Wiad. Mat. 52 (2) 2016, 299–313

Andrzej Derdziński (Columbus, Ohio, USA)

O dorobku naukowym Witolda Rotera

1. Działalność badawcza Witolda Rotera

Witold Roter urodził się 20 września 1932 roku w Zabrzu-Pawłowie i zmarł 19 czerwca 2015 roku we Wrocławiu. Był on autorem bądź współautorem czterdziestu prac naukowych z geometrii różniczkowej, opublikowanych w latach 1961–2010. Był również promotorem dziewięciu doktorantów, wymienionych tu w kolejności chronologiczej, wraz z datą uzyskania stopnia doktora: Czesław Konopka (1972), Edward Głodek (1973), Andrzej Gębarowski (1975), Andrzej Derdziński (1976), Zbigniew Olszak (1978), Ryszard Deszcz (1980), Marian Hotloś (1980), Wiesław Grycak (1984) i Marek Lewkowicz (1989). Ponadto prowadził przez wiele lat wrocławskie seminarium z geometrii różniczkowej, którego założycielem był Władysław Ślebodziński.

Poniższy zarys wyników zawartych w wybranych pracach Witolda Rotera podzielony jest na cztery części, z których każda dotyczy osobnego tematu. Prezentacja jest z oczywistych względów niechronologiczna – Witold Roter niejednokrotnie powracał do danej tematyki po dłuższej przerwie. Niektóre wyniki są ponadto omówione bardziej szczegółowo od pozostałych – użytym tu kryterium była możliwość stosunkowo zwięzłego naszkicowania ich dowodów.

Niniejszy tekst, poświęcony wyłącznie dorobkowi naukowemu Witolda Rotera, nie zawiera informacji biograficznych o nim; można je znaleźć w artykule Zbigniewa Olszaka [46].

Ryszard Deszcz i Zbigniew Olszak przyczynili się przez swoje uwagi i komentarze do znacznego ulepszenia niniejszego tekstu, za co autor im wyraża serdeczne podziękowanie.

2. Równoległość tensora Weyla w przypadku riemannowskim

Tensor krzywizny R danej n-wymiarowej rozmaitości pseudoriemannowskiej (M, g) posiada naturalny rozkład $R = S + E + W$ na sumę swoich tzw. składowych niezmienniczych [41, str. 47]. Pierwsze dwie z nich odpowiadają krzywiźnie skalarnej i tensorowi Einsteina (części bezśladowej tensora Ricciego). Trzecią składową niezmienniczą jest *tensor Weyla W*, nazywany również *tensorem krzywizny konforemnej*, który staje się interesujący dopiero począwszy od wymiaru cztery, gdyż – z przyczyn algebraicznych – dla mniejszych wymiarów zawsze mamy $W = 0$.

Traktowany jak pole tensorowe typu $(1, 3)$ – w tym sensie, że działa trójliniowo na trzech polach wektorowych przypisując im nowe pole wektorowe – tensor Weyla W jest *niezmiennikiem konforemnym*: W pozostaje ten sam nawet po zastąpieniu metryki g iloczynem ϕg, gdzie ϕ jest dowolną gładką funkcją dodatnią. Tak więc $W = 0$, jeśli metryka jest konforemnie płaska (co oznacza, że ma lokalnie postać ϕg dla płaskich metryk g). Na odwrót, w wymiarach większych niż trzy, warunek $W = 0$ jest również dostateczny dla konforemnej płaskości, co pokazał Jan Arnoldus Schouten [47] jeszcze w 1921 roku.

We wczesnych latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku zaczęto interesować się rozmaitościami pseudoriemannowskimi o wymiarach nie mniejszych niż cztery, których tensor Weyla jest równoległy [42], tzn. niezmienniczy względem przeniesień równoległych (czyli spełnia równość $\nabla W = 0$, gdzie ∇ oznacza koneksję Levi-Civity). Przykładami są tu zarówno metryki konforemnie płaskie ($W = 0$), jak i lokalnie symetryczne ($\nabla R = 0$). Większość autorów zajmujących się tą klasą nazywała je rozmaitościami, bądź metrykami, *konforemnie symetrycznymi*. Termin ten może być jednak źródłem nieporozumień, gdyż występuje w literaturze także w odniesieniu do pewnych innych klas metryk; dlatego więc – podobnie jak w pracy [37] – zamiast „symetrii konforemnej" będziemy tu po prostu mówić o *równoległości tensora Weyla*, używając jednocześnie akronimu „ECS" (skrótu wyrażenia *essentially conformally symmetric*) dla tych metryk o własności $\nabla W = 0$, które nie są ani konforemnie płaskie, ani lokalnie symetryczne.

Żądanie równoległości tensora Weyla W jest jednym z najbardziej naturalnych warunków, które można nałożyć na tensor krzywizny R danej rozmaitości pseudoriemannowskiej. Dla porównania, równoległość składowej niezmienniczej S we wspomnianym wyżej rozkładzie $R = S + E + W$ oznacza stałość krzywizny skalarnej. Równość $\nabla E = 0$ jest równoważna, dla wymiarów większych niż dwa, warunkowi równoległości tensora Ricciego (charakteryzującemu, w przypadku riemannowskim, metryki Einsteina i ich iloczyny kartezjańskie). Równoległość wszystkich składowych niezmienniczych, tzn. samego tensora krzywizny R, charakteryzuje z kolei metryki lokalnie symetryczne.

Wracając do metryk ECS, napotykamy od razu dwa oczywiste związane z nimi pytania – czy one w ogóle istnieją oraz czy są wśród nich metryki riemannowskie (dodatnio określone)? Witold Roter rozstrzygnął obie te kwestie: pierwszą pozytywnie w 1973 roku, drugą negatywnie w 1976 roku. Pierwszy z tych rezultatów [14, wniosek 3] omówimy w paragrafie 3; drugi [19, twierdzenie 2] można sformułować następująco.

Twierdzenie 2.1. *Dla rozmaitości Riemanna dowolnego wymiaru większego niż trzy równoległość tensora Weyla jest możliwa tylko w sytuacji trywialnej, tzn. gdy metryka jest konforemnie płaska lub lokalnie symetryczna.*

Inaczej mówiąc, metryka ECS nie jest nigdy dodatnio określona.

Zarys dowodu tego ważnego wyniku warto poprzedzić komentarzem historycznym, dotyczącym zarówno pierwszeństwa Witolda Rotera, jak i jego wyłącznego wkładu w udowodnienie twierdzenia 2.1.

W pracy [17], przedstawionej 30 września 1975 roku, Witold Roter dowiódł słabszej wersji twierdzenia 2.1 (przy założeniu, że wymiar jest większy niż cztery). Tę samą słabszą wersję niezależnie uzyskał Teturo Miyazawa [44], którego praca została jednak złożona do czasopisma prawie o rok później – 12 września 1976 roku.

Dowód Witolda Rotera dla ogólniejszego przypadku wymiaru większego niż trzy został opublikowany w pracy [19], wspólnej z autorem niniejszego artykułu. Wkład tego ostatniego dotyczył jednak tylko metryk lorentzowskich [19, str. 258–259] i nie miał nic wspólnego z twierdzeniem 2.1.

W paragrafie 3 opiszemy – otrzymaną dużo później (w 2007 roku) – lokalną klasyfikację metryk ECS. Twierdzenie 2.1 stanowi oczywiście konsekwencję tej klasyfikacji. Mimo to warto przedstawić tu jego bezpośredni dowód, zarówno ze względów historycznych, jak i w związku z faktem, że jest on dużo prostszy niż dowód twierdzenia klasyfikacyjnego.

Przechodząc do dowodu twierdzenia 2.1, wspomnijmy najpierw tożsamość Ricciego, która stwierdza, że dla dowolnego gładkiego pola tensorowego H na rozmaitości z ustaloną koneksją beztorsyjną ∇, podwojone uskośnienie drugiej pochodnej kowariantnej H równe jest pewnemu konkretnemu wyrażeniu $R \cdot H$, które zależy punktowo (tzn. nieróżniczkowo) i dwuliniowo od H i tensora krzywizny R koneksji ∇. Tak więc $R \cdot H = 0$, jeśli $\nabla H = 0$.

W przypadku, gdy ∇ jest koneksją Levi-Civity metryki pseudoriemannowskiej g o równoległym tensorze Weyla W, ta ostatnia obserwacja daje równość $R \cdot W = 0$. Jeśli na dodatek g ma stałą krzywiznę skalarną, a v, v', v'' są dowolnymi polami wektorowymi, to zachodzą równości (zob. [19, wzory (10–13) i (17–18) odpowiednio]):

$$[\nabla_v R] \cdot W = 0, \tag{1}$$

$$\nabla R = \nabla(S + E) = \nabla E, \tag{2}$$

$$(g \wedge \nabla_v \rho) \cdot W = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{ctr}[(g \wedge \nabla_v \rho) \cdot W] = 0, \tag{4}$$

$$\nabla(W\rho) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla_u \rho = 0 \quad \text{dla } u = W(v, v')v''. \tag{6}$$

Relacje (1–2) wynikają z faktu, że $\nabla W = 0$ (a zatem $R \cdot W = 0$), natomiast tensor S w rozkładzie $R = S + E + W$ jest równoległy z powodu założenia o stałości krzywizny skalarnej. Równość (3) powstaje z relacji (1) przez zastąpienie tensora ∇R wyrażeniem pochodzącym z formuły (2), wypisanym w jawnej formie, używającej tensora Ricciego ρ i operacji dwuliniowej $\wedge$ nazywanej iloczynem Kulkarniego–Nomizu [41, str. 47], zaś jako trywialną konsekwencję warunku (3) otrzymujemy równość (4), w której ctr oznacza jedyną interesującą w tym przypadku kontrakcję. We wzorze (5) symbol $W\rho$ odnosi się z kolei do działania $\tau \mapsto W\tau$ tensora W na symetryczych 2-tensorach kowariantnych, jednoznacznie scharakteryzowanego warunkiem $2W\tau = W(\cdot, \xi, \cdot, \xi)$, gdy $\tau = \xi \odot \xi$ dla 1-formy ξ.

Udowodnienie równości (5) jest bardziej skomplikowane – najpierw ponowną kontrakcją relacji (4) uzyskuje się pewien szczególny rodzaj symetrii 3-tensora $\nabla(W\rho)$, która dopiero w połączeniu z inną jeszcze symetrią $\nabla(W\rho)$, wynikającą z wcześniejszego wyniku Witolda Rotera [11, lemat 1], prowadzi do konkluzji (5). Ten sam wcześniejszy wynik [11, lemat 1], zastosowany do uproszczonej wersji równości (4), otrzymanej przez użycie formuły (5), daje nam teraz warunek (6).

Oznaczmy następnie przez $\rho \odot W$ pole tensorowe typu $(0, 6)$ – które działa sześcioliniowo na sześciu polach wektorowych, przypisując im funkcję o wartościach rzeczywistych – zdefiniowane przez

$$\begin{aligned}
&[\rho \odot W](u, v, u', v', u'', v'') = \\
&\qquad \rho(u, u')W(v, v', u'', v'') + \rho(u, v')W(v, u', v'', u'') \\
&\qquad\qquad + \rho(u, u'')W(v, v'', u', v') + \rho(u, v'')W(v, u'', v', u').
\end{aligned}$$

Kolejnym krokiem w dowodzie twierdzenia 2.1 jest równość [19, wzór (20)], stwierdzająca że przy tych samych założeniach, co we wzorach (1–6) – równoległości tensora Weyla i stałości krzywizny skalarnej – pochodna kowariantna tensora $\rho \odot W$ w kierunku dowolnego pola wektorowego jest symetryczna względem pierwszych dwóch pól wektorowych u, v występujących w powyższej definicji $\rho \odot W$, a $H \otimes W = 0$ dla pola tensorowego H typu $(0, 4)$, które jest wynikiem jednoargumentowego nasunięcia $\nabla\rho$ na siebie. Zauważmy tu, że wybór argumentu użytego w tym ostatnim nasunięciu nie robi żadnej różnicy, gdyż druga tożsamość Bianchiego daje w naszej sytuacji totalną symetrię $\nabla\rho$ (inaczej mówiąc, ρ jest tzw. tensorem Codazziego).

Pierwszy z powyższych wniosków otrzymuje się upraszczając równość (3) przy pomocy relacji (6); drugi wynika z pierwszego poprzez jednoargumentowe nasunięcie na $\nabla\rho$.

To kończy dowód twierdzenia 2.1, gdyż Shûkichi Tanno [49] wykazał, że każda metryka ECS ma stałą krzywiznę skalarną, a więc założenie dodatniej określoności danej metryki ECS prowadzi, poprzez otrzymaną wyżej równość $H \otimes W = 0$, do relacji $H = 0$. To jednak nie jest możliwe, gdyż podwójna kontrakcja dałaby wtedy $\nabla\rho = 0$, skąd by z kolei wynikało, że $\nabla R = 0$.

Dodajmy tu, że Witold Roter także udowodnił, wraz z autorem niniejszego tekstu, mocniejszą wersję [22, twierdzenie 7] wspomnianego wyżej wyniku Tanno [49]. Stwierdza ona, że krzywizna skalarna dowolnej metryki ECS musi być tożsamościowo równa zeru.

3. Lokalna klasyfikacja metryk ECS

Przez rozmaitości ECS rozumiemy tu – tak jak w paragrafie 2 – rozmaitości pseudoriemannowskie (M, g) wymiarów większych niż trzy, dla których wszędzie w M zachodzą relacje $\nabla W = 0$ i $W \neq 0$, w pewnym punkcie zaś $\nabla R \neq 0$. Mówimy wtedy też, że g jest metryką ECS.

Nieistnienie dodatnio lub ujemnie określonych metryk ECS jest konkluzją twierdzenia 2.1, udowodnionego w 1976 roku przez Witolda Rotera [19, twierdzenie 2], który również wykazał [14, wniosek 3], jeszcze w 1973 roku, że pseudoriemannowskie metryki ECS istnieją we wszystkich wymiarach większych niż trzy i reprezentują wszystkie nieokreślone sygnatury metryczne.

Ten ostatni wynik jest bezpośrednią konsekwencją przedstawionej poniżej konstrukcji metryk o równoległym tensorze Weyla [14, twierdzenie 3]. Była to pierwsza z dwóch takich konstrukcji odkrytych przez Witolda Rotera; opis drugiej z nich [36, twierdzenie 21.1], wspólnej z autorem, będzie poprzedzony parą definicji.

Obie konstrukcje stosują konwencję oznaczeniową, według której – jeśli rozmaitość M jest iloczynem kartezjańskim kilku innych rozmaitości („czynników") – to kowariantne pola tensorowe na tych czynnikach, w tym również funkcje, traktuje się – bez zmiany oznaczeń – jako pola tensorowe na M. Podany poniżej opis tych konstrukcji jest zapożyczony z artykułu [37, wzory (3.1), (4.2)].

Parametry pierwszej konstrukcji składają się z funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ klasy C^∞ określonej na przedziale otwartym $I \subset \mathbb{R}$, niezdegenerowanej symetrycznej formy dwuliniowej $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na rzeczywistej przestrzeni liniowej V wymiaru $n-2 \geqslant 2$ i bezśladowego operatora liniowego $A\colon V \to V$, który jest samosprzężony względem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (w sensie symetrii formy dwuliniowej $\langle A\cdot,\cdot\rangle$). Umówmy się, że t, s to współrzędne kartezjańskie na $\mathbb{R}^2$, iloczyny różniczek oznaczają ich iloczyny symetryczne, symbol κ funkcję $I\times\mathbb{R}\times V \to \mathbb{R}$ daną wzorem $\kappa(t,s,v) = f(t)\langle v,v\rangle + \langle Av,v\rangle$, a δ płaską „stałą" metrykę pseudoriemannowską na V odpowiadającą formie $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Rozmaitość pseudoriemannowska

$$(M,g) = (I\times\mathbb{R}\times V, \kappa\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}t\mathrm{d}s + \delta), \tag{7}$$

wymiaru n ma wówczas równoległy tensor Weyla. Jej konforemna płaskość (bądź lokalna symetria) jest przy tym równoważna warunkowi $A = 0$ (czy też, odpowiednio, stałości funkcji f).

Wybierając powyższe parametry w ten sposób, że

$$A \neq 0 \text{ i } f \text{ nie jest stała}, \tag{8}$$

dostajemy zatem przykład metryki ECS.

Przejdźmy do zapowiedzianych wyżej definicji. Koneksję na danej rozmaitości Q nazywamy *rzutowo płaską*, jeśli jest beztorsyjna i ma lokalnie te same niesparametryzowane geodezyjne, co pewne (istniejące lokalnie) koneksje płaskie. Przez *rozszerzenie riemannowskie* koneksji D na Q rozumie się metrykę pseudoriemannowską h^{D} na T^*Q zdefiniowaną przez żądanie, by wszystkie wektory D-horyzontalne były izotropowe, a $h^{\mathrm{D}}_x(\xi,w) = \xi(\mathrm{d}\pi_x w)$ dla każdego punktu $x \in T^*Q$, wektora $w \in T_xT^*Q$ i wektora wertykalnego $\xi \in \operatorname{Ker}\mathrm{d}\pi_x = T^*_{\pi(x)}Q$, gdzie $\pi\colon T^*Q \to Q$ jest projekcją wiązki kostycznej.

Parametry drugiej konstrukcji to powierzchnia Q z rzutowo płaską koneksją D, niezerowa 2-forma różniczkowa ζ na Q, równoległa względem D, niezdegenerowana symetryczna forma dwuliniowa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na rzeczywistej przestrzeni liniowej V wymiaru $n-4 \geqslant 0$, liczba $\varepsilon = \pm 1$, oraz dwukrotnie kontrawariantne symetryczne gładkie pole tensorowe ϕ na Q (czyli gładki przekrój wiązki $[TQ]^{\odot 2}$) spełniające, wraz z tensorem Ricciego ρ^{D} koneksji D równanie różniczkowe

$$\operatorname{div}^{\mathrm{D}}(\operatorname{div}^{\mathrm{D}}\phi) + (\rho^{\mathrm{D}},\phi) = \varepsilon \tag{9}$$

(we współrzędnych: $\phi^{jk}{}_{,jk} + R_{jk}\phi^{jk} = \varepsilon$). Izomorfizm $TQ \to T^*Q$, działający na polach wektorowych w poprzez odwzorowanie $w \mapsto \zeta(w,\cdot)$, indukuje w oczywisty sposób izomorfizm $[TQ]^{\odot 2} \to [T^*Q]^{\odot 2}$, którego możemy użyć dla utożsamienia ϕ z gładkim przekrojem τ wiązki $[T^*Q]^{\odot 2}$, tzn. z dwukrotnie *kowariantnym* symetrycznym gładkim polem tensorowym τ na Q. We współrzędnych, $\tau_{jk} = \zeta_{jl}\zeta_{km}\phi^{lm}$. Oznaczając przez δ płaską „stałą" metrykę pseudoriemannowską na V odpowiadającą formie $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a przez θ funkcję $V \to \mathbb{R}$ daną wzorem $\theta(v) = \langle v, v\rangle$, definiujemy teraz n-wymiarową rozmaitość pseudoriemannowską

$$(M,g) = (T^*Q \times V, h^{\mathrm{D}} - 2\tau + \delta - \theta\rho^{\mathrm{D}}) \tag{10}$$

o równoległym niezerowym tensorze Weyla, dla której warunek lokalnej symetrii zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy koneksja D ma równoległy tensor Ricciego ($\mathrm{D}\rho^{\mathrm{D}} = 0$). Wybierając D tak, aby

$$\mathrm{D}\rho^{\mathrm{D}} \neq 0 \text{ w pewnym punkcie powierzchni } Q, \tag{11}$$

otrzymujemy następną klasę przykładów metryk ECS.

Opisane tu dwie rodziny przykładów, (7–8) i (10–11), są rozłączne, gdyż różnią się wartością pewnego niezmiennika lokalnego – mianowicie wymiaru d dystrybucji Olszaka [37, twierdzenia 3.1, 4.1]. Dystrybucję tę zdefiniował i zbadał Zbigniew Olszak w pracy [45].

W odróżnieniu od konstrukcji (7), parametry konstrukcji (10) nie są „wolne" – od niektórych z nich (mianowicie D, ζ, ϕ) żądamy spełnienia konkretnych warunków różniczkowych. Ograniczenia nałożone przez te warunki są jednak od dawna całkowicie zrozumiane, por. [36, str. 573–574]. Ściślej mówiąc, Q jest – z dokładnością do lokalnych dyfeomorfizmów – powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ transwersalną do prostych radialnych (tzn. przechodzących przez 0), koneksja D jest wynikiem zrzutowania koneksji płaskiej rozmaitości $\mathbb{R}^3$ na składnik prosty TQ wiązki stycznej $\mathbb{R}^3$ obciętej do Q, przy czym składnik dopełniający tworzą proste radialne, a ζ w dowolnym punkcie $y \in Q$ jest otrzymana z 3-formy objętości Ω przestrzeni $\mathbb{R}^3$, jako obcięcie do TQ formy $\Omega(y,\cdot,\cdot)$. Nierówność (11) oznacza wtedy, że Q nie jest zawarta w powierzchni kwadrycznej [36, str. 576], zaś równanie (9) jest zawsze rozwiązalne lokalnie [36, twierdzenie 10.2(i), lemat 11.2].

Fakt, że omówione tu dwie rodziny przykładów, (7–8) i (10–11), rzeczywiście składają się z metryk ECS, może być oczywiście sprawdzony trywialnym rachunkiem. Przykłady te są jednak także *lokalnie uniwersalne*: Witold Roter udowodnił, wspólnie z autorem niniejszego tekstu, następujące twierdzenie klasyfikacyjne [36, twierdzenie 21.1; 39, twierdzenie 4.1].

Twierdzenie. *Każda rozmaitość ECS ma lokalnie postać* (7–8) *lub* (10–11)*, z parametrami o wymienionych wyżej własnościach.*

Wynik ten został uzyskany w latach 2006–2007. Znaczna jego część stanowi jednak wyłączny i dużo wcześniejszy wkład Witolda Rotera. Jeszcze w 1973 roku udowodnił on [14, twierdzenie 3], że w punktach *ogólnego położenia* – tych mianowicie, w których tensor Ricciego i jego pochodna kowariantna są niezerowe – rozmaitość ECS posiadająca dodatkową własność Ricci-rekurencyjności musi, lokalnie, z dokładnością do izometrii, pochodzić z konstrukcji (7–8).

Klasę metryk Ricci-rekurencyjnych, do której należą wszystkie przykłady typu (7–8), zdefiniujemy w paragrafie 5.

4. Rozmaitości zwarte o równoległym tensorze Weyla

Przypomnijmy, że metryki ECS to metryki pseudoriemannowskie, które mają równoległy tensor Weyla, ale nie są ani konforemnie płaskie, ani lokalnie symetryczne.

Pojawia się oczywiste pytanie, czy taka metryka może istnieć na rozmaitości *zwartej*. Witold Roter wykazał, wspólnie z autorem niniejszego tekstu, że odpowiedź jest pozytywna [40].

Twierdzenie 4.1. *W każdym takim wymiarze* $n \geqslant 5$*, że* $n \equiv 5 \pmod 3$*, istnieje zwarta rozmaitość ECS o dowolnej nieokreślonej sygnaturze metrycznej, dyfeomorficzna z nietrywialną wiązką torusów nad okręgiem.*

Zarys dowodu tego wyniku podany jest poniżej; zob. też [37, § 9]. Zauważmy tu, że – podobnie jak konforemna płaskość – równoległość tensora Weyla nie jest na ogół zachowywana przez operację iloczynu kartezjańskiego metryk pseudoriemannowskich; nie ma więc trywialnego sposobu powiększenia zbioru wymiarów, w których na pewno istnieją zwarte rozmaitości ECS. Problem istnienia takich rozmaitości o wymiarze 4 (i ogólniej, o wymiarach n innych niż te w twierdzeniu 4.1) jest wciąż otwarty. Wiadomo jednak, że obecność metryki ECS na danej rozmaitości zwartej M nakłada konkretne ograniczenia na jej grupę podstawową $\pi_1 M$, charakterystykę Eulera $\chi(M)$ i rzeczywiste klasy Pontriagina $p_i(M) \in H^{4i}(M, \mathbb{R})$, a dodatkowe konsekwencje topologiczne pojawiają się w przypadku sygnatury lorentzowskiej. Mianowicie, Witold Roter udowodnił, wspólnie z autorem, następujące fakty [38].

Twierdzenie 4.2. *Niech (M, g) będzie zwartą rozmaitością ECS. Wówczas grupa podstawowa $\pi_1 M$ jest nieskończona i $\chi(M) = 0$, zaś $p_i(M) \in H^{4i}(M, \mathbb{R})$ jest zerem dla każdego $i \geqslant 1$.*

Twierdzenie 4.3. *Wszystkie czterowymiarowe lorentzowskie rozmaitości ECS są niezwarte.*

Twierdzenie 4.4. *Jeśli (M, g) jest zwartą lorentzowską rozmaitością ECS, to z dokładnością do dwukrotnego nakrycia M jest wiązką nad okręgiem o włóknie posiadającym płaską koneksję beztorsyjną z nietrywialnym równoległym polem wektorowym.*

Ostatnie dwa wyniki pokazują, że – przynajmniej dla sygnatury lorentzowskiej – pewne własności rozmaitości ECS, których istnienie gwarantuje twierdzenie 4.1, nie są całkiem przypadkowe.

Dowód twierdzenia 4.1 można rozłożyć na siedem części.

Część I. Wykonajmy konstrukcję (7) z parametrami I, f, n, V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, A spełniającymi warunek (8), przy czym $I = \mathbb{R}$, a f jest okresowa z okresem $p > 0$. Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ przestrzeń liniową rozwiązań $u\colon \mathbb{R} \to V$ równania różniczkowego zwyczajnego $\ddot{u}(t) = f(t)u(t) + Au(t)$, gdzie $(\cdot)^{\dot{}} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, a przez G zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}$ ze strukturą grupy na G scharakteryzowaną przez żądanie, by wzór

$$(k, q, u) \cdot (t, s, v) = \big(t + kp, s + q - \langle \dot{u}(t), 2v + u(t)\rangle, v + u(t)\big)$$

dla $(k, q, u) \in$ G i $(t, s, v) \in \mathbb{R}^2 \times V$, definiował lewostronne działanie G na $\mathbb{R}^2 \times V$. Grupa G działa wówczas na rozmaitości (7) przez izometrie.

Część II. Zapytajmy, kiedy z rozmaitości (7) otrzymanej w części I, z odpowiadającymi jej obiektami f, n, V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, A, p, $\mathcal{E}$, G i $I = \mathbb{R}$, można uzyskać zwartą rozmaitość ECS powstającą jako iloraz rozmaitości (7) przez jakąś dyskretną podgrupę Γ grupy G działającą w sposób właściwie nieciągły. Odpowiedź – wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krzywa gładka $\mathbb{R} \ni t \mapsto B(t) \in \mathrm{End}(V)$, okresowa z okresem p, spełniająca równanie różniczkowe

$$\dot{B} + B^2 = f + A, \tag{12}$$

jednocześnie zaś dodatkowe warunki, wypisane w [37, twierdzenie 6.1(ii)], zachodzą dla jakiejś kraty Σ w przestrzeni liniowej $\mathcal{N} = \mathbb{R} \times \mathcal{L}$, gdzie $\mathcal{L}$ jest przestrzenią wszystkich rozwiązań $u\colon \mathbb{R} \to V$ równania $\dot{u}(t) = B(t)u(t)$ (tak więc $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$). Najważniejszym z tych dodatkowych warunków jest własność arytmetyczna *operatora translacji* $T\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ danego wzorem $(Tu)(t) = u(t - p)$. Własność ta polega na istnieniu takiego funkcjonału liniowego $\varphi \in \mathcal{L}^*$, że $\Psi(\Sigma) = \Sigma$ dla operatora $\Psi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ zdefiniowanego formułą $\Psi(r, u) = (r + \varphi(u), Tu)$.

Część III. Zauważmy, że – w części II – taka krata Σ, że $\Psi(\Sigma) = \Sigma$ dla jakiegoś funkcjonału φ, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\det T = \pm 1$ i macierz T w pewnej bazie przestrzeni $\mathcal{L}$ ma wyrazy całkowitoliczbowe. Naszym głównym zadaniem staje się więc znalezienie takiego rozwiązania B równania (12), że wymieniony warunek zachodzi dla odpowiadającego mu operatora translacji T.
Część IV. Ustalmy liczby całkowite k, l spełniające nierówności $4 < k < l \leqslant k^2/4$. Takie l istnieje przy dowolnym zadanym $k > 4$. Łatwo sprawdza się [40, lemat 2.1], że wielomian $P(\lambda) = -\lambda^3 + k\lambda^2 - l\lambda + 1$ ma wtedy pierwiastki rzeczywiste λ, μ, ν, dla których

$$0 < \lambda < \mu < \nu, \quad \lambda < 1 < \nu, \quad \lambda\mu < 1 < \mu\nu, \quad \lambda\nu \neq 1. \tag{13}$$

Część V. Dla p wybranego w części I, oznaczmy przez $\mathcal{F}_p$ zbiór wszystkich siódemek uporządkowanych $(\alpha, \beta, \gamma, f, a, b, c)$ złożonych z funkcji gładkich $\alpha, \beta, \gamma, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zmiennej t, okresowych o okresie p, wraz z trzema różnymi stałymi rzeczywistymi a, b, c o sumie zero, z których najmniejszą jest b, spełniających warunki $\alpha > \beta > \gamma$ oraz

$$\dot{\alpha} + \alpha^2 = f + a, \tag{14}$$

$$\dot{\beta} + \beta^2 = f + b, \tag{15}$$

$$\dot{\gamma} + \gamma^2 = f + c. \tag{16}$$

Niech $\mathcal{C}$ będzie podzbiorem $\mathcal{F}_p$ złożonym z tych $(\alpha, \beta, \gamma, f, a, b, c)$, dla których α, β, γ i f są stałe. Zdefiniujmy odwzorowanie $\operatorname{spec}\colon \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}^3$ wzorem $\operatorname{spec}(\alpha, \beta, \gamma, f, a, b, c) = (\lambda, \mu, \nu)$, gdzie

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(\exp[-\textstyle\int_0^p \alpha(t)\,\mathrm{d}t], \exp[-\int_0^p \beta(t)\,\mathrm{d}t], \exp[-\int_0^p \gamma(t)\,\mathrm{d}t]\right).$$

Część VI. Dowodzimy, że $\operatorname{spec}(\mathcal{F}_p \smallsetminus \mathcal{C}) = \mathcal{U}$ dla $\mathcal{F}_p, \mathcal{C}$, spec wprowadzonych w części V i zbioru otwartego $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ złożonego z wszystkich trójek (λ, μ, ν), spełniających warunek (13). Osiąga się to poprzez redukcję liczby funkcji niewiadomych w siódemce $(\alpha, \beta, \gamma, f, a, b, c)$, stanowiącej rozwiązanie układu (14–16). Aby rozwiązać układ (14–15) z dodatkowym warunkiem $\alpha > \beta$ (dla ustalonych a, b), kładziemy $\eta = \alpha - \beta$ i $\psi = \alpha + \beta$. Równość $\psi = (a - b - \dot{\eta})/\eta$ pozwala nam zrekonstruować α i β z η. Rozwiązania (α, β) układu (14–15) odpowiadają więc wzajemnie jednoznacznie dowolnym funkcjom gładkim $\eta\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$, okresowym o okresie p. W ten sam sposób dowolne rozwiązanie układu (15–16) odpowiada jednej dowolnej funkcji dodatniej o własnościach podobnych do η, którą oznaczamy przez σ. Nasze η i σ mają spełniać jedno równanie różniczkowe, które stwierdza, że funkcja β zrekonstruowana z η równa jest funkcji β zrekonstruowanej z σ. Funkcja $\log(\sigma/\eta)$ może być

przy tym zupełnie dowolna (oprócz tego, że jest gładka i okresowa o okresie p); zob. [40, lemat 10.4]. Wyrażając trójkę (λ, μ, ν) w części V poprzez nową funkcję niewiadomą $\log(\sigma/\eta)$, widzimy teraz, że $\mathrm{spec}(\mathcal{F}_p \setminus \mathcal{C}) = \mathcal{U}$.
Część VII. Dla λ, μ, ν wybranych jak w części IV, ustalmy taką siódemkę $(\alpha, \beta, \gamma, f, a, b, c) \in \mathcal{F}_p \setminus \mathcal{C}$, że $\mathrm{spec}(\alpha, \beta, \gamma, f, a, b, c) = (\lambda, \mu, \nu)$ (jej istnienie jest konsekwencją części VI). Połóżmy

$$B(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Ponieważ zachodzą równania (14–16), nasze $B(t)$ i A spełniają warunek (12). Traktując macierze $B(t)$ i A jak endomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wyposażonej w standardowy pseudoeuklidesowy iloczyn skalarny dowolnej zadanej sygnatury oraz używając faktu, że endomorfizmy $B(t)$ komutują między sobą, łatwo sprawdzić, że λ, μ, ν zdefiniowane w części V stanowią wartości własne operatora translacji T stowarzyszonego z B i A (zob. część II). Dlatego też te ostatnie λ, μ, ν są identyczne z naszą wybraną trójką λ, μ, ν. Stąd z kolei wynika, że $P(\lambda)$ wspomniany w części IV jest wielomianem charakterystycznym T. Tak więc T ma własność wymaganą w części III (zob. [40, str. 75]). Ponadto f jest niestała, gdyż $(\alpha, \beta, \gamma, f, a, b, c) \notin \mathcal{C}$, por. [40, uwaga 10.1]. Ta sama konkluzja zachodzi, jeśli zastąpimy endomorfizmy $B(t)$ i A ich j-tymi potęgami kartezjańskimi działającymi w $V = \mathbb{R}^{3j}$ dla dowolnego $j \geqslant 1$.

Na podstawie części III, to kończy dowód twierdzenia 4.1. Ściślej mówiąc, ponieważ $\mathrm{G} \ni (k, q, u) \mapsto k \in \mathbb{Z}$ jest nietrywialnym homomorfizmem grup, jego obraz ma postać $m\mathbb{Z}$, gdzie $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, por. [40, wzór (3.4.a), uwaga 5.1]. Odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \times V \ni (t, s, v) \mapsto t/p \in \mathbb{R}$ indukuje, na poziomie przestrzeni ilorazowych dla działań grup G i $m\mathbb{Z}$, rozwłóknienie $M \to S^1$ rozmaitości zwartej $M = (\mathbb{R}^2 \times V)/\Gamma$ na torusy, którego rozmaitością bazową jest okrąg $S^1 = \mathbb{R}/(m\mathbb{Z})$ – zob. [40, uwaga 7.1, lemat 4.1(i)].

5. Metryki rekurencyjne i ich uogólnienia

Pole tensorowe H na rozmaitości z ustaloną koneksją beztorsyjną ∇ nazywamy *rekurencyjnym*, jeśli H i $\nabla_v H$ są liniowo zależne w każdym punkcie, dla każdego pola wektorowego v. Jest to równoważne relacji $\nabla H = \xi \otimes H$ w punktach, w których $H \neq 0$, z pewną 1-formą ξ. Podobnie, *dwurekurencyjność* pola tensorowego H względem ∇ oznacza, że $\nabla^2 H = \tau \otimes H$ na zbiorze zadanym przez warunek $H \neq 0$ dla jakiegoś dwukrotnie kowariantnego pola tensorowego τ.

Przez rozmaitość *rekurencyjną*, bądź *Ricci-rekurencyjną*, bądź też *konforemnie rekurencyjną* rozumie się rozmaitość pseudoriemannowską (M, g), której tensor krzywizny R, bądź tensor Ricciego ρ, bądź też, odpowiednio, tensor Weyla W jest rekurencyjny względem jej koneksji Levi-Civity ∇. Mówimy wtedy też, że metryka g ma jedną z trzech zdefiniowanych tu własności; ta tradycyjna terminologia nie jest całkiem konsekwentna, gdyż g jest zawsze, w oczywisty sposób, rekurencyjnym polem tensorowym, nie będąc oczywiście na ogół metryką rekurencyjną.

Trzy najwcześniejsze prace Witolda Rotera [1–3] dotyczyły rozmaitości, które są rekurencyjne, bądź mają dwurekurencyjny tensor krzywizny. Uogólnił on w nich pewne wyniki Nikołaja Stiepanowicza Siniukowa [48] i André Lichnerowicza [43]. Warto też wspomnieć o jego sześciu znacznie późniejszych pracach [16, 25–28, 32] poświęconych metrykom konforemnie rekurencyjnym. Zawierają one m.in. konstrukcje niebanalnych przykładów takich metryk [16, 25] i różne wyniki o relacjach konforemnych między nimi [26, 28, 32]. W pracy [27] Witold Roter zdefiniował metryki konforemnie rekurencyjne *typu prostego*, tzn. lokalnie konforemnie równoważne metrykom o równoległym niezerowym tensorze Weyla, opisał przykłady takich metryk, które nie są ani konforemnie płaskie, ani rekurencyjne, oraz udowodnił, że – poza przypadkiem lokalnie symetrycznym – wszystkie te metryki mają krzywiznę skalarną równą zeru.

Spis publikacji Witolda Rotera

[1] *Sur l'application géodésique d'une variété riemannienne sur l'espace récurrent*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 9 (1961), 147–149.

[2] *Quelques remarques sur les espaces récurrents et Ricci-récurrents*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962), 533–536.

[3] *Some remarks on second order recurrent spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964), 207–211.

[4] *A note on second order recurrent spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964), 621–626.

[5] *Some remarks on infinitesimal projective transformations in recurrent and Ricci-recurrent spaces*, Colloq. Math. 15 (1966), 121–127.

[6] *On infinitesimal projective transformations in recurrent spaces of second order*, Zesz. Nauk. Politechn. Wrocław. 197, Mat. 1 (1968), 87–94.

[7] *A note on infinitesimal conformal transformations in recurrent spaces of second order*, Zesz. Nauk. Politechn. Wrocław. 197, Mat. 1 (1968), 95–100.

[8] *On torse-forming vector fields in Ricci-recurrent and second order recurrent spaces*, Fasc. Math. 4 (1969), 15–24 (1970) (współautor: E. Głodek).
[9] *A theorem on tensor of recurrence of second order recurrent spaces*, Fasc. Math. 4 (1969), 25–27 (1970).
[10] *Some theorems on conformally symmetric spaces*, Prace Nauk. Inst. Mat. Fiz. Teoret. Politechn. Wrocław. No. 1. Ser. Studia i Materiały, No. 1: Riemannian geometry (1970), 3–8.
[11] *On conformally symmetric* 2*-Ricci-recurrent spaces*, Colloq. Math. 26 (1972), 115–122. Collection of articles commemorating Władysław Ślebodziński.
[12] *On null geodesic collineations in some Riemannian spaces*, Colloq. Math. 31 (1974), 97–105.
[13] *Some theorems on compact conformally symmetric Riemannian spaces*, Colloq. Math. 32 (1974), 143–148.
[14] *On conformally symmetric Ricci-recurrent spaces*, Colloq. Math. 31 (1974), 87–96.
[15] *Conformally symmetric spaces admitting special quadratic first integrals*, Colloq. Math. 33 (1975), nr 2, 225–235.
[16] *On the existence of conformally recurrent Ricci-recurrent spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 24 (1976), nr 11, 973–979.
[17] *On conformally symmetric spaces with positive definite metric forms*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 24 (1976), nr 11, 981–985.
[18] *On generalized curvature tensors on some Riemannian manifolds*, Colloq. Math. 37 (1977), nr 2, 233–240.
[19] *On conformally symmetric manifolds with metrics of indices* 0 *and* 1, Tensor (N.S.) 31 (1977), nr 3, 255–259 (współautor: A. Derdziński).
[20] *О конформно симметрических многообразиях*, Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачевского» (Казань, 30 июня – 2 июля 1976). Пленарные доклады, 175–180. Винити, Москва, 1977 (współautor: A. Derdziński).
[21] *Generalized curvature tensors on conformally symmetric manifolds*, Colloq. Math. 39 (1978), nr 1, 45–54.
[22] *Some theorems on conformally symmetric manifolds*, Tensor (N.S.) 32 (1978), nr 1, 11–23 (współautor: A. Derdziński).
[23] *Some properties of conformally symmetric manifolds which are not Ricci-recurrent*, Tensor (N.S.) 34 (1980), nr 1, 11–20 (współautor: A. Derdziński).
[24] *Some remarks on infinitesimal conformal motions in conformally symmetric manifolds*, Tensor (N.S.) 35 (1981), nr 1, 8–10.
[25] *On conformally recurrent Ricci-recurrent manifolds*, Colloq. Math. 46 (1982), nr 1, 45–57.
[26] *On conformally related conformally recurrent metrics. I. Some general results*, Colloq. Math. 47 (1982), nr 1, 39–46.
[27] *On a class of conformally recurrent manifolds*, Tensor (N.S.) 39 (1982), 207–217.
[28] *On the existence of certain conformally recurrent metrics*, Colloq. Math. 51 (1987), 315–327.

[29] *On a generalization of conformally symmetric metrics*, Tensor (N.S.) 46 (1987), 278–286.
[30] *On conformal collineations*, Colloq. Math. 57 (1989), nr 2, 279–294.
[31] *Conditions on the projective curvature tensor of conformally flat Riemannian manifolds*, Kyungpook Math. J. 29 (1989), nr 2, 153–166 (współautorzy: J. Deprez, L. Verstraelen).
[32] *Some indefinite metrics and covariant derivatives of their curvature tensors*, Colloq. Math. 62 (1991), nr 2, 283–292.
[33] *On conformally quasi-recurrent metrics. I. Some general results and existence questions*, Soochow J. Math. 19 (1993), nr 4, 381–400 (współautor: K. Buchner).
[34] *On a class of Riemannian manifolds with harmonic Weyl conformal curvature tensor*, Ann. Acad. Pedagog. Crac. Stud. Math. 4 (2004), 191–202.
[35] *Walker's theorem without coordinates*, J. Math. Phys. 47 (2006), nr 6, 062504 (współautor: A. Derdziński).
[36] *Projectively flat surfaces, null parallel distributions, and conformally symmetric manifolds*, Tohoku Math. J. (2) 59 (2007), nr 4, 565–602 (współautor: A. Derdziński).
[37] *Global properties of indefinite metrics with parallel Weyl tensor*, Pure and applied differential geometry—PADGE 2007, 63–72. Berichte aus der Mathematik, Shaker Verlag, Aachen, 2007 (współautor: A. Derdziński).
[38] *On compact manifolds admitting indefinite metrics with parallel Weyl tensor*, J. Geom. Phys. 58 (2008), nr 9, 1137–1147 (współautor: A. Derdziński).
[39] *The local structure of conformally symmetric manifolds*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 16 (2009), nr 1, 117–128 (współautor: A. Derdziński).
[40] *Compact pseudo-Riemannian manifolds with parallel Weyl tensor*, Ann. Global Anal. Geom. 37 (2010), nr 1, 73–90 (współautor: A. Derdziński).

Inne cytowane książki i artykuły

[41] A. L. Besse, *Einstein manifolds.* Reprint of the 1987 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin 2008.
[42] M. C. Chaki, B. Gupta, *On conformally symmetric spaces*, Indian J. Math. 5 (1963), 113–122.
[43] A. Lichnerowicz, *Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques*, (Cambridge, Mass., 1950), [w:] Proc. Internat. Congr. Mathematicians, t. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1952, 216–223.
[44] T. Miyazawa, *Some theorems on conformally symmetric spaces*, Tensor (N.S.) 32 (1978), nr 1, 24–26.
[45] Z. Olszak, *On conformally recurrent manifolds, I: Special distributions*, Zesz. Nauk. Politech. Śl., Mat.-Fiz. 68 (1993), 213–225.
[46] Z. Olszak, *Witold Kazimierz Roter (1932–2015)*, Wiad. Mat. 52 (2016), nr 1, 153–157.

[47] J. A. Schouten, *Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung*, Math. Zeitschr. 11 (1921), nr 1–2, 58–88.
[48] N. S. Sinjukov, *On geodesic mappings of Riemannian spaces onto symmetric Riemannian spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 98 (1954), 21–23. in Russian.
[49] S. Tanno, *Curvature tensors and covariant derivatives*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 96 (1972), nr 1, 233–241.

Andrzej Derdziński
The Ohio State University
andrzej@math.ohio-state.edu