + \lambda f$ *jest suriekcją w przestrzeni funkcji gładkich* $f\colon M\to\mathbb{R}$.

Dowód twierdzenia 11.3, którego zarys przedstawimy w § 14, używa faktu opisanego w § 12.

12. Logarytmiczna nierówność Sobolewa

Powyższy termin odnosi się do pewnego typu oszacowań, badanych od końca lat sześćdziesiątych XX wieku (patrz [15,19]). Wersję Rothausa z [33] można sformułować jako część (c) poniższego lematu, w którym, dla $p \in [1,\infty)$ i zwartej rozmaitości Riemanna (M,g) wymiaru n, przez $\|\cdot\|_p$ i $\|\cdot\|_{p,1}$ oznaczamy normę L^p i odpowiadającą jej pierwszą normę Sobolewa: $\|\varphi\|_{p,1}^p = \int_M [|\nabla\varphi|^p + \varphi^p]\,\mathrm{d}g$ dla $\varphi \in \mathcal{F}M$, gdzie $\mathcal{F}M$ jest przestrzenią wszystkich funkcji gładkich $M \to \mathbb{R}$, a $\mathrm{d}g$ – elementem objętości metryki g. Używamy ponadto symbolu L_1^pM dla przestrzeni Sobolewa, otrzymanej jako uzupełnienie $\mathcal{F}M$ z normą $\|\cdot\|_{p,1}$, i traktowanej w oczywisty sposób jako podprzestrzeń przestrzeni L^pM. Klasyczna *nierówność Sobolewa* i wynikająca z niej inkluzja stwierdzają, że

$$\|\varphi\|_r \leqslant C\|\varphi\|_{p,1} \text{ oraz } L_1^pM \subset L^rM, \text{ jeśli } 1 \leqslant r \leqslant np/(n-p) \tag{12}$$

dla $p \in (1,n)$ i $\varphi \in \mathcal{F}M$, ze stałą C zależną jedynie od (M,g), p i r.

Lemat 12.1. *Dla dowolnej zwartej rozmaitości Riemanna (M,g) wymiaru $n \geqslant 3$, stałej $\varepsilon \in \mathbb{R}$ i funkcji gładkiej $\chi\colon M \to \mathbb{R}$, połóżmy*

$$I_\varepsilon^\chi(\varphi) = \int_M \left(\varepsilon|\nabla\varphi|^2 - \varphi^2\log|\varphi| + \chi\varphi^2\right)\mathrm{d}g, \tag{13}$$

gdzie $\varphi\log|\varphi|$ z definicji równa się zeru na zbiorze zer funkcji φ. Wówczas funkcjonał $I_\varepsilon^\chi\colon L_1^2M \to \mathbb{R}$, zadany wzorem (13),

(a) *jest dobrze określony, gdyż $\varphi^2\log|\varphi| \in L^1M$, jeśli $\varphi \in L_1^2M$,*

(b) *jest ciągły względem normy Sobolewa $\|\cdot\|_{2,1}$,*

(c) *ma minimum na zbiorze $\Sigma = \{\varphi \in L_1^2M : \|\varphi\|_2 = 1\}$, jeśli $\varepsilon > 0$.*

Każde $\varphi \in \Sigma$ realizujące minimalną wartość κ funkcjonału I_ε^χ na zbiorze Σ, gdy $\varepsilon > 0$, jest ponadto dystrybucyjnym rozwiązaniem równania

$$\varepsilon\Delta\varphi + \varphi\log|\varphi| + (\kappa - \chi)\varphi = 0. \tag{14}$$

Do udowodnienia zarówno lematu 12.1 (w § 13), jak i twierdzenia 11.3 (w § 14), potrzebna nam będzie oczywista równość

$$I_\varepsilon^\chi(\psi) = \varepsilon\|\psi\|_{2,1}^2 + I_0^0(\psi) + \langle(\chi-\varepsilon)\psi,\psi\rangle_2 \quad \text{dla } \psi \in L_1^2M, \tag{15}$$

gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ jest iloczynem skalarnym w L^2M, oraz poniższy lemat.

Lemat 12.2. *Jeśli ciąg φ_j, $j = 1,2,3,\ldots$, w przestrzeni Sobolewa L_1^2M dla zwartej rozmaitości Riemanna (M,g) wymiaru $n \geqslant 3$ jest ograniczony w normie Sobolewa $\|\cdot\|_{2,1}$, to po zastąpieniu go odpowiednim podciągiem będzie istniała taka funkcja $\psi \in L_1^2M$, że przy $j \to \infty$ mamy zarówno zbieżność $\varphi_j \to \psi$ w normach L^2 i L^r, z dowolnie ustalonym*

$r \in (2, 2n/(n-2))$, *jak i słabą zbieżność* $\varphi_j \to \psi$ *w normie* $\|\cdot\|_{2,1}$ *oraz zbieżność norm* $\|\varphi_j\|_{2,1}$ *do pewnej liczby* $\gamma \geqslant \|\psi\|_{2,1}$.

Dowód. Z wyjątkiem ostatniej nierówności $\gamma \geqslant \|\psi\|_{2,1}$, istnienie podciągu o wymaganych własnościach jest oczywistą konsekwencją twierdzeń Rellicha–Kondraszowa i Banacha–Alaoglu; zauważmy, że L^2_1M jest przestrzenią Hilberta. Z drugiej strony, nierówność Schwarza $|\langle\psi, \varphi_j\rangle_{2,1}| \leqslant \|\psi\|_{2,1}\|\varphi_j\|_{2,1}$ w L^2_1M i słaba zbieżność $\varphi_j \to \psi$ powodują, że $\|\psi\|^2_{2,1} \leqslant \gamma\|\psi\|_{2,1}$ i albo $\|\psi\|_{2,1} = 0 \leqslant \gamma$, albo też $\|\psi\|_{2,1} \neq 0$ i obie strony nierówności można podzielić przez $\|\psi\|_{2,1}$. □

13. Dowód lematu 12.1

Kładąc $H(\varphi) = \varphi^2 \log|\varphi|$ dla $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $H(0) = 0$, otrzymujemy funkcję H zmiennej $\varphi \in \mathbb{R}$ o ciągłej pochodnej H'. Przy dowolnym ustalonym $r \in (2, \infty)$ ilorazy $H(\varphi)/|\varphi|^r$ i $H'(\varphi)/|\varphi|^{r-1}$ dążą do zera, gdy $|\varphi| \to \infty$, co daje nam oszacowania $|H(\varphi)| \leqslant c(1 + |\varphi|^r)$ i $|H'(\varphi)| \leqslant c\max(1, |\varphi|^{r-1})$ dla wszystkich $\varphi \in \mathbb{R}$, z $c > 0$ (które zależy tylko od r).

Niech $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ i $r \in (2, \infty)$. Nierówność $|H'(\varphi)| \leqslant c\max(1, |\varphi|^{r-1})$ i klasyczne twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej pokazują, że $|H(\varphi) - H(\psi)| \leqslant c|\varphi - \psi|\max(1, |\zeta|^{r-1})$ dla pewnego ζ leżącego między φ a ψ. Tak więc $|H(\varphi) - H(\psi)| \leqslant c|\varphi - \psi|\max(1, |\varphi|^{r-1}, |\psi|^{r-1})$. Nierówność Höldera, z takim q, że $r^{-1} + q^{-1} = 1$, tzn. $q = r/(r-1)$, daje więc dla funkcji $\varphi, \psi \in L^2_1M$ i $r \in (2, \infty)$ oszacowanie całkowe

$$\|H(\varphi) - H(\psi)\|_1 \leqslant c\|\varphi - \psi\|_r(1 + \|\varphi\|^r_r + \|\psi\|^r_r)^{1/q} \tag{16}$$

z c zależnym od r (przy czym prawa strona może być nieskończona).

Wybierzmy teraz $r = 2n/(n-2)$. Fakt, że $|H(\varphi)| \leqslant c(1 + |\varphi|^r)$, oraz inkluzja $L^2_1M \subset L^rM$ w (12), dająca całkowalność $|\varphi|^r$ dla $\varphi \in L^2_1M$, dowodzą wniosku (a). Ponieważ $|I^0_0(\varphi) - I^0_0(\psi)| = \|H(\varphi) - H(\psi)\|_1$, zaś $\|\psi\|_r \leqslant \|\varphi\|_r + \|\varphi - \psi\|_r$, zbieżność ψ do φ w normie Sobolewa $\|\cdot\|_{2,1}$ pociąga za sobą, poprzez (12), zbieżność w normie $\|\cdot\|_r$ i, w konsekwencji, także relację $I^0_0(\varphi) \to I^0_0(\psi)$. Funkcjonał $I^0_0\colon L^2_1M \to \mathbb{R}$ jest więc ciągły, skąd, na mocy (15), łatwo wynika (b).

Aby otrzymać (c), zacznijmy od wypukłości funkcji wykładniczej, tzn. *nierówności Jensena*, która stwierdza, że $\int_M F\,\mathrm{d}\mu \leqslant \log\int_M e^F\mathrm{d}\mu$ dla dowolnej funkcji całkowalnej $F\colon M \to \mathbb{R}$ na przestrzeni M z miarą probabilistyczną μ. Wystarczy to pokazać dla funkcji prostych, co sprowadza się do nierówności $q_1^{c_1}\dots q_k^{c_k} \leqslant c_1q_1 + \dots + c_kq_k$ dla dowolnych $q_j \in (0, \infty)$ i $c_j \in [0, \infty)$, $j = 1, \dots, k$, takich, że $\sum_{j=1}^k c_j = 1$, łatwej do sprawdzenia przez użycie $\partial/\partial q_1$ do zmaksymalizowania różnicy $q_1^{c_1}\dots q_k^{c_k} - c_1q_1 - \dots - c_kq_k$ przy ustalonych $q_2, \dots, q_k$ i $c_1, \dots, c_k$.

Oczywiście, $a\int_M \varphi^2\log\varphi\,\mathrm{d}g = \int_M \varphi^2\log\varphi^a\,\mathrm{d}g$ jeśli $a,\varepsilon \in (0,\infty)$, zaś $\varphi \in \Sigma$ (oznaczenia jak w (c)). Nierówność Jensena $\int_M F\mathrm{d}\mu \leqslant \log\int_M e^F\mathrm{d}\mu$, dla $d\mu = \varphi^2\mathrm{d}g$ i $F = \log\varphi^a$, daje więc $\int_M \varphi^2\log\varphi^a\,\mathrm{d}g \leqslant (2+a)\log\|\varphi\|_{2+a}$. Kładąc $a = 4/(n-2)$ i wybierając $p = 2$ w nierówności Sobolewa (12), dostajemy $2\int_M \varphi^2\log\varphi\,\mathrm{d}g \leqslant n\log C\|\varphi\|_{2,1}$. Ponieważ $\|\varphi\|_{2,1}^2 = \int_M(|\nabla\varphi|^2+\varphi^2)\mathrm{d}g$, ta ostatnia nierówność daje $I_\varepsilon^\chi(\varphi) \geqslant \Phi(\xi) + \min\chi$, gdzie $\Phi(\xi) = \varepsilon(\xi^2-1)-(1+2/a)\log C\xi$ dla $\xi = \|\varphi\|_{2,1} \geqslant \|\varphi\|_2 = 1$. Ponadto, $\inf\{\Phi(\xi) : \xi \in [1,\infty)\} > -\infty$, a więc, *jeśli $\varepsilon > 0$, to funkcjonał I_ε^χ jest ograniczony od dołu na zbiorze Σ.*

Niech $\varepsilon > 0$. Używając tej ostatniej konkluzji, oznaczmy przez κ infimum funkcjonału I_ε^χ na zbiorze Σ i ustalmy ciąg $\varphi_j \in \Sigma$, $j = 1,2,3,\ldots$, dla którego $I_\varepsilon^\chi(\varphi_j) \to \kappa$, gdy $j \to \infty$. Ciąg φ_j jest zatem ograniczony w normie Sobolewa $\|\cdot\|_{2,1}$, gdyż w oczywistej równości $\varepsilon\|\nabla\varphi\|_2 = 2I_\varepsilon^\chi(\varphi) - 2I_{\varepsilon/2}^\chi(\varphi)$, dla $\varphi = \varphi_j$, wyrazy $2I_\varepsilon^\chi(\varphi)$ zbiegają, a $2I_{\varepsilon/2}^\chi(\varphi)$ są ograniczone z dołu (jak widzieliśmy powyżej). Zastąpmy teraz ciąg φ_j podciągiem wybranym jak w lemacie 12.2 dla pewnej liczby γ i funkcji granicznej w L_1^2M, dla której użyjemy symbolu φ (a nie ψ). Z oszacowania (16) i inkluzji $L_1^2M \subset L^rM$ w (12) wynika, że $I_0^0(\varphi_j) \to I_0^0(\varphi)$. Przy $j \to \infty$, (15) dla $\psi = \varphi_j$ daje więc $\kappa = \varepsilon\gamma + I_0^0(\varphi) + \big\langle(\chi-\varepsilon)\varphi,\varphi\big\rangle_2 = I_\varepsilon^\chi(\varphi) + \varepsilon(\gamma^2 - \|\varphi\|_{2,1}^2)$, skąd

$$\kappa - I_\varepsilon^\chi(\varphi) = \varepsilon(\gamma^2 - \|\varphi\|_{2,1}^2). \tag{17}$$

Ponieważ $\kappa \leqslant I_\varepsilon^\chi(\varphi)$, widzimy, że $\gamma \leqslant \|\varphi\|_{2,1}$. Nierówność $\gamma \geqslant \|\varphi\|_{2,1}$ w lemacie 12.2 daje zatem $\gamma = \|\varphi\|_{2,1}$, skąd, na mocy (17), $\kappa = I_\varepsilon^\chi(\varphi)$, co dowodzi (c).

Ustalmy teraz $\varphi \in \Sigma$, dla którego $I_\varepsilon^\chi(\varphi)$ ma minimalną wartość κ. Jeśli $\psi \in \Sigma$ i $\langle\varphi,\psi\rangle_2 = 0$, to kładąc $\psi_\theta = (\cos\theta)\varphi + (\sin\theta)\psi$, dla $\theta \in \mathbb{R}$, otrzymujemy krzywą $\theta \mapsto \psi_\theta \in \Sigma$. Funkcja $\theta \mapsto I_\varepsilon^\chi(\psi_\theta)$ jest wówczas różniczkowalna i jej pochodną można wyliczyć różniczkując pod znakiem całki, tzn. $\mathrm{d}[I_\varepsilon^\chi(\psi_\theta)]/\mathrm{d}\theta = \int_M(\partial\Pi_\theta/\partial\theta)\mathrm{d}g$, gdzie Π_θ oznacza wyrażenie podcałkowe w (13) z φ zastąpionym przez ψ_θ.

Wynika to od razu z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, gdyż wartość bezwzględna $|\partial\Pi_\theta/\partial\theta|$ jest ograniczona z góry, jednostajnie ze względu na θ, przez funkcję całkowalną. Rzeczywiście – pierwszy i trzeci wyraz w Π_θ, zróżniczkowane względem θ, dają kombinację liniową $\cos 2\theta$ i $\sin 2\theta$ o współczynnikach będących funkcjami całkowalnymi. Zauważmy, że na mocy definicji przestrzeni L_1^pM, poprzedzającej wzór (12), gradient dystrybucyjny $\nabla\psi$ dowolnej funkcji $\psi \in L_1^pM$ jest mierzalnym polem wektorowym o całkowalnym kwadracie g-normy

$|\nabla\psi|: M \to \mathbb{R}$. Pochodna względem θ drugiego wyrazu w Π_θ ma z kolei wartość bezwzględną $|\partial\psi_\theta/\partial\theta| \cdot |H'(\psi_\theta)|$, dla funkcji H użytej na początku dowodu; wyprowadzona tam nierówność $|H'(\varphi)| \leqslant c\max(1, |\varphi|^{r-1})$, wraz z oczywistym faktem, że $|\psi_\theta|$ i $|\partial\psi_\theta/\partial\theta|$ są mniejsze lub równe $2\max(|\varphi|, |\psi|)$, daje

$$|\partial\psi_\theta/\partial\theta| \cdot |H'(\psi_\theta)| \leqslant c\max(1, |\varphi|^r, |\psi|^r) \leqslant c(1 + |\varphi|^r + |\psi|^r)$$

z pewną nową stałą $c > 0$. Dla $r = 2n/(n-2)$ wystarczy teraz zauważyć, że inkluzja $L^2_1 M \subset L^r M$ w (12) daje całkowalność $|\varphi|^r$ i $|\psi|^r$.

Ponieważ φ minimalizuje I^χ_ε na Σ, pochodna $\mathrm{d}[I^\chi_\varepsilon(\psi_\theta)]/\mathrm{d}\theta$ jest zerem dla $\theta = 0$. Różniczkując pod znakiem całki, dostajemy stąd

$$-\varepsilon\langle\nabla\varphi, \nabla\psi\rangle_2 + \langle\varphi\log|\varphi| + (\kappa - \chi)\varphi, \psi\rangle_2 = 0 \tag{18}$$

dla takich $\psi \in L^2_1 M$, że $\langle\varphi, \psi\rangle_2 = 0$. Z drugiej strony, (18) zachodzi też dla $\psi = \varphi$, bo $I^\chi_\varepsilon(\varphi) = \kappa$. Zatem mamy (18) dla wszystkich $\psi \in L^2_1 M$, w tym dla funkcji próbnych $\psi \in \mathcal{F}M$, co kończy dowód równości (14).

14. Zarys dowodu twierdzenia Rothausa (twierdzenie 11.3)

Potrzebny jest nam jeszcze jeden znany lemat.

Lemat 14.1. *Niech φ będzie dowolną funkcją w przestrzeni Sobolewa $L^2_1 M$ zwartej rozmaitości Riemanna (M, g) wymiaru $n \geqslant 3$. Funkcja $\psi = |\varphi|$ spełnia wówczas warunki $\psi \in L^2_1 M$ i $\|\psi\|_{2,1} \leqslant \|\varphi\|_{2,1}$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że φ jest funkcją gładką. Niech θ oznacza dowolny wyraz ustalonego ciągu liczb dodatnich zmierzającego do zera. Dla ciągu $\varphi_\theta = \sqrt{\varphi^2 + \theta^2}$ dodatnich funkcji gładkich, oczywista równość $\varphi_\theta - \psi = \theta^2/(\varphi_\theta + \psi)$ daje $|\varphi_\theta - \psi| \leqslant \theta$. Mamy zatem zbieżność jednostajną $\varphi_\theta \to \psi$, skąd także $\|\varphi_\theta - \psi\|_2 \to 0$ i $\|\varphi_\theta\|_2 \to \|\psi\|_2$. Z drugiej strony, $\nabla\varphi_\theta = (\varphi/\varphi_\theta)\nabla\varphi$, zaś $|\varphi/\varphi_\theta| \leqslant 1$. Tak więc $|\nabla\varphi_\theta| \leqslant |\nabla\varphi|$ i $\|\nabla\varphi_\theta\|_2 \leqslant \|\nabla\varphi\|_2$. Zastępując nasz ciąg odpowiednim podciągiem, dostajemy $\|\nabla\varphi_\theta\|_2 \to c$ dla jakiegoś $c \leqslant \|\nabla\varphi\|_2$. Ciąg $\|\varphi_\theta\|^2_{2,1} = \|\nabla\varphi_\theta\|^2_2 + \|\varphi_\theta\|^2_2$ zbiega zatem do γ^2, dla $\gamma = (\|\psi\|^2_2 + c^2)^{1/2}$. Na mocy lematu 12.2, zastąpienie wybranego przez nas podciągu pewnym dalszym podciągiem pozwala nam założyć zbieżność φ_θ w normie L^2 do pewnej funkcji granicznej leżącej w $L^2_1 M$. Ponieważ stwierdziliśmy już wcześniej, że $\|\varphi_\theta - \psi\|_2 \to 0$, tą funkcją graniczną musi być $\psi = |\varphi|$, skąd wynika, że $\psi \in L^2_1 M$. Nierówności $\gamma \geqslant \|\psi\|_{2,1}$ (w lemacie 12.2) i $c \leqslant \|\nabla\varphi\|_2$ dają nam z kolei $\|\psi\|^2_{2,1} \leqslant \gamma^2 = \|\psi\|^2_2 + c^2 \leqslant \|\psi\|^2_2 + \|\nabla\varphi\|_2 = \|\varphi\|^2_{2,1}$, co dowodzi naszej tezy w przypadku, gdy φ jest funkcją gładką.

Dla dowolnej funkcji $\varphi \in L^2_1 M$ mamy $\varphi_j \to \varphi$ przy $j \to \infty$, w normie $\|\cdot\|_{2,1}$, z pewnym ciągiem φ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, złożonym z funkcji gładkich.

Połóżmy $\psi_j = |\varphi_j|$ i $\psi = |\varphi|$. Zatem $\psi_j \in L_1^2 M$ i ciąg norm $\|\psi_j\|_{2,1} \leqslant \|\varphi_j\|_{2,1}$ jest ograniczony; zastępując go podciągiem zbieżnym, dostajemy $\|\psi_j\|_{2,1} \to \gamma \leqslant \|\varphi\|_{2,1}$ (gdyż $\|\varphi_j\|_{2,1} \to \|\varphi\|_{2,1}$). Lemat 12.2 dla ciągu ψ_j pozwala nam wybrać funkcję graniczną z $L_1^2 M$, która musi być identyczna z ψ ze względu na zbieżność $\psi_j \to \psi$ w normie L^2 (oczywistą na mocy zbieżności $\varphi_j \to \varphi$ w $L^2 M$, bo $|\psi_j - \psi| \leqslant |\varphi_j - \varphi|$), zaś nierówność $\|\psi\|_{2,1} \leqslant \gamma$ w lemacie 12.2 daje $\|\psi\|_{2,1} \leqslant \|\varphi\|_{2,1}$. □

Przy założeniach i oznaczeniach lematu 12.1, z $\varepsilon > 0$, niech φ minimalizuje I_ε^χ na zbiorze Σ. Wówczas $\psi = |\varphi|$ również minimalizuje I_ε^χ na Σ. Istotnie, lemat 14.1 pokazuje, że $\psi \in \Sigma$ i ψ spełnia nierówność $\|\psi\|_{2,1} \leqslant \|\varphi\|_{2,1}$, zaś $I_\varepsilon^\chi(\psi) \leqslant I_\varepsilon^\chi(\varphi)$ na mocy tej nierówności i (15), gdyż dwa końcowe wyrazy w (15) pozostają niezmienione, jeśli funkcję ψ zastąpimy przez $|\psi|$.

Inaczej mówiąc, możemy wtedy dodatkowo założyć, że funkcja φ minimalizująca I_ε^χ na Σ jest nieujemna. Stąd z kolei wynika, że φ jest wszędzie dodatnia oraz gładka. Powody tego wynikania możemy tu streścić tylko bardzo pobieżne. Po pierwsze, używając metody De Giorgiego i Nasha pokazuje się, że φ jest klasy C^2 z lokalnie hölderowskimi drugimi pochodnymi cząstkowymi. Po drugie, odpowiednia wersja lokalnej zasady maksimum, używająca współrzędnych geodezyjnych, dowodzi, że zbiór zer funkcji φ jest otwarty. Jego otwartość – wraz z warunkiem $\|\varphi\|_2 = 1$ (który jest częścią definicji Σ i wyklucza tożsamościowe znikanie φ) – pociąga za sobą dodatniość φ. Argument typu *bootstrapping* w przestrzeniach wielokrotnie różniczkowalnych funkcji o pochodnych hölderowskich daje nam z kolei gładkość φ.

Dowód twierdzenia 11.3. Ustalmy (M, g) i λ spełniające założenia twierdzenia, oraz funkcję gładką $\psi\colon M \to \mathbb{R}$. Dla $\varepsilon = 1/\lambda$ i $\chi = -\psi/(2\lambda)$ istnieje – jak widzieliśmy wyżej – dodatnie rozwiązanie gładkie φ równania (14) z pewną stałą κ. Kładąc $f = -2(\kappa + \log\varphi)$, łatwo sprawdzamy, że formuła (14) przyjmuje postać $\mathcal{R}f + \lambda f = \psi$. □

15. Dowód twierdzenia Perelmana o gradientowości (twierdzenie 11.2)

Założenie. (M, g) jest zwartą rozmaitością Riemanna i równość (2) zachodzi dla ustalonej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ i ustalonego pola wektorowego w.

Cel. Znaleźć funkcję f spełniającą równanie (11): $\nabla \mathrm{d}f + \mathrm{Ric} = \lambda g$. Możemy przy tym też założyć, że $n = \dim M \geqslant 3$ i stała solitonowa λ jest dodatnia, bo – jak wykazał Hamilton w [21] i, jeszcze w roku 1974, Bourguignon w [6] – w przypadku zwartym warunek (2) dla $n = 2$, bądź dla $\lambda \leqslant 0$, daje (3), tzn. (11) z $f = 0$.

Motywacja dowodu. Funkcja f ma spełniać (11); skąd ją wziąć? Lemat 11.1 sugeruje odpowiedź – trzy funkcje naturalnie stowarzyszone z f mają, *ex post facto*, okazać się stałe, co (przy właściwym wyborze ich stałych wartości) prowadzi do trzech równań eliptycznych drugiego rzędu nałożonych na szukaną funkcję f. Można więc spróbować najpierw wykazać, że któreś z tych trzech równań ma rozwiązanie f, a następnie – że takie f spełnia też (11). W pierwszym równaniu stała, o której mowa, musi być oczywiście wartością średnią $\mathrm{s}_{\mathrm{avg}}$ krzywizny skalarnej s (bo $\int_M \Delta f \, \mathrm{d}g = 0$), a taka funkcja f, że $\Delta f + \mathrm{s} = \mathrm{s}_{\mathrm{avg}}$, istnieje na mocy ogólnego kryterium rozwiązalności eliptycznych równań liniowych. Niestety, nikt nie wie, jak stąd dostać (11). Sprawy mają się lepiej z trzecim równaniem, w którym – ponieważ $\lambda > 0$ – dodając odpowiednią stałą do f możemy zażądać, by stała po prawej stronie była zerem. Jak zobaczymy, rozwiązalność wynika tu z twierdzenia Rothausa.

Argument. Dla dowolnej zwartej rozmaitości Riemanna (M, g), funkcji f, stałej λ i pola wektorowego w, połóżmy

$$h = \nabla \mathrm{d}f + \mathrm{Ric} - \lambda g, \quad b = \pounds_w g + \mathrm{Ric} - \lambda g, \quad \psi = \Delta e^{-f} + 2\delta[e^{-f} w],$$

gdzie δ jest operatorem dywergencji pól wektorowych. Wówczas (bez żadnych dodatkowych założeń!), dla operatora $\mathcal{R}$ danego wzorem (7),

$$\int_M |h|^2 e^{-f} \mathrm{d}g + \int_M (\mathcal{R}f + \lambda f + \mathrm{s}/2)\psi \, \mathrm{d}g = \int_M \langle h, b \rangle e^{-f} \mathrm{d}g.$$

(Dowód polega na trywialnym, choć żmudnym całkowaniu przez części). W naszej sytuacji, gdy λ i w spełniają (2), całka po prawej stronie znika, bo $b = 0$, a twierdzenie Rothausa 11.3 pozwala nam tak wybrać f, by $\mathcal{R}f + \lambda f + \mathrm{s}/2 = 0$. Zatem $h = 0$, co kończy dowód.

16. Kanoniczne metryki Kählera

Niech g będzie metryką Kählera na ustalonej zwartej rozmaitości zespolonej M. Wzory $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ i $\rho = \mathrm{Ric}(J\cdot, \cdot)$ definiują wówczas *formę Kählera* i *formę Ricciego* metryki g. Obie są 2-formami zamkniętymi, tzn. są (na mocy (8)) skośnie symetryczne, zaś $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\rho = 0$. Jeśli funkcja f na M spełnia gradientowe równanie solitonowe (11), to $i\partial\overline{\partial} f + \rho = \lambda\omega$. Ponieważ forma $i\partial\overline{\partial} f$ jest dokładna (będąc pochodną zewnętrzną formy $i\overline{\partial} f$), wynika stąd równość klas kohomologii de Rhama: $[\rho] = \lambda[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$. Z drugiej strony, $[\rho]$ jest zawsze równa pierwszej klasie

Cherna c_1 rozmaitości M pomnożonej przez 2π, a więc zależy tylko od struktury zespolonej – a nie na przykład od metryki g.

Warunkiem koniecznym na to, by na zwartej rozmaitości zespolonej istniał soliton Kählera–Ricciego o dodatniej (bądź ujemnej) stałej solitonowej λ jest zatem dodatniość (bądź ujemność) jej pierwszej klasy Cherna c_1, tj. realizowalność c_1 (bądź $-c_1$) jako klasy kohomologii formy Kählera pewnej metryki Kählera.

W wymiarze zespolonym dwa warunek ten jest również dostateczny. Ponadto, na zwartych powierzchniach zespolonych o dodatniej bądź ujemnej pierwszej klasie Cherna c_1, solitony Kählera–Ricciego stanowią naturalny wybór metryki *wyróżnionej* czy też *kanonicznej.*

Ściślej mówiąc, *na powierzchni takiej istnieje soliton Kählera–Ricciego, który jest w dodatku jedyny z dokładnością do działania składowej jedności grupy automorfizmów zespolonych oraz przeskalowań.*

Powyższe stwierdzenie jest podsumowaniem szeregu wyników, zarówno klasycznych, jak nowszych. Należą tu twierdzenia dowodzące:

(a) jedyności metryk Kählera–Einsteina (1957: Eugenio Calabi [7], dla $c_1 < 0$, 1987: Shigetoshi Bando, Toshiki Mabuchi [2], dla $c_1 > 0$),

(b) prawdziwości hipotezy Calabiego o istnieniu metryki Kählera–Einsteina jeśli $c_1 < 0$ (1978: Thierry Aubin [1], Shing-Tung Yau [37]),

(c) istnienia solitonów Kählera–Ricciego na zwartych torycznych rozmaitościach zespolonych z $c_1 > 0$ (2004: Xu-Jia Wang, Xiaohua Zhu [36]),

(d) jedyności solitonów Kählera–Ricciego, gdy $c_1 > 0$, *modulo* automorfizmy ze składowej jedności (2002: Tian i Zhu [35]).

17. Równania Ricci-hesjanowe

Od tej pory wszystkie rozważane funkcje są – z definicji – *gładkie.*

Używając terminologii Maschlera [27], mówimy, że funkcja τ na rozmaitości Riemanna (M, g) *spełnia równanie Ricci-hesjanowe*, jeśli dla pewnej funkcji α na M, niezerowej we wszystkich punktach pewnego podzbioru gęstego, używając oznaczenia wprowadzonego w (5), mamy

$$\{\alpha\nabla \mathrm{d}\tau + \mathrm{Ric}\}_0 = 0 \tag{19}$$

bądź też, równoważnie, $\alpha\nabla \mathrm{d}\tau + \mathrm{Ric} = \eta g$ dla pewnej funkcji η.

Rozwiązania równań typu (19) istnieją na przykład na pewnych rozmaitościach Kählera. Rozwiązania te należą do rodziny *specjalnych potencjałów Kählera–Ricciego*, która jest całkowicie sklasyfikowana, zarówno lokalnie [12, §18], jak i w przypadku rozmaitości zwartych [13, §16]. Ich definicję i opis ich związku z warunkiem (19) można znaleźć w [12, §7; 27].

Innym szczególnym przypadkiem równania Ricci-hesjanowego (19) jest gradientowe równanie solitonowe (11), w którym $\tau = f$ i $\alpha = 1$. Dodatkowe powiązanie między równaniami (19) i (11) bierze się stąd, że z wielu rozwiązań równań Ricci-hesjanowych (19), które same nie spełniają gradientowego równania solitonowego (11), można otrzymać rozwiązania (11) poprzez odpowiednie modyfikacje metryk g i funkcji występujących w (19). Modyfikacje metryk polegają tu na ich *zmianach konforemnych*, omówionych bardziej szczegółowo w § 19.

Opisane podejście zapoczątkował Maschler w pracy [27]. Użyte przez niego wyjściowe rozwiązania τ równań typu (19) należały do – wspomnianej wyżej – klasy specjalnych potencjałów Kählera–Ricciego.

Następujący lemat – używający konwencji z końca § 10 – jest nieznaczną modyfikacją argumentu Maschlera z [27, Remark 4.2]. Pojawiające się w nim rozwiązanie τ równania Ricci-hesjanowego (19) jest specjalnym potencjałem Kählera–Ricciego na zwartej rozmaitości Kählera (M_k^m, g), tzn. należy do rodziny przykładów, skonstruowanych w pracy [13, §5].

Lemat 17.1. *Niech $m, k \in \mathbb{Z}$ oraz funkcje gładkie $x, \phi\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ zmiennej t, ze stałą $T > 0$, spełniają warunki $m > k > 0$, jak również*
(a) $\ddot{\phi} = (m-1)\dot{x}\dot{\phi} + m\phi - m$,
(b) $\phi(0) = \phi(T) = 0$, *zaś* $\phi > 0$ *na przedziale* $(0,T)$,
(c) $\dot{\phi}(0) = k$ *i* $\dot{\phi}(T) = -k$,
przy czym $(\cdot)^{\dot{}} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. *Na rozmaitości zespolonej* $M = M_k^m$ *opisanej w* (∗), § 8, *istnieje wówczas metryka Kählera g o krzywiznie skalarnej* s *oraz gładka funkcja suriektywna* $t\colon M \to [0,T]$ *takie, że*:
(d) *funkcja* $\tau = e^t$ *jest rozwiązaniem równania Ricci-hesjanowego* (19), *tzn.* $\{\alpha\nabla d\tau + \mathrm{Ric}\}_0 = 0$, *gdzie* $\alpha = (m-1)(\dot{x}+1)e^{-t}$,
(e) $\Delta\tau = 2(\dot{\phi} + m\phi)$ *i* $g(\nabla\tau, \nabla\tau) = 2e^t\phi$, *dla funkcji* $\tau = e^t$,
(f) $e^t\mathrm{s}/2 = m(m-1) - m(m-1)\phi - (2m-1)\dot{\phi} - \ddot{\phi}$.

Zarys dowodu. Istnienie metryki g i funkcji t pokażemy poprzez jawną konstrukcję, przeprowadzoną w klasie rozmaitości zespolonych, która jest nieco szersza niż rodzina M_k^m (patrz też komentarz na końcu § 8). Konkretniej, załóżmy, że N jest zwartą rozmaitością zespoloną wymiaru $m-1$, której wiązka kanoniczna (tj. najwyższa potęga zewnętrzna wiązki kostycznej) daje się podnieść do ułamkowej potęgi tensorowej o wykładniku k/m. Gdy m i k są względnie pierwsze, oznacza to realizowalność wiązki kanonicznej jako m-tej potęgi tensorowej jakiejś wiązki prostych; wiadomo z pracy [23], że N musi być wtedy biholomorficzna z $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1}$, dla której m-tym pierwiastkiem tensorowym wiązki kanonicznej jest właśnie wiązka tautologiczna. Jeśli jednak ułamek k/m da się uprościć, przykładów takich jest więcej, co ilustruje choćby przypadek nieparzystych potęg kartezjańskich rozmaitości $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Załóżmy też, że na N istnieje metryka Kählera–Einsteina h o tensorze Ricciego równym $2mh$. Inaczej mówiąc, żądamy dodatniości stałej Einsteina, otrzymując dla niej wartość $2m$ po przeskalowaniu h.

Niech M oznacza uzwarcenie rzutowe wiązki prostych $\mathcal{E}$ nad N, która jest (k/m)-tą potęgą tensorową wiązki kanonicznej. Nasze założenia gwarantują istnienie w wiązce $\mathcal{E}$ hermitowskiej koneksji Cherna, której formą krzywizny jest forma Ricciego metryki h (patrz § 16) pomnożona przez $-k/m$. Wiązka styczna przestrzeni totalnej $\mathcal{E}$ rozłożona jest więc na sumę prostą składnika wertykalnego $\mathcal{V}$ (stycznego do włókien) i składnika horyzontalnego $\mathcal{H}$ (pochodzącego od koneksji).

Norma włóknista w $\mathcal{E}$ stanowi nieujemną funkcję r na przestrzeni totalnej $\mathcal{E}$, którą jednocześnie traktujemy jako zmienną niezależną. Nasza zmienna t, ograniczona do przedziału $(0,T)$, staje się funkcją zmiennej r, scharakteryzowaną przez wybór jednego z dyfeomorfizmów $r \mapsto t(r)$ przedziału $(0,\infty)$ na $(0,T)$ spełniających równanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}t(r) = \frac{2\phi(t(r))}{kr}. \tag{20}$$

Możemy więc traktować t oraz ϕ jako funkcje $\mathcal{E} \setminus N \to \mathbb{R}$, zależne od normy włóknistej r i określone na dopełnieniu przekroju zerowego $N \subset \mathcal{E}$. Metrykę g na $\mathcal{E} \setminus N$ definiujemy teraz żądając, by składnik $\mathcal{V}$ był g-ortogonalny do $\mathcal{H}$, g obcięte do każdego włókna $\mathcal{E}$ było metryką euklidesową pomnożoną przez funkcję $2(kr)^{-2}e^t\phi$ oraz by g obcięte do $\mathcal{H}$ było iloczynem funkcji $2e^t$ i przeciwobrazu metryki h poprzez projekcję $\mathcal{E} \to N$ wiązki $\mathcal{E}$.

Rozwiązanie $t(r)$ równania (20) nie jest oczywiście jedyne; przez przeskalowanie zmiennej niezależnej r powstają z niego inne rozwiązania. Otrzymane z nich metryki są jednak izometryczne z g. Izometrią będzie tu odpowiednie przeskalowanie w każdym włóknie wiązki $\mathcal{E}$.

Reszta dowodu – sprawdzanie, że g i t są gładko przedłużalne do M oraz mają żądane własności – jest trywialna, choć żmudna. $\square$

18. Inny opis gradientowych solitonów Ricciego

Ograniczmy teraz nasze rozważania do gradientowych solitonów Ricciego o *dodatniej* stałej solitonowej λ. Funkcję solitonową f spełniającą równanie (11) możemy wówczas *znormalizować* przez dodanie odpowiedniej stałej, tak aby funkcja $\Delta f - g(\nabla f, \nabla f) + 2\lambda f$, która – jak wiemy –

jest stała (lemat 11.1), była równa zeru. Znormalizujmy też metrykę g, zastępując ją przez λg (czyli zakładając, że $\lambda = 1$), co nie zmienia ani tensora Ricciego Ric, ani hesjanu ∇df. Efektem tych normalizacji są następujące równości:

$$\text{a) } \nabla df + \mathrm{Ric} = g, \quad \text{b) } \Delta f - g(\nabla f, \nabla f) + 2f = 0. \tag{21}$$

Dla funkcji f na rozmaitości Riemanna (M, g) wymiaru $n \geqslant 3$, znormalizowana wersja (21) gradientowego równania solitonowego (11) jest równoważna następującemu układowi trzech równań:

$$\begin{aligned}&\text{(a) } \{\nabla df + \mathrm{Ric}\}_0 = 0,\\ &\text{(b) } \Delta f - g(\nabla f, \nabla f) + 2f = 0,\\ &\text{(c) } (n-2)(\Delta f + \mathrm{s} - n) + n[\Delta f - g(\nabla f, \nabla f) + 2f] = 0.\end{aligned}$$

Symbol $\{\cdot\}_0$ oznacza tu część g-bezśladową, daną wzorem (5), zaś $\mathrm{s} = \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric}$ jest krzywizną skalarną metryki g.

Równoważność między (21) i układem (a)–(c) jest oczywista z faktu, że równość obu stron (21.a) jest tym samym, co jednoczesne równości ich części g-bezśladowych oraz g-śladów.

19. Zmiany konforemne metryk Riemanna

Przez *konforemną zmianę* metryki Riemanna g na rozmaitości M rozumie się zastąpienie jej iloczynem μg, gdzie $\mu\colon M \to (0, \infty)$.

Dla ustalonej n-wymiarowej rozmaitości Riemanna (M, g) i funkcji $f\colon M \to \mathbb{R}$, niech $\mathrm{Ric}, \mathrm{s}, \nabla f, \nabla df$ i Δf oznaczają tensor Ricciego i krzywiznę skalarną g oraz gradient, hesjan i Laplasjan f. Ich odpowiedniki $\overline{\mathrm{Ric}}, \overline{\mathrm{s}}, \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} df$ i $\overline{\Delta} f$ dla konforemnie zmienionej metryki $\overline{g} = g/\sigma^2$, gdzie $\sigma\colon M \to (0, \infty)$, spełniają znane równości

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}} &= \mathrm{Ric} + (n-2)\sigma^{-1}\nabla d\sigma + [\sigma^{-1}\Delta\sigma - (n-1)\sigma^{-2}g(\nabla\sigma, \nabla\sigma)]g,\\ \overline{\mathrm{s}} &= \sigma^2 \mathrm{s} + 2(n-1)\sigma\Delta\sigma - n(n-1)g(\nabla\sigma, \nabla\sigma),\\ \overline{g}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) &= \sigma^2 g(\nabla f, \nabla f) \quad (\text{ponieważ } \overline{\nabla} f = \sigma^2 \nabla f),\\ \overline{\nabla} df &= \nabla df + \sigma^{-1}[d\sigma \otimes df + df \otimes d\sigma] - \sigma^{-1} g(\nabla\sigma, \nabla f) g,\\ \overline{\Delta} f &= \sigma^2 \Delta f - (n-2)\sigma g(\nabla\sigma, \nabla f),\end{aligned}$$

które sprawdza się łatwo, choć żmudnie (na przykład w [14, str. 528–529]).

Przypuśćmy też, że zarówno σ, jak i f są funkcjami gładkimi zadanej funkcji niestałej $t\colon M \to \mathbb{R}$ (patrz § 10) i rozważmy funkcje x, y zmiennej t dane wzorami $x = 2\log\sigma - t + (m-1)^{-1} f$ i $y = (m-1)^{-1} f$, gdzie $m = n/2$ (nawet dla nieparzystych n). Załóżmy ponadto, że $g(\nabla t, \nabla t)$ jest funkcją gładką funkcji t i połóżmy $\phi = e^t g(\nabla t, \nabla t)/2$. Tak więc

$$\text{a) } \sigma = e^{(x-y+t)/2}, \quad \text{b) } f = (m-1)y, \quad \text{c) } g(\nabla t, \nabla t) = 2e^{-t}\phi. \tag{22}$$

Naszym celem jest znalezienie warunków dostatecznych na to, by po zmianie konforemnej metryki g, która – na razie – jest zupełnie dowolna, powstał gradientowy soliton Ricciego $\overline{g}$ o stałej solitonowej $\lambda > 0$ (tzn. $\lambda = 1$, jeśli użyć normalizacji wprowadzonej w § 18). Warunki te nałożone będą na niewiadome funkcje x, y zmiennej t, odpowiadające – poprzez relacje (22) – funkcjom niewiadomym σ i f, które z kolei mają stanowić czynnik funkcyjny w szukanej zmianie konforemnej $\overline{g} = g/\sigma^2$ oraz funkcję solitonową dla $\overline{g}$.

Wyliczmy najpierw składniki równań (a)–(c) w § 18 dla f oraz metryki $\overline{g}$ (zamiast g), wyrażając je poprzez funkcje x, y, ϕ (i ich pochodne względem t, z konwencją oznaczeniową $(\cdot)\dot{} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$), przez g-hesjan $\nabla d\tau$ funkcji $\tau = e^t$ i jej g-laplasjan $\Delta\tau$, oraz przez tensor Ricciego Ric metryki g i jej krzywiznę skalarną s:

$$\{\overline{\nabla}\mathrm{d}f + \overline{\mathrm{Ric}}\}_0 = \{\alpha\nabla\mathrm{d}\tau + \mathrm{Ric} + \beta\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t\}_0, \tag{23}$$

gdzie $\alpha = (m-1)(\dot{x}+1)e^{-t}$, zaś $\beta = (m-1)(2\ddot{x} - \dot{y}^2 + \dot{x}^2 - 1)/2$,

$$\begin{aligned}&(m-1)^{-1}e^{y-x}[\overline{\Delta}f - \overline{g}(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f) + 2f]\\ &\quad = \dot{y}[\Delta\tau - 2(\dot{\phi} + m\phi)] + 2[\phi\ddot{y} - (m-1)\phi\dot{x}\dot{y} + \dot{\phi}\dot{y} + ye^{y-x}],\end{aligned} \tag{24}$$

a także, wciąż z $n = 2m$,

$$\begin{aligned}&e^{y-x}[(\overline{\Delta}f + \overline{\mathrm{s}} - 2m) + m(m-1)^{-1}\{\overline{\Delta}f - \overline{g}(\overline{\nabla}f, \overline{\nabla}f) + 2f\}]\\ &\quad = m[2\dot{x}\dot{\phi} - (2m-1)\phi\dot{x}^2 + \phi\dot{y}^2 + 2(y-1)e^{y-x} - \phi + 2m]\\ &\qquad - 2[m(m-1) - m(m-1)\phi - (2m-1)\dot{\phi} - \ddot{\phi} - e^t\mathrm{s}/2]\\ &\qquad + (2m-1)(\dot{x}+1)[\Delta\tau - 2(\dot{\phi} + m\phi)]\\ &\qquad - 2[\ddot{\phi} - (m-1)\dot{x}\dot{\phi} - m\phi + m]\\ &\qquad + (2m-1)[2\ddot{x} - \dot{y}^2 + \dot{x}^2 - 1]\phi.\end{aligned} \tag{25}$$

Sprawdzenie równości (23)–(25) jest, jak poprzednio, łatwe choć żmudne. Można w nim użyć następujących kroków pośrednich. Po pierwsze,

$$2\dot{\sigma}\sigma^{-1} = \dot{x} - \dot{y} + 1, \quad 2(\ddot{\sigma} - \dot{\sigma})\sigma^{-1} = \ddot{x} - \ddot{y} + [(\dot{x} - \dot{y})^2 - 1]/2 \tag{26}$$

na mocy (22.a). Z powyższych wzorów na $\overline{\mathrm{Ric}}$ i $\overline{\nabla}\mathrm{d}f$, (9.b)–(10) dla $\chi = \sigma$ bądź $\chi = f$, oraz (22.b) i (26), z $m = n/2$ i $\tau = e^t$, dostajemy

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{m-1}\{\overline{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric}\}_0 &= \{\tfrac{\dot{x}-\dot{y}+1}{e^t}\nabla\mathrm{d}\tau + 2(\ddot{\sigma} - \dot{\sigma})\sigma^{-1}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t\}_0,\\ \tfrac{1}{m-1}\overline{\nabla}\mathrm{d}f &= \tfrac{\dot{y}}{e^t}\nabla\mathrm{d}\tau + (\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2)\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \tfrac{\dot{x}-\dot{y}+1}{e^t}\dot{y}\phi g.\end{aligned} \tag{27}$$

Z (26) i (27) trywialnie wynika (23). Stosując do drugiej równości w (27) operację $\mathrm{tr}_{\overline{g}} = \sigma^2\,\mathrm{tr}_g$ i, osobno, kładąc $\chi = f$ w (9.a) oraz używając faktu, że $\operatorname{tr}_g(\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t) = g(\nabla t, \nabla t)$, a następnie wyrażając σ i $g(\nabla t, \nabla t)$ poprzez (22), otrzymujemy

$$\begin{aligned} (m-1)^{-1} e^{y-x} \overline{\Delta} f &= \dot{y}\Delta\tau + 2[\ddot{y} - m\dot{y} + (m-1)(\dot{y} - \dot{x})\dot{y}]\phi, \\ (m-1)^{-2} e^{y-x} \overline{g}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) &= 2\dot{y}^2\phi, \end{aligned} \tag{28}$$

co daje (24). Ze wzoru na $\overline{\mathrm{s}}$, (9)–(10) dla $\chi = \sigma$ i (26), mamy

$$\begin{aligned} (2m-1)^{-1} e^{y-x}\overline{\mathrm{s}} &= (2m-1)^{-1} e^t \mathrm{s} + (\dot{x} - \dot{y} + 1)\Delta\tau \\ &+ [2\ddot{x} - 2\ddot{y} - (m-1)(\dot{x} - \dot{y})^2 - 2m(\dot{x} - \dot{y}) - m - 1]\phi. \end{aligned} \tag{29}$$

Z tej ostatniej równości oraz (28) i (24) łatwo wynika (25).

20. Konforemnie kählerowskie solitony Ricciego

Ustaliwszy $T \in (0, \infty)$ i takie liczby całkowite m, k, że $m > k > 0$, rozważmy układ równań różniczkowych drugiego rzędu

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 2\ddot{x} = \dot{y}^2 - \dot{x}^2 + 1, \\ &\text{b)} \quad \phi\ddot{y} = (m-1)\phi\dot{x}\dot{y} - \dot{\phi}\dot{y} - y e^{y-x}, \\ &\text{c)} \quad \ddot{\phi} = (m-1)\dot{x}\dot{\phi} + m\phi - m, \end{aligned} \tag{30}$$

nałożony na gładkie funkcje niewiadome $x, y, \phi \colon [0, T] \to \mathbb{R}$ zależne od zmiennej $t \in [0, T]$, przy czym $(\cdot)^{\dot{}} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, oraz dodatkowe równanie

$$2\dot{x}\dot{\phi} - (2m-1)\phi\dot{x}^2 + \phi\dot{y}^2 + 2(y-1)e^{y-x} - \phi + 2m = 0 \tag{31}$$

rzędu pierwszego, wraz z warunkami brzegowymi

$$\phi(0) = \phi(T) = 0, \quad \phi > 0 \text{ na } (0, T), \quad \dot{\phi}(0) = k = -\dot{\phi}(T). \tag{32}$$

Równanie (31) nie zmniejsza bardzo drastycznie zbioru rozwiązań układu (30), gdyż prawa strona (31) pomnożona przez e^x jest całką (30).

Twierdzenie 20.1. *Z dowolnym rozwiązaniem* $(x, y, \phi) \colon [0, T] \to \mathbb{R}^3$ *układu* (30)–(32), *przy* T, m, k *ustalonych jak wyżej, stowarzyszony jest konforemnie kählerowski soliton Ricciego* $\overline{g}$ *na zwartej rozmaitości zespolonej* $M = M_k^m$ *opisanej przez* $(*)$ *w* § 8. *Aby otrzymać* $\overline{g}$, *używamy metryki Kählera* g *na* M *i funkcji* $t \colon M \to \mathbb{R}$, *które odpowiadają naszym* x, ϕ, T, m, k *jak w lemacie* 17.1, *kładąc* $\overline{g} = g/\sigma^2$ *dla funkcji* σ *zadanej wzorem* (22.a).

Metryka $\overline{g}$ *i funkcja* f *zdefiniowana przez* (22.b) *spełniają wówczas warunki* (a)–(c) *w* § 18, *równoważne gradientowemu równaniu solitonowemu* (11) *z* $\lambda = 1$ *i z* g *zastąpionym przez* $\overline{g}$.

Dowód. Prawe strony równań (23)–(25) są równe zeru – w równaniu (23) mamy $\{\alpha\nabla \mathrm{d}\tau + \mathrm{Ric}\}_0 = 0$ i $\beta = 0$, jak stwierdzają lemat 17.1(d) i (30.a); w (24), znikanie obu wyrazów po prawej stronie jest konsekwencją lematu 17.1(e) i (30.b); zaś w (25) każda z pięciu końcowych linijek jest zerem na mocy (31), lematu 17.1(f), lematu 17.1(e), (30.c) i (30.a). □

Dla wszystkich znanych przykładów zwartych solitonów Ricciego (które wylicza pytanie w § 9) krotności wartości własnych tensora Ricciego w dowolnym punkcie są parzyste. Wynika to z (8) i faktu, że tensor Ricciego iloczynu kartezjańskiego rozmaitości Riemanna jest, w naturalnym sensie, sumą prostą tensorów Ricciego rozmaitości-czynników.

Przypuśćmy, że dla jakiegoś rozwiązania $(x, y, \phi)\colon [0, T] \to \mathbb{R}^3$ układu (30)–(32) i funkcji σ zdefiniowanej przez (22.a), mamy $\ddot{\sigma} \neq \dot{\sigma}$ gdzieś w przedziale $[0, T]$ (czy takie rozwiązania istnieją – nie wiadomo; kwestię tę dodatkowo komplikuje osobliwość równania (30.b) dla $t = 0$ i $t = T$, wynikająca z (32)). Z przyczyn wymienionych niżej, zwarty soliton Ricciego $(M, \overline{g})$ otrzymany wówczas z twierdzenia 20.1 nie byłby einsteinowski, ani lokalnie kählerowski, ani też lokalnie rozkładalny w iloczyn kartezjański czynników einsteinowskich lub lokalnie kählerowskich. Pytanie z § 9 miałoby więc odpowiedź twierdzącą.

Przyczyny, o których mowa, są następujące. Ponieważ wymiar M nad $\mathbb{R}$ jest parzysty, w każdym punkcie spełniającym warunek $(\ddot{\sigma}-\dot{\sigma})\mathrm{d}t \neq 0$ tensor Ricciego $\overline{\mathrm{Ric}}$ ma wartość własną o krotności nieparzystej, dla której gradient $\overline{\nabla}\tau$ to wektor własny. Bierze się to ze wzoru (27), bo, na mocy lematu 17.1(d) i (8), $\nabla \mathrm{d}\tau$ i Ric są hermitowskie i jednocześnie diagonalizowalne w każdym punkcie, z wartościami własnymi o krotnościach parzystych, zaś z (6.c) i drugiej równości w lemacie 17.1(e) wynika, że $\nabla\tau$ jest ich wspólnym wektorem własnym.

Rozwiązania układu (30)–(31), dla których $\ddot{\sigma} = \dot{\sigma}$, są z kolei dobrze znane. Opiszemy te rozwiązania w §§ 21–25.

Twierdzenie 20.1 ma też *wersję lokalną*, w której zamiast warunków brzegowych (32) zakłada się tylko dodatniość ϕ na przedziale otwartym stanowiącym dziedzinę rozwiązania (x, y, ϕ) układu (30)–(31) z $m \geqslant 2$. Konstrukcja opisana w lemacie 17.1 daje wówczas metrykę g i funkcję t, które są co prawda określone tylko na pewnej rozmaitości niezwartej, ale nadal spełniają konkluzje (d)–(f) lematu 17.1.

Inne jeszcze uogólnienie twierdzenia 20.1 powstaje, gdy usuniemy z układu (30)–(32) równanie (30.b), zachowując wszystkie pozostałe założenia. Prawa strona równania (23) jest, oczywiście, wciąż jeszcze równa zeru. Daje to słabszą wersję gradientowego równania solitonowego (11): $\overline{\nabla}\mathrm{d}f + \overline{\mathrm{Ric}} = \lambda\overline{g}$ dla pewnej funkcji λ, która nie musi być stała. Metryki $\overline{g}$, dla których istnieją takie funkcje f i λ, były badane przez kilku autorów (patrz [3; 27, str. 369; 32]); nazywa się je czasem gradientowymi *prawie-solitonami Ricciego.*

21. Symetrie układu (30)–(31) **i warunek** $\ddot\sigma = \dot\sigma$

W równaniach tworzących układ (30)–(31) żaden wyraz nie zależy jawnie od zmiennej t, zaś te wyrazy, które zawierają pierwsze pochodne $\dot x, \dot y, \dot\phi$, zależą od nich w sposób jednorodnie kwadratowy. Układ będzie więc nadal spełniony, jeśli w rozwiązaniu, określonym na dowolnym przedziale, zastąpimy zmienną t przez $c \pm t$ dla dowolnej stałej c.

Zbiór rozwiązań określonych na przedziale $[0, T]$ i spełniających na dodatek warunki brzegowe (32) jest więc niezmienniczy względem podstawienia za zmienną t wyrażenia $T - t$.

Omówimy teraz rozwiązania układu (30)–(31), dla których $\ddot\sigma = \dot\sigma$.

Lemat 21.1. *Niech rozwiązanie* (x, y, ϕ) *układu* (30)–(31), *w którym* $m \geqslant 2$, *określone na przedziale otwartym zmiennej* t, *spełnia dodatkowo warunek* $\ddot\sigma = \dot\sigma$, *z funkcją* σ *daną wzorem* (22.a). *Wtedy* $\sigma = q_0 + q_1 e^t$ *dla stałych* q_0, q_1, *z których przynajmniej jedna jest dodatnia. Ponadto*

$$\text{a) } \dot y\dot\phi = (m\dot x - \dot y)\dot y\phi - ye^{y-x}, \qquad \text{b) } \ddot y = (\dot y - \dot x)\dot y, \tag{33}$$

oraz zachodzi jeden z następujących trzech przypadków:
(a) $y = 0$ *na całym przedziale zmiennej* t,
(b) $q_1 = 0$, *tzn.* $\sigma = q_0$ *jest stałą dodatnią*,
(c) $q_0 = 0 < q_1$ *i* $\sigma = q_1 e^t$.
W zbiorze rozwiązań pełnego układu (30)–(32), *dla* T, m, k *ustalonych jak poprzednio*, *transformacja polegająca na zastąpieniu zmiennej* t *przez* $T - t$ *zachowuje warunek* $\ddot\sigma = \dot\sigma$ *i przeprowadza przypadek* (a) *w siebie*, *zaś przypadek* (b) *wymienia z przypadkiem* (c).

Dowód. Ustalmy rozwiązanie (x, y, ϕ) układu (30). Dla funkcji η zdefiniowanej jako różnica między lewą i prawą stroną wzoru (33.a), odejmując od (30.b) równość (30.a) pomnożoną przez $\phi/2$, z (26.b) i (30) dostajemy $\eta = 2(\ddot\sigma - \dot\sigma)\phi\sigma^{-1}$. Z (30) wynika również, że wyrażenie

$$2(\phi\eta)^{\boldsymbol{\cdot}} - 2(m-1)\phi\eta\dot x + 4(m-1)(\dot\sigma - \sigma)\phi^2\sigma^{-2}\dot y\dot\sigma$$

równa się iloczynowi $-\phi\dot y$ i lewej strony wzoru (31), gdyż (26.a) daje $4(\dot\sigma - \sigma)\sigma^{-2}\dot\sigma = (2\dot\sigma\sigma^{-1})^2 - 2(2\dot\sigma\sigma^{-1}) = (\dot x - \dot y + 1)(\dot x - \dot y - 1)$. Układ (30)–(31) z $\ddot\sigma = \dot\sigma$ pociąga więc za sobą (33.a) (tj. znikanie η) oraz

$$(\dot\sigma - \sigma)\phi\dot y\dot\sigma = 0. \tag{34}$$

Na mocy (33.a) i (30.b), $(m\dot x\dot y - \dot y^2)\phi = \dot\phi\dot y + ye^{y-x} = [(m-1)\dot x\dot y - \ddot y]\phi$, zaś, z (30.c), $\phi \neq 0$ na gęstym podzbiorze dziedziny. Stąd mamy (33.b).

Z drugiej strony, jeśli $\ddot{\sigma} = \dot{\sigma}$, to $\dot{\sigma} = q_1 e^t$ oraz $\sigma = q_0 + q_1 e^t$ ze stałymi q_0, q_1, które nie mogą być obie niedodatnie, bo, na mocy (22.a), $\sigma > 0$. Przy założeniach lematu, równość (34) (wraz z analitycznością rozwiązania (x, y, ϕ) układu (30) na każdej składowej spójnej gęstego podzbioru dziedziny, na którym $\phi \neq 0$) prowadzi do czterech możliwych przypadków: $\phi = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{\sigma} = 0$ i $\dot{\sigma} = \sigma$. Pierwszy jest wykluczony przez (30.c); drugi, z powodu równości (30.b), jest równoważny warunkowi $y = 0$; trzeci przypadek daje (b); czwarty – (c).

W przypadku (30)–(32) zachowanie warunku (a) przy podstawieniu $T - t$ za t jest oczywiste. Na mocy (22.a) podstawienie to powoduje zastąpienie σ przez funkcję $t \mapsto e^{t-T/2}\sigma(T - t)$, co kończy dowód. □

22. Przypadek (a) w lemacie 21.1

Rozważmy przypadek, gdy $y = 0$ w lemacie 21.1. Na mocy (22.b), oznacza to znikanie znormalizowanej funkcji solitonowej f w twierdzeniu 20.1 (a ściślej – w jego lokalnej wersji, wspomnianej w § 20). Powstające tu metryki $\overline{g}$ są więc einsteinowskie (patrz § 7).

Opiszemy teraz rozwiązania (x, y, ϕ) układu złożonego z (30)–(31) i równania $y = 0$ na dowolnym przedziale otwartym; translacja zmiennej t (patrz § 21) pozwala nam założyć, że przedział ten zawiera 0.

Twierdzenie 22.1. *Dla takiego rozwiązania* (x, y, ϕ) *układu* (30)–(31), *że* $y = 0$, *na przedziale otwartym zawierającym* 0, *dane początkowe*

$$(x_0, y_0, \phi_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\phi}_0) = (x(0), y(0), \phi(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{\phi}(0)) \qquad (35)$$

spełniają warunki

$$y_0 = \dot{y}_0 = 0, \quad 2\dot{x}_0\dot{\phi}_0 = [(2m-1)\dot{x}_0^2 + 1]\phi_0 + 2e^{-x_0} - 2m. \qquad (36)$$

Na odwrót, każdy wybór danych (35) *spełniających* (36) *jest zrealizowany przez dokładnie jedno rozwiązanie* (x, y, ϕ) *układu* (30)–(31) *z* $y = 0$, *określone na maksymalnym przedziale zawierającym* 0. *Mamy wtedy*

$$x = x_0 + 2\log|\Theta|, \quad \text{gdzie } \Theta = \cosh(t/2) + \dot{x}_0 \sinh(t/2), \qquad (37)$$

oraz $y = 0$, *zaś* ϕ *jest jedynym rozwiązaniem równania liniowego*

$$2\dot{x}\dot{\phi} = [(2m-1)\dot{x}^2 + 1]\phi + 2e^{-x} - 2m \qquad (38)$$

pierwszego rzędu z warunkami początkowymi $\phi(0) = \phi_0$, $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$.

Równanie liniowe (38) *ma oczywisty czynnik całkujący, co pozwala nam je przepisać, dla* t *z* $\Theta(t)\dot{\Theta}(t) \neq 0$, *jako* $(G\phi)^{\cdot} = F$, *gdzie*

$$G = 2(\Theta^{2m-1}\dot{\Theta})^{-1}, \quad F = (\Theta^m\dot{\Theta})^{-2}(e^{-x_0} - m\Theta^2). \qquad (39)$$

Dowód. Nasz układ składa się z (30), (31) i warunku $y = 0$ (z których równość $\ddot{\sigma} = \dot{\sigma}$ wynika na mocy (30.a) i (26.b)). Inaczej mówiąc, mamy dwie funkcje niewiadome, x i ϕ, na które nałożone są tylko dwa równania: $2\ddot{x} = 1 - \dot{x}^2$ oraz (38); zauważmy, że równość (30.c) jest ich konsekwencją. Istnienie i jedyność rozwiązania ϕ dla równania (38) ze wspomnianymi warunkami początkowymi są przy tym oczywiste; jest tak nawet w przypadku osobliwym, tzn. gdy $\dot{x}_0 = 0$, co łatwo sprawdzić używając czynnika całkującego $[\cosh(t/2)]^{-2m}\,\mathrm{ctgh}(t/2)$. $\square$

23. Przykłady Page'a i Bérard Bergery'ego

Ustaliwszy $m, k \in \mathbb{Z}$ o własności $m > k > 0$ i $a \in (-1, 0)$, zdefiniujmy dane (35) spełniające (36) kładąc $x_0 = -\log(ka+m)$, $y_0 = \phi_0 = \dot{y}_0 = 0$, $\dot{x}_0 = a$, $\dot{\phi}_0 = k$, a także funkcje Θ, G, F i stałą dodatnią T poprzez (37), (39) i $T = 2\log[(1-a)/(1+a)]$. Zatem

$$\begin{aligned} &\text{a)} && 2\Theta(t) = (1+a)e^{t/2} + (1-a)e^{-t/2} > 0, \\ &\text{b)} && 4\dot{\Theta}(t) = (1+a)e^{t/2} - (1-a)e^{-t/2}, \\ &\text{c)} && \Theta^2 - 4\dot{\Theta}^2 = 1 - a^2 > 0, \quad 4\ddot{\Theta} = \Theta > 0, \\ &\text{d)} && F = [ka + m - m\Theta^2](\Theta^m\dot{\Theta})^{-2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Dla wielomianu S dwóch zmiennych a, ξ określonego wzorem

$$S(a,\xi) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j \xi^{2j}}{2j-1}\left[\binom{m-1}{j}(ma+k)a + \binom{m-1}{j-1}(ka+m)\right],$$

przy czym $\binom{m-1}{j} = 0$, gdy $j < 0$ lub $j \geqslant m$, wyrażenie $P(a) = a^{-1}S(a,a)$ jest wielomianem jednej zmiennej a, dla którego

$$\begin{aligned} &P(0) = -k < 0, \\ &P(-k/m) = (1-k/m)(1+m/k)\int_0^{k/m}(1-a^2)^{m-1}\mathrm{d}a > 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Pierwsza równość jest tu oczywista z definicji P, zaś postulowane w (41) wyrażenie dla $P(-k/m)$ natychmiast wynika ze wzoru na $S(a,\xi)$, jeśli tylko użyjemy rozwinięcia dwumianowego funkcji podcałkowej oraz faktu, że czynnik $ma + k$ występujący w $S(a,\xi)$ znika dla $a = -k/m$.

Na mocy (41) możemy teraz wybrać i ustalić takie $a \in (-k/m, 0)$, że $P(a) = 0$, tzn. $S(a,a) = 0$. Ponieważ $S(a,\xi)$ jest parzystą funkcją zmiennej ξ, mamy również $S(a,-a) = 0$.

Zastąpmy $t \in [0,\infty)$ nową zmienną $\xi = 2\dot{\Theta}(t)/\Theta(t) \in [a,1)$. Z (40.a), (40.c) i (40.a–b) wynika, odpowiednio, że ma to sens oraz że $|\xi| < 1$ i $2\dot{\xi} = 1 - \xi^2 > 0$, zaś $\xi \to 1$, gdy $t \to \infty$. Tak więc $t \mapsto \xi$ jest rzeczywiście dyfeomorfizmem przedziału $[0,\infty)$ na $[a,1)$, który – jak łatwo sprawdzić przez ponowne użycie (40.a–b) – przekształca $t = 0$ i $t = T$, dla naszej stałej dodatniej $T = 2\log[(1-a)/(1+a)]$, na $\xi = a$ i, odpowiednio, $\xi = -a$. Pierwsza równość w (40.c) daje $\xi^2 = 1 + (a^2-1)\Theta^{-2}$, tzn. $\Theta^2 = (1-a^2)/(1-\xi^2)$, jak również $4\dot\Theta^2 = (1-a^2)\xi^2/(1-\xi^2)$ (ponieważ $4\dot\Theta^2/\Theta^2 = \xi^2$). Wyrażając G i F poprzez ξ, dostajemy ze wzorów (39)

$$G = \frac{4(1-\xi^2)^m}{(1-a^2)^m\xi}, \tag{42}$$

gdyż $\Theta^{2m-1}\dot\Theta = \Theta^{2m}\dot\Theta/\Theta = (\Theta^2)^m\xi/2$ oraz, na mocy (40.d),

$$F = 4(1-a^2)^{-m-1}[(ma+k)a\xi^{-2} - (ka+m)](1-\xi^2)^m. \tag{43}$$

Powyższy wzór na $S(a,\xi)$ i (43) łatwo pokazują, że

$$4(1-\xi^2)\,\mathrm{d}\big[S(a,\xi)/\xi\big]/\mathrm{d}\xi = (1-a^2)^{m+1}F. \tag{44}$$

Relacja $F = (G\phi)^{\dot{}}$ w twierdzeniu 22.1 oznacza, że $2F$ równa się wyrażeniu $(1-\xi^2)\,\mathrm{d}(G\phi)/\mathrm{d}\xi$. Spełnia ją zatem ϕ dane przez

$$(1-a^2)(1-\xi^2)\phi = 2S(a,\xi). \tag{45}$$

Nasz wybór a powoduje więc, że ta funkcja ϕ zmiennej ξ znika dla $\xi = \pm a$. Inaczej mówiąc, dla ϕ traktowanej jako funkcja zmiennej t i dla $T = 2\log\big[(1-a)/(1+a)\big]$ mamy $\phi(0) = \phi(T) = 0$.

Pokażemy teraz, że ϕ dane wzorem (45) spełnia też pozostałe warunki brzegowe (32). Wzór na $S(a,\xi)$ i (42)–(43) dają mianowicie

$$(1-a^2)^{m+1}(1-\xi^2)^{-m}\xi^2(F \pm kG) = -4(\xi \pm a)\big[(ka+m)\xi \mp (ma+k)\big],$$

skąd $F/G = \pm k$, gdy $\xi = \pm a$. Przechodząc do zmiennej t, dostajemy $F(0)/G(0) = k$ i $F(T)/G(T) = -k$. Równości $\phi(0) = \phi(T) = 0$ i $F = (G\phi)^{\dot{}}$ pokazują więc, że $\dot\phi(0) = k$ i $\dot\phi(T) = -k$.

Dodatniość ϕ na $(0,T)$ sprowadza się teraz do niezerowości ϕ dla wszystkich $\xi \in (a,-a)$. Gdyby jednak ϕ znikało dla pewnego $\xi \in (a,-a)$, to (45) – po pierwsze – dałoby nam $\xi \neq 0$ (bo z definicji $S(a,\xi)$ i nierówności $-k/m < a < 0$ dostajemy $S(a,0) = -(ma+k)a > 0$) i – po drugie – pozwoliłoby nam założyć, że $\xi \in (a,0)$ (bo $S(a,\xi)$ jest parzystą funkcją zmiennej ξ). Znikanie ϕ – a więc i $S(a,\xi)/\xi$ – dla tej wartości ξ, jak również dla $\xi = a$, pociągałoby za sobą znikanie pochodnej $\mathrm{d}\big[S(a,\xi)/\xi\big]/\mathrm{d}\xi$ gdzieś w $[a,0)$, co w połączeniu z (44) prowadzi do sprzeczności: (43) daje $F < 0$, gdy $a \in (-k/m,0)$ i $0 < |\xi| < 1$.

Z twierdzenia 20.1 wynika teraz, że rozwiązanie (x,y,ϕ) układu (30)–(31), odpowiadające opisanym wyżej danym (35), dla naszego $a \in (-k/m,0)$, pozwala nam skonstruować soliton Kählera–Ricciego na każdej ze zwartych rozmaitości zespolonych M_k^m. W ten sposób powstają *przykłady Page'a* (dla $m = 2$) *i Bérard Bergery'ego* (z $m > 2$).

Inne opisy tych samych konstrukcji można też znaleźć u Besse'a w [5, str. 273–275] oraz – oczywiście – w oryginalnych pracach [4, 28].

24. Przypadek (b) w lemacie 21.1

Stałość σ w lemacie 21.1 pociąga za sobą kählerowskość metryki $\overline{g} = g/\sigma^2$, gdyż – w lokalnej wersji twierdzenia 20.1 – powstaje ona przez *trywialną* zmianę konforemną metryki Kählera g.

W następującym opisie rozwiązań (x, y, ϕ) układu (30)–(31) ze stałą funkcją σ zakładamy, bez zmniejszenia ogólności (por. § 25), że dziedzina rozwiązania zawiera 0.

Twierdzenie 24.1. *Jeśli* (x, y, ϕ) *jest takim rozwiązaniem układu* (30)–(31) *określonym na przedziale otwartym zawierającym* 0, *że funkcja* σ *jest stała, to dla danych początkowych* (35) *muszą zachodzić warunki*

$$\begin{aligned} &\dot{y}_0 - \dot{x}_0 = 1, \quad (1 - me^{x_0 - y_0})\dot{y}_0 = y_0, \\ &\dot{\phi}_0 = [(m-1)\dot{y}_0 - m]\phi_0 + m - e^{y_0 - x_0}. \end{aligned} \tag{46}$$

Na odwrót, dowolne dane (35) *spełniające* (46) *są zrealizowane przez dokładnie jedno rozwiązanie* (x, y, ϕ) *układu* (30)–(31) *ze stałą funkcją* σ, *określone na całej prostej.* Explicite,

$$x = x_0 - t + \dot{y}_0(e^t - 1), \quad y = y_0 + \dot{y}_0(e^t - 1), \tag{47}$$

zaś ϕ *jest jedynym rozwiązaniem równania liniowego*

$$\dot{\phi} = [(m-1)\dot{y}_0 e^t - m]\phi + m - e^{y_0 - x_0 + t} \tag{48}$$

pierwszego rzędu z warunkami początkowymi $\phi(0) = \phi_0$, $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$.

Równanie (48) *można też wyrazić jako* $(G\phi)^{\cdot} = F$, *gdzie*

$$G(t) = \exp[mt - (m-1)\dot{y}_0 e^t], \quad F(t) = (m - e^{y_0 - x_0 + t})G(t). \tag{49}$$

Dowód. Ze stałości σ i (26.a) wynika, że $\dot{y} - \dot{x} = 1$, a więc, na mocy (33.b), $\ddot{y} = \dot{y}$, co daje (47) i pierwszą równość w (46).

Żeby pokazać (48), rozważmy dwa możliwe przypadki. W pierwszym z nich $\dot{y}_0 = 0$. Z (47) dostajemy zatem stałość y i równość $x = x_0 - t$. Używając równania (30.b) widzimy, że $y = 0$. Konkluzja (38) w twierdzeniu 22.1 dla $x = x_0 - t$ dowodzi teraz (48) dla $y_0 = \dot{y}_0 = 0$.

W drugim przypadku $\dot{y}_0 \neq 0$. Dzieląc równość (30.b) przez $\dot{y} = \ddot{y} = \dot{y}_0 e^t \neq 0$, a potem zastępując $\dot{x}$ przez $\dot{y}_0 e^t - 1$, zaś ye^{y-x} przez wyrażenie $[y_0 + \dot{y}_0(e^t - 1)]e^{y_0 - x_0 + t}$, otrzymujemy

$$\dot{\phi} = [(m-1)\dot{y}_0 e^t - m]\phi - e^{y_0 - x_0}(e^t - 1 + y_0/\dot{y}_0). \tag{50}$$

Używając (50) i równania powstającego z (50) przez zróżniczkowanie, wyraźmy $\dot{\phi}$ i $\ddot{\phi}$ poprzez $x_0, y_0, \dot{y}_0$ i ϕ. Przy pomocy tych wyrażeń i równości $x = \dot{y}_0 e^t - 1$, przepiszmy teraz różnicę lewej i prawej strony równania (30.c), dostając zarówno drugą równość w (46), jak i (48). Widzimy przy okazji, że druga równość w (46) w połączeniu z (48) pociąga za sobą (50), a więc również (30.c). Trzecia równość w (46) jest z kolei oczywista z (48) dla $t = 0$.

Udowodniliśmy w ten sposób (46) i (48) oraz fakt, że wynika z nich (30.c). Podobnie wynikają z nich pozostałe równania układu (30)–(31). Konkretniej, (30.b) jest po prostu równością (50) – tj. (48) – pomnożoną przez $\dot{y} = \ddot{y} = \dot{y}_0 e^t \neq 0$, (30.a) jest oczywistą konsekwencją (47)–(48), zaś (31) łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. $\square$

25. Przykłady Koiso–Cao

Ustalmy $m, k \in \mathbb{Z}$ z $m > k > 0$ i zadajmy $S\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$S(a) = \int_0^Q [\tau^{m-1} + (k - m)\tau^m] e^{-a\tau} \mathrm{d}\tau, \quad \text{gdzie } Q = \tfrac{m+k}{m-k}. \tag{51}$$

Zachodzą wówczas – jak pokażemy niżej – nierówności

$$S(0) < 0 < S(a), \quad \text{jeśli} \quad a \geqslant m(m-k). \tag{52}$$

Możemy więc wybrać takie $a \in \big(0, m(m-k)\big)$, że $S(a) = 0$. Zdefiniujmy następnie dane (35) spełniające (46) przez $y_0 = (1 - m/k)a/(m-1)$, $x_0 = y_0 - \log(m - k)$, $\phi_0 = 0$, $\dot{y}_0 = a/(m-1)$, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 - 1$, oraz $\dot{\phi}_0 = k$. Dla rozwiązania $(x, y, \phi)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ układu (30)–(31) ze stałą funkcją σ, odpowiadającego tym danym w sensie twierdzenia 24.1, zachodzą również warunki brzegowe (32) z $T = \log[(m + k)/(m - k)]$. Rzeczywiście – po pierwsze, nasz wybór ϕ_0 i $\dot{\phi}_0$ daje nam $\phi(0) = 0$ i $\dot{\phi}(0) = k$. Po drugie, $\phi(T) = 0$ gdyż, na mocy twierdzenia 24.1, $G(T)\phi(T) = \int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t$, zaś wyrażając tę ostatnią całkę przy pomocy nowej zmiennej $\tau = e^t$ i używając równości $\dot{y}_0 = a/(m-1)$, (51), (49) oraz naszego wyboru a, dostajemy $\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t = S(a) = 0$. Po trzecie, ze związków $(G\phi)^{\dot{}} = F$ (w twierdzeniu 24.1), $\phi(T) = 0$ i (49) wynika, że $\dot{\phi}(T) = F(T)/G(T) = m - e^{y_0 - x_0 + T}$, a więc $\dot{\phi}(T) = -k$, ponieważ $e^{y_0 - x_0} = m - k$ i $e^T = (m + k)/(m - k)$. Po czwarte, pochodna funkcji $G\phi$, tj. funkcja F dana wzorem (49), ma tylko jedno zero w $\mathbb{R}$, przez co ϕ może mieć co najwyżej dwa zera; relacje $\phi(0) = \phi(T) = 0 < \dot{\phi}(0)$ pociągają za sobą zatem nierówność $\phi > 0$ na $(0, T)$.

Twierdzenie 20.1 stwierdza z kolei, że powyższe rozwiązanie (x, y, ϕ) prowadzi do konstrukcji solitonu Kählera–Ricciego na każdej ze zwartych rozmaitości zespolonych M_k^m. To są właśnie *przykłady Koiso–Cao*.

Dowód nierówności (52). Dla $m, k, a, Q \in \mathbb{R}$ spełniających warunki $m \geqslant 1$ i $Q \in (0, \infty)$, definiując $S(a)$ przez (51) (nawet bez żądania, by $Q = (m+k)/(m-k)$), mamy $S(a) = H_{m-1} + (k-m)H_m$, gdzie $H_m = \int_0^Q \tau^m e^{-a\tau} \mathrm{d}\tau$ dla $m \geqslant 0$. Jeśli $m \geqslant 1$, całkując przez części dostajemy $mH_{m-1} = aH_m + Q^m e^{-aQ}$, skąd $mS(a) = [a - m(m-k)]H_m + Q^m e^{-aQ}$. Dodatniość H_m daje więc $S(a) > 0$ dla $a \geqslant m(m-k)$. Z drugiej strony, $H_m = Q^{m+1}/(m+1)$, jeśli $a = 0$ i $m \geqslant 1$. Nasz wzór na $mS(a)$ stwierdza zatem, że $m(m+1)Q^{-m}S(0) = -m(m-k)Q + m + 1$. Przy $Q = (m+k)/(m-k)$ i $m > k \geqslant 1$ wynika stąd, że $S(0) < 0$. □

26. Przypadek (c) w lemacie 21.1

Założenia lematu 17.1 pozostaną spełnione, jeśli piątkę m, k, T, x, ϕ zastąpimy przez $m, k, T, \hat{x}, \hat{\phi}$, gdzie $\hat{x}(t) = x(T-t)$ i $\hat{\phi}(t) = \phi(T-t)$. Wykonując konstrukcję opisaną w dowodzie lematu 17.1 dla $m, k, T, \hat{x}, \hat{\phi}$, przy użyciu tych samych obiektów $N, h, \mathcal{E}, M$ oraz tej samej co poprzednio normy włóknistej i koneksji hermitowskiej w $\mathcal{E}$, dostajemy pewną nową metrykę $\hat{g}$ i funkcję $\hat{t} \colon M \to \mathbb{R}$, którą musimy oznaczyć symbolem innym niż t, bo różni się ona na ogół od funkcji $t \colon M \to \mathbb{R}$ pochodzącej od wyjściowych danych m, k, T, x, ϕ. Aby opisać związek między g i $\hat{g}$ oraz między t i $\hat{t}$, użyjmy dyfeomorfizmu $Z \colon M \to M$, którego obcięcie do $\mathcal{E} \setminus N$ działa w każdym włóknie jako standardowa inwersja, tzn. dzielenie dowolnego wektora niezerowego przez kwadrat jego normy. Oznaczając symbolami $Z^*\hat{g}$ i $Z^*\chi$ (przeciw)obraz metryki $\hat{g}$ przez Z i złożenie $\chi \circ Z$, dla dowolnej funkcji χ na $\mathcal{E} \setminus N$, mamy wówczas

$$\text{a) } Z^*r = 1/r, \quad \text{b) } Z^*\hat{t} = T - t, \quad \text{c) } Z^*\hat{g} = e^{T-2t}g, \tag{53}$$

gdzie, jak poprzednio, $r \colon \mathcal{E} \setminus N \to \mathbb{R}$ jest normą włóknistą.

Rzeczywiście, równość (53.a) jest trywialną konsekwencją definicji Z. Dla uzasadnienia (53.b) i (53.c), zauważmy, że (20) zachodzi również po zastąpieniu $\phi(t)$ przez $\hat{\phi}(t) = \phi(T-t)$ oraz $t(r)$ przez $\hat{t}(r) = T - t(1/r)$. Ten wybór $\hat{t} \colon M \to \mathbb{R}$ łatwo daje (53.b). Metryka $\hat{g}$ jest zaś opisana zmodyfikowaną wersją wzorów definiujących g w dowodzie lematu 17.1; modyfikacja polega na użyciu $e^{\hat{t}(r)}$ i $\hat{\phi}(\hat{t}(r)) = \phi(t(1/r))$ zamiast e^t i ϕ (tj. zamiast $e^{t(r)}$ i $\phi(t(r))$), skąd dostajemy (53.c).

Relacja (53.c) stwierdza, że Z jest izometrią między rozmaitościami Riemanna $(M, e^{T-2t}g)$ i $(M, \hat{g})$. Tak więc $\hat{g}$ jest izometryczna z metryką otrzymaną przez konkretną zmianę konforemną metryki g.

Jeśli na dodatek wyjściowe dane m, k, T, x, ϕ pochodzą od rozwiązania (x, y, ϕ) układu (30)–(32), funkcja $\sigma \colon M \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana przez (22.a), a $\hat{\sigma}$ oznacza jej odpowiednik dla nowego rozwiązania $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\phi})$ otrzymanego przez podstawienie $T - t$ za zmienną t, to

$$\text{a) } Z^*\hat{\sigma} = e^{-t+T/2}\sigma, \quad \text{b) } Z^*(\hat{g}/\hat{\sigma}^2) = g/\sigma^2. \tag{54}$$

Pierwsza równość jest tu oczywista (co wynika z (22.a) i (53.b)), druga jest konsekwencją pierwszej w połączeniu z (53.c) i multyplikatywnością operacji Z^* względem mnożenia funkcji przez pola tensorowe.

Na mocy (54.b), twierdzenie 20.1 zastosowane do tych rozwiązań (x, y, ϕ) i $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\phi})$ daje zwarte solitony Ricciego $(M, g/\sigma^2)$ i $(M, \hat{g}/\hat{\sigma}^2)$, które są ze sobą izometryczne.

Jeśli (x, y, ϕ) reprezentuje przy tym przypadek (c) w lemacie 21.1, to – zgodnie z końcową klauzulą lematu 21.1 – rozwiązanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\phi})$ reprezentuje przypadek (b), tzn. rozmaitość $(M, \hat{g}/\hat{\sigma}^2)$ jest izometryczna z jednym z przykładów Koiso–Cao. To samo jest więc prawdą dla $(M, g/\sigma^2)$. Otrzymaliśmy w ten sposób dowód wyniku Maschlera [27].

Ponieważ standardowa inwersja płaszczyzny nie jest odwzorowaniem holomorficznym (jest za to antyholomorficzna), Z przekształca wyjściową strukturę zespoloną na inną, która jest jej holomorficznie równoważna.

Bibliografia

[1] T. Aubin, *Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes*, Bull. Sci. Math. 102 (1978), nr 1, 63–95.

[2] S. Bando, T. Mabuchi, *Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., t. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, 11–40.

[3] A. Barros, E. Ribeiro, *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), nr 3, 1033–1040.

[4] L. Bérard Bergery, *Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein*, Inst. Élie Cartan, t. 6, Univ. Nancy, Nancy, 1982, 1–60.

[5] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, t. 10, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[6] J. P. Bourguignon, *L'espace des métriques riemanniennes d'une variété compacte*, Thèse d'Etat, Université Paris VII (1974).

[7] E. Calabi, *On Kähler manifolds with vanishing canonical class*, Algebraic geometry and topology, a symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957, 78–89.

[8] H.-D. Cao, *Existence of gradient Kähler–Ricci solitons*, Elliptic and parabolic methods in geometry (Minneapolis, MN, 1994), A. K. Peters, Wellesley, MA, 1996, 1–16.

[9] H.-D. Cao, *Recent progress on Ricci solitons*, Recent advances in geometric analysis, Adv. Lect. Math. (ALM), t. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2010, 1–38.

[10] B. Chow, *Ricci flow and Einstein metrics in low dimensions*, Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, Surv. Differ. Geom., VI, Int. Press, Boston, MA, 1999, 187–220.

[11] A. Dancer, M. Wang, *On Ricci solitons of cohomogeneity one*, Ann. Global Anal. Geom. 39 (2011), nr 3, 259–292.

[12] A. Derdziński, G. Maschler, *Local classification of conformally-Einstein Kähler metrics in higher dimensions*, Proc. London Math. Soc. 87 (2003), nr 3, 779–819.

[13] A. Derdziński, G. Maschler, *Special Kähler–Ricci potentials on compact Kähler manifolds*, J. Reine Angew. Math. 593 (2006), 73–116.

[14] F. J. E. Dillen, L. C. A. Verstraelen (red.), *Handbook of differential geometry.*, t. I, North-Holland, Amsterdam 2000.

[15] P. Federbush, *Partially alternate derivation of a result of Nelson*, J. Mathematical Phys. 10 (1969), nr 1, 50–52.

[16] M. Feldman, T. Ilmanen, D. Knopf, *Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient Kähler–Ricci solitons*, J. Differential Geom. 65 (2003), nr 2, 169–209.

[17] M. Fernández-López, E. García-Río, *A remark on compact Ricci solitons*, Math. Ann. 340 (2008), nr 4, 893–896.

[18] D. H. Friedan, *Nonlinear models in $2+\varepsilon$ dimensions*, Ann. Physics 163 (1985), nr 2, 318–419.

[19] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), nr 4, 1061–1083.

[20] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. 17 (1982), nr 2, 255–306.

[21] R. S. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., t. 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 237–262.

[22] T. Ivey, *Ricci solitons on compact three-manifolds*, Differential Geom. Appl. 3 (1993), nr 4, 301–307.

[23] S. Kobayashi, T. Ochiai, *Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), nr 1, 31–47.

[24] N. Koiso, *On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics*, Recent topics in differential and analytic geometry, Adv. Stud. Pure Math., t. 18, Academic Press, Boston, MA, 1990, 327–337.

[25] C. Li, *On rotationally symmetric Kähler–Ricci solitons*, preprint arXiv:1004.4049 (2010).

[26] X.-M. Li, *On extensions of Myers' theorem*, Bull. London Math. Soc. 27 (1995), nr 4, 392–396.

[27] G. Maschler, *Special Kähler–Ricci potentials and Ricci solitons*, Ann. Global Anal. Geom. 34 (2008), nr 4, 367–380.

[28] D. N. Page, *A compact rotating gravitational instanton*, Phys. Lett. B 79 (1978), nr 3, 235–238.

[29] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint, arXiv:math.DG/0211159.

[30] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, arXiv:math.DG/0303109.

[31] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, arXiv:math.DG/0307245.

[32] S. Pigola, M. Rigoli, M. Rimoldi, A. G. Setti, *Ricci almost solitons*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10 (2011), nr 4, 757–799.

[33] O. S. Rothaus, *Logarithmic Sobolev inequalities and the spectrum of Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. 42 (1981), nr 1, 110–120.

[34] G. Tian, informacja przekazana ustnie (2005).

[35] G. Tian, X. Zhu, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler–Ricci solitons*, Comment. Math. Helv. 77 (2002), nr 2, 297–325.

[36] X.-J. Wang, X. Zhu, *Kähler–Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class*, Adv. Math. 188 (2004), nr 1, 87–103.

[37] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), nr 3, 339–411.

[38] Z. Zhang, *On the finiteness of the fundamental group of a compact shrinking Ricci soliton*, Colloq. Math. 107 (2007), nr 2, 297–299.

Andrzej Derdziński
The Ohio State University
`andrzej@math.ohio-state.edu`