Польская Народная Республика

Анджей Дердзиньски, Витольд Ротер (Вроцлав)

О КОНФОРМНО СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. ВВЕДЕНИЕ

Говорят, что n-мерное ($n \geqslant 4$) риманово многообразие M (метрика которого не обязательно определена) конформно симметрично, если его тензор конформной кривизны Вейля

$$C^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-2}(g_{ij}R^h_k - g_{ik}R^h_j + \delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j) \tag{1}$$

удовлетворяет соотношению

$$C^h_{ijk,l} = 0, \tag{2}$$

т. е. если он параллелен относительно связности Леви-Чивита на M. Здесь и в дальнейшем g_{ij} обозначает метрику рассматриваемого риманова многообразия, а символы $R_{ijk}{}^h$. R_{ij} и R — его тензор кривизны, тензор Риччи и, соответственно, скалярную кривизну. Понятие конформной симметричности было введено Чаки и Гупта в статье [1]. Очевидно, что всякое конформно плоское, как и всякое локально симметрическое (в смысле Э. Картана) риманово многообразие размерности $n \geqslant 4$, конформно симметрично. Римановы многообразия (вообще говоря, с неопределенной метрикой), которые конформно симметричны, но не являются ни конформно плоскими, ни локально симметрическими, принято называть существенно конформно симметрическими.

О всех рассматриваемых многообразиях мы будем предполагать, что они связны, паракомпактны, n-мерны ($n \geqslant 4$) и класса C^∞. Риманово многообразие M будем называть Риччи-рекуррентным, если выполнено следующее условие: В каждой точке $x \in M$, для которой $R_{ij}(x) \neq 0$, существует касательный вектор v такой, что $R_{ij,k}(x) = v_k R_{ij}(x)$.

2. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

В работе [4] (см. также [7] в случае $n \geqslant 5$) доказано, что метрика существенно конформно симметрического многообразия всегда неопределенна. Поэтому условие (2), которое часто встречается в литературе, относящейся к положительно определенным метрикам, обозначает, что в этих случаях дело имеется с конформно плоскими или локально симметрическими многообразиями.

Если определить индекс симметрической матрицы как число отрицательных элементов в ее диагональной форме, то сказанное выше обозначает, что существенно конформно симметрических многообразий с метрикой индекса 0 или n не существует. Наоборот, для каждого q, $0<q<n$, можно получить пример существенно конформно симметрического многообразия с метрикой g_{ij} индекса q, определяя эту метрику в евклидовом пространстве R^n формулой ([6])

$$g_{ij}dx^i dx^j = \varphi (dx^1)^2 + k_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu + 2dx^1 dx^n, \tag{3}$$

где греческие буквы $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, принимают значения $2, \ldots, n-1$, а функция φ задана как

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n) = (A(x^1) k_{\lambda\mu} + a_{\lambda\mu}) x^\lambda x^\mu. \tag{4}$$

При этом A есть произвольная непостоянная функция одного вещественного переменного, а матрицы $[k_{\lambda\mu}]$ и $[a_{\lambda\mu}]$ удовлетворяют условиям

$$k_{\lambda\mu} = k_{\mu\lambda}, \quad a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}, \tag{5}$$

$$\det[k_{\lambda\mu}] \neq 0, \quad [a_{\lambda\mu}] \neq 0, \tag{6}$$

$$k^{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} = 0, \tag{7}$$

где

$$k^{\lambda\nu} k_{\nu\mu} = \delta^\lambda_\mu$$

и индекс матрицы $[k_{\lambda\mu}]$ равен $q-1$. Можно проверить, что всякое многообразие, определенное таким образом, Риччи-рекуррентно. Более того, в [6] доказано, что метрика (3) универсальна в следующем смысле: Для всякого n-мерного существенно конформно симметрического Риччи-рекуррентного многообразия M и любой точки $x \in M$, в которой $R_{ij}(x) \neq 0$ и $R_{ij,k}(x) \neq 0$, существует локальная система координат в окрестности x, в которой метрика принимает вид (3), причем функция φ определена формулой (4), A является непостоянной функцией на интервале действительной прямой, а матрицы $[k_{\lambda\mu}]$, $[a_{\lambda\mu}]$ выполняют условия (5), (6) и (7).

Как сказано выше, существенно конформно симметрические Риччи-рекуррентные многообразия существуют в каждой размерности $n \geqslant 4$ и для любого индекса метрики, кроме 0 и n. В работе [5] даже доказано, что всякое существенно конформно симметрическое многообразие с метрикой индекса 1 Риччи-рекуррентно. Более общо ([5]), любое существенно конформно симметрическое многообразие, на котором параллельное тензорное поле $C_{rijk}C^{r}_{nlm}$ не обращается в нуль, Риччи-рекуррентно. Пример n-мерного ($n \geqslant 4$) риманова многообразия, которое существенно конформно симметрично, но не Риччи-рекуррентно, можно получить, определяя в $\mathbf{R}^n$ метрику ([2])

$$g_{ij} = \begin{cases} \exp F_i, \text{ если } i+j=n+1, \\ -1, \text{ если } i=j=1, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{8}$$

где функции $F_i = F_{n-i+1}$ даны формулами

$$\begin{gathered} F_1(x^1, \ldots, x^n) = 2bx^2 - ax^1 - c(x^1)^2, \\ F_2(x^1, \ldots, x^n) = 2c(x^1)^2 + 2ax^1 - bx^2, \\ F_i(x^1, \ldots, x^n) = 2c(x^1)^2 + 2ax^1 + 2bx^2, \ i=3, \ldots, n-2, \end{gathered} \tag{9}$$

а a, b, c — произвольные действительные числа, причем a и b отличны от нуля.

Алгебраические свойства тензора Риччи существенно конформно симметрических многообразий известны довольно хорошо. Итак, в работе [8] доказано неравенство

$$\operatorname{rank} R_{ij} \leqslant 2. \tag{10}$$

Если, кроме того, рассматриваемое многообразие Риччи-рекуррентно, то

$$\operatorname{rank} R_{ij} \leqslant 1. \tag{11}$$

Оценку (10) нельзя улучшить в общем случае, так как для метрики, определенной формулами (8) и (9), ранг тензора Риччи равен 2 во многих точках многообразия ([2]).

В работе [8] доказывается, что для всякого существенно конформно симметрического многообразия M справедливо равенство

$$R_{ij}R_{hk} - R_{hj}R_{ik} = FC_{hijk}, \tag{12}$$

где F — некоторая функция на M. Условие (11) равносильно тому, что F тождественно равна нулю. Рассматривая метрики, заданные формулами (8) и (9), легко убедиться, что F может быть ненулевой постоянной (случай $c=0$), как и непостоянной функцией ($c\neq 0$).

Относительно алгебраических свойств тензора Вейля в работе [8] доказана следующая теорема: Во всяком существенно конформно симметрическом не-Риччи-рекуррентном многообразии M справедливо равенство

$$C_{hijk}=e\omega_{hi}\omega_{jk}, \tag{13}$$

где число e равно по модулю единице, а ω есть абсолютная (т. е. определенная с точностью до знака), параллельная 2-форма на M, ранг которой равен 2. Из элементарных алгебраических свойств тензора Вейля легко вытекает соотношение

$$\omega_{ir}\omega_j{}^r=0. \tag{14}$$

В каждом существенно конформно симметрическом многообразии справедливы следующие формулы (см. [5]):

$$R=0,$$
$$R_i{}^rR_{rj}=0,$$
$$R_i{}^rR_{rj,k}=0,$$
$$R_{ij,k}=R_{ik,j},$$
$$R_i{}^rC_{rjkl}=0,$$
$$R_{hl}C_{mijk}-R_{hm}C_{lijk}+R_{il}C_{hmjk}-R_{im}C_{hljk}+R_{jl}C_{himk}-$$
$$-R_{jm}C_{hilk}+R_{kl}C_{hijm}-R_{km}C_{hijl}=0,$$
$$R_{hijk,lm}-R_{hijk,ml}=0,$$

и, следовательно,

$$R_{ij,lm}-R_{ij,ml}=0.$$

3. КОНФОРМНО СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ В ЦЕЛОМ

В работе [8] доказано, что на всяком аналитическом, существенно конформно симметрическом Риччи-рекуррентном многообразии можно построить параллельное поле изотропных направлений. С другой стороны, если существенно конформно симметрическое многообразие не Риччи-рекуррентно, то из формул (13) и (14) легко вытекает, что на нем существует параллельное поле изотропных касательных плоскостей. Таким образом, любое аналитическое, существенно конформно симметрическое многообразие допускает параллельное изотропное распределение, размерность которого равна 1 или 2. Отсюда следует (см. [8]), что на всяком существенно конформно симметрическом аналитическом многообразии существует двумерное распределение класса C^∞. Используя рассуждения этого вида, можно доказать, что на сфере S^n нет существенно конформно симметрических метрик (даже класса C^∞), если n четно или $n \equiv 1 \pmod 4$ ([4], [5]).

Нетрудно проверить, что метрики, определяемые в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ формулой (3), геодезически полны, если φ, $k_{\lambda\mu}$ и $a_{\lambda\mu}$ удовлетворяют условиям (4)—(7). Наоборот, можно доказать (см. [3]), что многообразия, полученные таким образом, исчерпывают все изометрические типы полных, односвязных, аналитических, n-мерных существенно конформно симметрических Риччи-рекуррентных многообразий, причем, очевидно, функции A предполагаются аналитическими. Таким образом, любое полное, аналитическое, существенно конформно симметрическое Риччи-рекуррентное многообразие M представляет собой пространство Эйленберга — Маклейна типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = \pi_1 M$, так как универсальное накрывающее M стягиваемо. Поэтому же задача определения всех полных, аналитических, существенно конформно симметрических Риччи-рекуррентных многообразий сводится к задаче классификации тех подгрупп группы изометрий описанных выше универсальных накрывающих, которые действуют на них как группы преобразований накрытия. Изометрии пространства $\mathbf{R}^n$ с метрикой (3) на себя совпадают с преобразованиями $F = (F^1, \ldots, F^n)$ вида

$$F^1(x^1, \ldots, x^n) = \varepsilon x^1 + T,$$

$$F^\lambda(x^1, \ldots, x^n) = H^\lambda_\mu x^\mu + C^\lambda(x^1), \quad \lambda = 2, \ldots, n-1,$$

$$F^n(x^1, \ldots, x^n) = -\varepsilon k_{\lambda\mu}\dot{C}^\lambda(x^1)\left(H^\mu_\nu x^\nu + \frac{1}{2}C^\mu(x^1)\right) + \varepsilon x^n + r,$$

причем r есть любое действительное число, числа ε и T подчинены условиям $|\varepsilon| = 1$ и $A(\varepsilon t + T) = A(t)$ для всякого $t \in \mathbf{R}$, матрица $[H^\lambda_\mu]$ такова, что

$$k_{\nu\omega}H^\nu_\lambda H^\omega_\mu = k_{\lambda\mu}, \quad a_{\nu\omega}H^\nu_\lambda H^\omega_\mu = a_{\lambda\mu},$$

а функции C^λ, $\lambda = 2, \ldots, n-1$, составляют решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{C}^\lambda(t) = A(t)C^\lambda(t) + k^{\lambda\nu}a_{\nu\mu}C^\mu(t).$$

Исследуя подгруппы описанной группы преобразований, можно доказать (см. [3]), что на четырехмерном торе T^4 не существует никакой аналитической, существенно конформно симметрической Риччи-рекуррентной римановой метрики.

Авторам неизвестно, может ли существенно конформно симметрическая метрика существовать на каком-нибудь компактном многообразии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chaki M. C., Gupta B.,** On conformally symmetric spaces. Indian Journal of Mathematics, 1963, 5, 113—122
2. **Derdziński A.,** On the existence of essentially conformally symmetric non-Ricci-recurrent manifolds, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (в печати)
3. —, On conformally symmetric Ricci-recurrent manifolds with Abelian fundamental groups. Tensor, New Series (в печати)
4. —, Roter W., On conformally symmetric manifolds with metrics of indices 0 and 1. Tensor, New Series (в печати)
5. —, —, Some theorems on conformally symmetric manifolds. Tensor, New Series (в печати)
6. **Roter W.,** On conformally symmetric Ricci-recurrent spaces. Colloquium Mathematicum, 1974, **31**, 87—96
7. —, On conformally symmetric spaces with positive definite metric forms. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (в печати)
8. —, Some properties of conformally symmetric manifolds which are not Ricci-recurrent. Tensor, New Series (в печати)