Теорема Гусарова

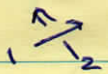
Семинар Ландо в ГУ ВШЭ

4 апреля 2011

① Формулы Поляка – Вира.

Коэффициент зацепления

$$lk(K_1, K_2) = \sum \varepsilon_i$$



~~Стань~~ Гауссовы диаграммы:

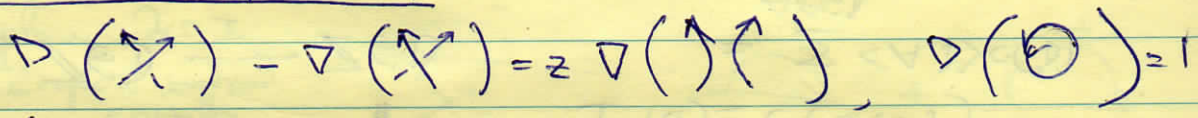
Окружность(и) со стрелками ~~хордами~~:

на стрелках ~~хордах~~ знак + или −

Стрелки ~~Хорда~~ отвечают ~~в~~ перекрёсткам ориентированная с верхней ветки на нижнюю.

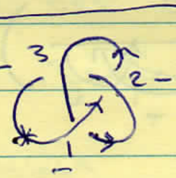
lk(K₁, K₂) := <  , G_K >

Многочлен Конвея

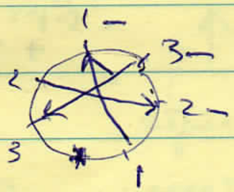


$$\nabla(K) = 1 + c_2(K)\, z^2 + c_4(K)\, z^4 + \dots$$

$$\boxed{c_2(K) = \sum_{\substack{i\ j\ i\ j \\ o\ u\ u\ o}} \varepsilon_i \varepsilon_j}$$

$3_1 =$ 

1	2	3	1	2	3
o	u	o	u	o	u

$c_2(3_1) = 1$, 

$c_2(K) = <$  $, G_K >$

$= <$  $, G_K >$

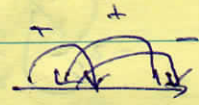
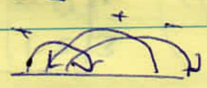
② Теорема Гусарова.

$GD = \{$Гауссовых диаграмм$\}$

$\mathbb{Z}GD$ = свободная абелева группа, порождённая GD

$$I : \mathbb{Z}GD \to \mathbb{Z}GD$$

$$D \longmapsto \sum_{D' \subseteq D} D'$$

$I($  $) =$  $+$  $+ \dots$

$$I(D) = \sum_{A \in GD} \langle A, D \rangle A$$

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}GD^{re} \arrow[r, hook] \arrow[urr, "v"] & \mathbb{Z}GD \arrow[r, "I"'] \arrow[ur, dashed, "I^*(c)"] & \mathbb{Z}GD \arrow[u, "c"'] \end{tikzcd}$$

реализуемые

$$I^*(c)(D) = c(I(D)) = \sum_{A \in GD} \langle A, D \rangle c(D)$$

Теорема (Гусаров)

$\forall$ инв. Васильева v, $\mathrm{ord}(v) \leq n$

$\exists\, c_v \mid$ 1) $v = I^*(c_v)|_{\mathbb{Z}GD^{re}}$

2) c_v (D, $> n$ стрелок) $= 0$

Пример $v = c_2$

$c_v($  $) = 1$ $c_v($  $) = -1$, $c_v($  $) = -1$ $c_v($  $) = 1$

Доказательство.

① Построение c_v

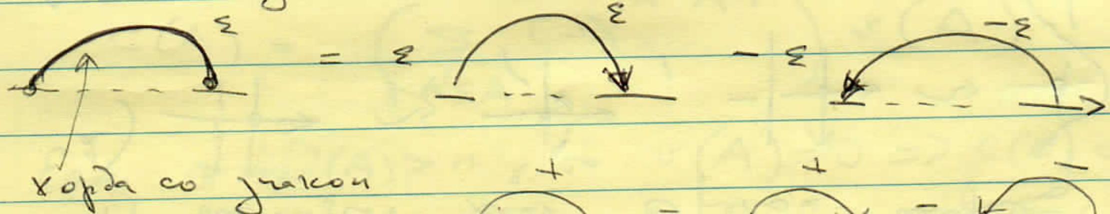
$$v = c_v \circ I$$

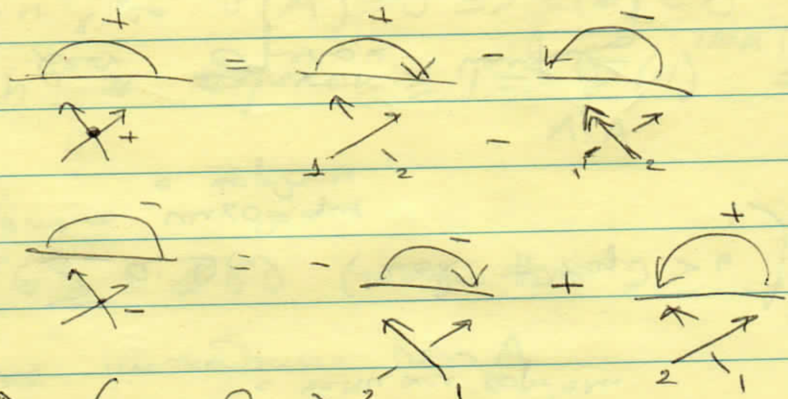
$$c_v = v \circ I^{-1}, \quad I^{-1}(D) = \sum_{D' \subseteq D} (-1)^{|D - D'|} \cdot D'$$

Загвоздка: v определено только на $\mathbb{Z}GD^{re}$

- Нужно продолжить v на виртуальные $\mathbb{Z}GD$

Используем соотношение Васильева





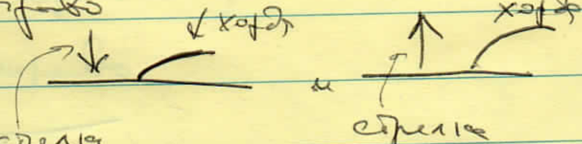
При положительном разрешении двойной точки первым идет переход = второй подход справа

Нисходящие GD (с хордами)

виртуальные узлы с двойными точками.

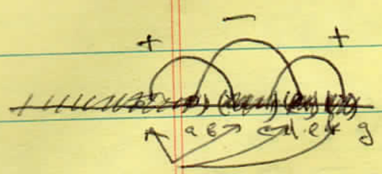
1) все стрелки смотрят направо

2) запрещенные ситуации

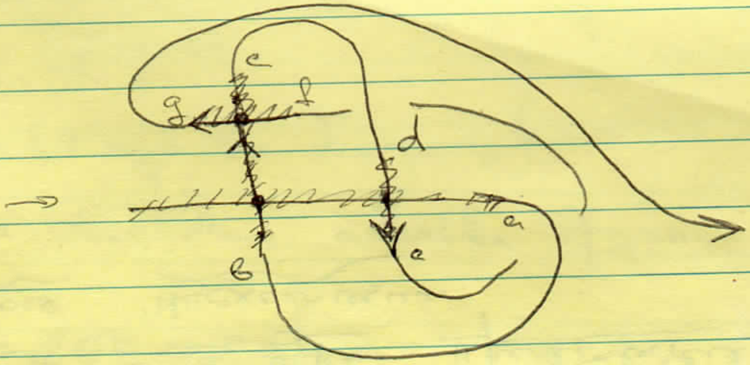


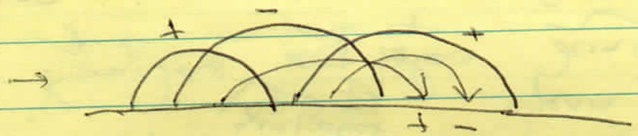
Лемма Каждая знаковая хордовая диаграмма имеет единственного классического представителя в GD^{re} являющегося нисходящим.

Пример



запрещенное мн-во





Продолжение v:

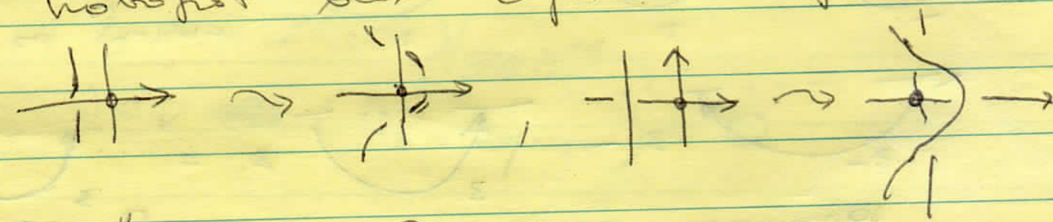
$v(D_{\text{хорд} \geq n}) := 0$

$v(D_{\text{нисходящей}}) := v(D'_{\text{классич. нисход.}})$ с теми же хордами

$$\underset{\text{произвольн.}}{D} \xrightarrow{p^{\mathbb{N}}} \sum a_i \underset{\text{нисходящие с хордами}}{D_i} \quad (\text{mod } \# \text{ хорд} \geq n)$$

Отображение: p

1) поворот всех стрелок направо

2) 

$p(D)$ = "более нисходящая"

② Доказательство, что $c(D_{>n\ \text{стрелок}}) = 0$

$$c(A) = v(I^{-1}(A)) = \sum_{A' \subseteq A} (-1)^{|A-A'|} v(A')$$

A' — подмножество стрелок.

2а) A — нисходящая со знаковыми хордами. $\#$хорд $+ \#$стрелок $> n$

Док. $c(A) = 0$, все A' тоже нисходящие с теми же самыми хордами

$\Downarrow$

$v(A') = v(A)$ для всех A'

$\Downarrow$

$$c(A) = \Big(\sum_{A' \subseteq A} (-1)^{|A-A'|}\Big) v(A)$$

Если $\#$хорд$(A) > n$ то $v(A) = 0 \Rightarrow c(A) = 0$

Если $\#$хорд$(A) \leq n$, $\#$стрелок $\geq 1 \Rightarrow \sum_{A' \subseteq A} (-1)^{|A-A'|} = 0$

2в) A не нисходящая.

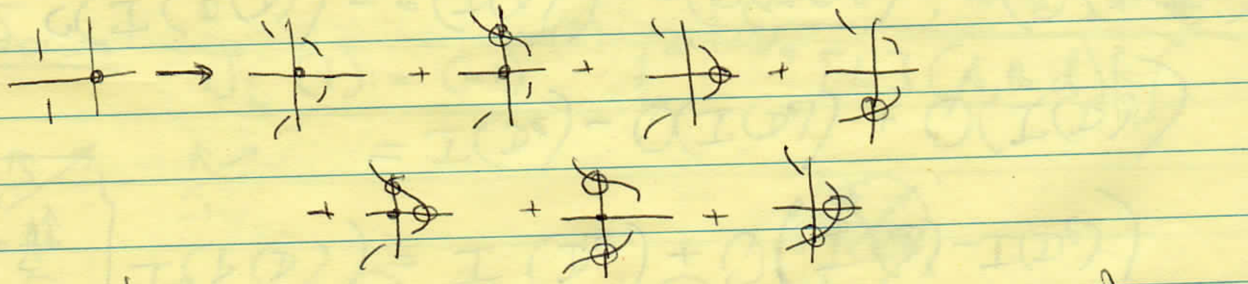
Определим $Q: \mathbb{Z}GD \to \mathbb{Z}GD$ такой, что

1) $Q(A)$ более нисходящая чем A

2) $c \circ Q = c$.

$Q(A) = \sum a_i A_i$ (mod $\#$ хорд $> n$)

Q: перевернём стрелки направо.



$Q^N(A) = \sum$ нисходящих (mod $\#$ хорд $\geq n$)

$D_\ell =$ 

Доказательство, что $c(Q(I(D))) = c(I(D))$.

Индукция по числу стрелок.

Потому, что I это отображение.

$$I(P(D)) = I(D_\ell) + Q\big(I(D) - I(D_\ell)\big)$$

$$= I(D_\ell) - Q(I(D_\ell)) + Q(I(D))$$

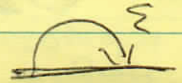
$$c(I(P(D))) = \underbrace{c(I(D_\ell)) - c(Q(I(D_\ell)))}_{=0 \text{ по индукции}} + c(Q(I(D)))$$

$$\| \quad v(P(D))$$

$$\| \quad v(D) \quad \text{по построению продолжения } v$$

$$c(Q(I(D))) = v(D) = c(I(D)) \qquad \blacksquare$$

Алгебра Поляка

 $= 0$